

02_ley_de_gauss

June 19, 2026

1 Tema 2 — Ley de Gauss

Física II · GIERM · 1.º · *Apuntes propios para examen*

Origen de la teoría: apuntes oficiales «**Ley de Gauss**» (Dpto. Física Aplicada III, Curso 2023/2024). El texto extrajo correctamente (no fue un escaneo vacío), así que el contenido sigue esos apuntes y se completa con el desarrollo canónico estándar donde el PDF solo daba el resultado.

1.1 Mapa del tema (qué tienes que saber para el examen)

1. **Flujo eléctrico** Φ_E — qué mide y cómo se calcula.
2. **Ley de Gauss** — relaciona el flujo con la carga encerrada.
3. **Estrategia por simetría** — la receta que resuelve los problemas.
4. Aplicaciones canónicas: **esfera maciza/hueca, hilo infinito, plano infinito, condensador plano**.

Enfoque: *worked-example primero* (resultado y cómo usarlo), con el porqué justo detrás. Las figuras se generan con `numpy/matplotlib`.

1.2 1. Flujo eléctrico Φ_E

1.2.1 Idea central

El **flujo eléctrico** a través de una superficie cuenta *cuántas líneas de campo la atraviesan*. Es el campo proyectado sobre la normal de la superficie, integrado sobre toda el área.

1.2.2 Definición

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E \cos \theta \, dA$$

donde $d\vec{A}$ es un vector **perpendicular** al elemento de superficie (módulo = área, dirección = normal saliente) y θ es el ángulo entre $\vec{E}$ y $d\vec{A}$.

1.2.3 El porqué (lo que de verdad importa para Gauss)

- Si $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ (campo perpendicular a la superficie, sale de cara): $\cos \theta = 1 \Rightarrow$ **flujo máximo**.

- Si $\vec{E} \perp d\vec{A}$ (campo *roza* la superficie, paralelo a ella): $\cos \theta = 0 \Rightarrow$ **flujo nulo**. (*Esto es lo que anula las “tapas” o la “superficie lateral” según el caso.*)
- Si además E es **constante en módulo** sobre toda la superficie y siempre perpendicular a ella:

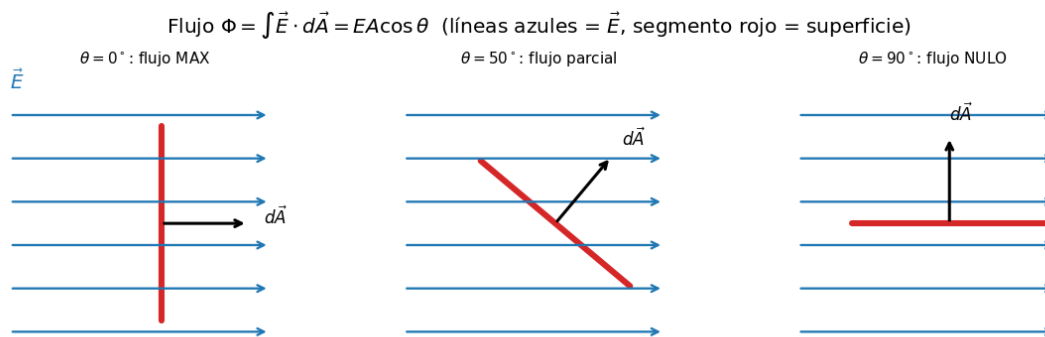
$$\Phi_E = E \cdot A_{\text{efectiva}}$$

Esta última es la situación de oro: convierte una integral en una multiplicación. Toda la estrategia de Gauss consiste en **construir una superficie donde pase exactamente eso**.

Unidades en SI: $[\Phi_E] = \text{V m} = \frac{\text{N m}^2}{\text{C}}$.

$\epsilon_0 = 8.854\text{e-}12 \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$

$k = 8.988\text{e}+09 \text{ N m}^2/\text{C}^2$



1.3 2. Ley de Gauss

1.3.1 Enunciado

El flujo eléctrico **neto** a través de cualquier **superficie cerrada** es proporcional a la **carga encerrada** por esa superficie:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

El círculo en la integral ($\oint$) recuerda que la superficie es **cerrada** (una superficie *gaussiana*, imaginaria).

1.3.2 El porqué

- Las líneas de campo nacen en cargas $+$ y mueren en cargas $-$. Si dentro de la “bolsa” hay carga neta, *sobran* o *faltan* líneas que cruzan la frontera: eso es el flujo neto.
- **Solo cuenta la carga encerrada.** Las cargas exteriores crean líneas que *entran y salen* de la superficie $\rightarrow$ su flujo neto es cero. (No es que no influyan en $\vec{E}$ punto a punto; es que su contribución al **flujo total** se cancela.)

1.3.3 Lo que Gauss NO hace solo

Gauss siempre es cierta, pero solo te deja **despejar** E cuando hay **simetría suficiente** para sacar E de la integral. Sin simetría, la ley vale pero no es práctica para calcular el campo.

1.3.4 Condiciones que buscamos en la superficie (de los apuntes oficiales)

Elegimos la gaussiana para que en cada trozo ocurra una de estas: 1. E **constante** y **perpendicular** a la superficie $\rightarrow \Phi = E A$ (trozo útil). 2. E **paralelo** a la superficie (perpendicular a $d\vec{A}$) $\rightarrow \Phi = 0$ (trozo que se anula). 3. $E = 0$ sobre la superficie $\rightarrow \Phi = 0$.

1.4 3. Estrategia por simetría (la receta de examen)

Estudiamos **tres simetrías**: esférica, cilíndrica y plana. La receta es siempre la misma.

Receta en 5 pasos:

1. **Identifica la simetría** y por tanto la **dirección de $\vec{E}$** :
 - Esférica $\rightarrow \vec{E}$ **radial** (depende solo de r).
 - Cilíndrica $\rightarrow \vec{E}$ **radial respecto al eje** (perpendicular al eje, depende de r).
 - Plana $\rightarrow \vec{E}$ **perpendicular al plano** (depende de la distancia al plano).
2. **Divide el espacio en regiones** (dentro / fuera de la distribución...).
3. **Elige la gaussiana** que respeta la simetría (esfera, cilindro o “caja”/cilindro que atraviesa el plano) de radio/posición r genérica en cada región.
4. **Calcula el flujo** aprovechando que en la cara útil E es constante: $\Phi = E \cdot A_{\text{útil}}$ (las demás caras dan 0).
5. **Calcula Q_{enc}** (la carga *realmente dentro* de la gaussiana) y **despeja E** :

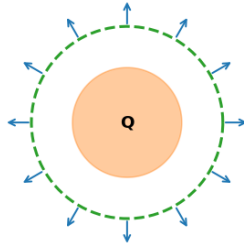
$$E \cdot A_{\text{útil}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0 A_{\text{útil}}}.$$

Simetría	$A_{\text{útil}}$	Resultado general
Esférica	$4\pi r^2$	$E = \frac{k Q_{\text{enc}}}{r^2} = \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
Cilíndrica	$2\pi r L$ (lateral)	$E = \frac{Q_{\text{enc}}}{2\pi\epsilon_0 r L} = \frac{2k\lambda}{r}$
Plana	$2A$ (dos tapas)	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

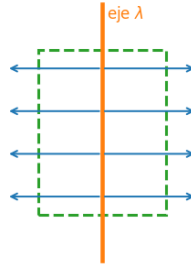
Densidades: $\rho = Q/V$ (volumen), $\sigma = Q/A$ (superficie), $\lambda = Q/L$ (línea).

Superficies gaussianas (verde discontinuo) según la simetría — azul = $\vec{E}$

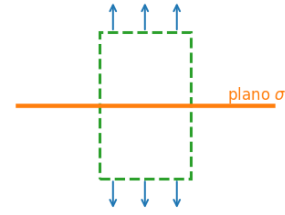
Esférica: gaussiana esfera radio r
 $A = 4\pi r^2$, $\vec{E}$ radial



Cilíndrica: gaussiana cilindro r , L
 $A_{lat} = 2\pi rL$, tapas $\Phi = 0$



Plana: 'caja'/cilindro perpendicular
 2 tapas A , lateral $\Phi = 0$



1.5 4. Aplicación 1 — Simetría esférica

1.5.1 Resultado general (apuntes oficiales)

Con gaussiana esférica de radio r ($A = 4\pi r^2$) y campo radial:

$$E(r) = \frac{k Q_{\text{enc}}(r)}{r^2}.$$

Todo se reduce a calcular **cuánta carga hay dentro del radio r** .

1.5.2 Worked example 1 — Esfera maciza (carga en todo el volumen)

Esfera de radio R , carga total Q **uniforme en el volumen** ($\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$). Dos zonas:

Fuera ($r \geq R$): toda la carga está dentro $\Rightarrow Q_{\text{enc}} = Q$

$$\boxed{E_{\text{fuera}} = \frac{kQ}{r^2}} \quad (\text{como si fuese una carga puntual en el centro}).$$

Dentro ($r < R$): solo encierras la fracción de volumen $\frac{r^3}{R^3}$:

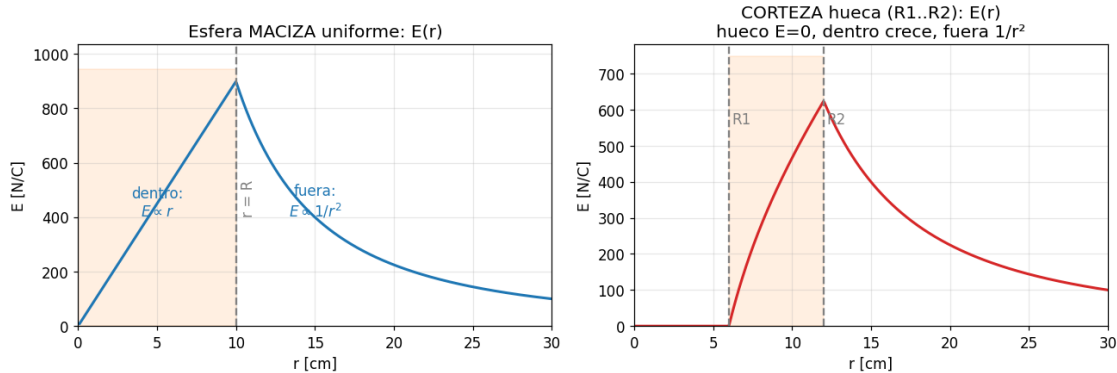
$$Q_{\text{enc}} = Q \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow E_{\text{dentro}} = \frac{kQ r^3 / R^3}{r^2} = \boxed{\frac{kQ}{R^3} r}$$

El campo **crece linealmente** desde 0 en el centro hasta kQ/R^2 en la superficie, donde **empalma** con la solución de fuera (continuo).

1.5.3 Worked example 2 — Corteza/esfera hueca conductora

Carga Q en una **corteza** de radios R_1 (hueco interior) y R_2 . Tres zonas: - **Hueco** ($r < R_1$): $Q_{\text{enc}} = 0 \Rightarrow E = 0$. - **Dentro del material** ($R_1 \leq r \leq R_2$): depende de cómo esté distribuida; para una corteza con carga uniforme en el volumen, Q_{enc} crece con el volumen de cáscara. - **Fuera** ($r > R_2$): $Q_{\text{enc}} = Q \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$.

Caso límite útil (cáscara fina conductora): **dentro** $E = 0$, **fuera como puntual**. El campo es **discontinuo** al cruzar la superficie cargada.



Maciza: E en la superficie ($r=R$) = 898.8 N/C

Continuidad dentro/fuera en $r=R$: dentro=898.8, fuera=898.8 (coinciden)

1.6 5. Aplicación 2 — Simetría cilíndrica: hilo infinito

1.6.1 Worked example 3 — Hilo (línea) infinito con densidad lineal λ

Gaussiana: cilindro de radio r y longitud L coaxial con el hilo.

- **Tapas:** $\vec{E}$ es radial (perpendicular al eje) $\rightarrow$ paralelo a las tapas $\rightarrow \Phi_{\text{tapas}} = 0$.
- **Lateral:** $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie lateral y constante en módulo $\rightarrow \Phi_{\text{lat}} = E(2\pi rL)$.
- **Carga encerrada:** $Q_{\text{enc}} = \lambda L$.

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r}$$

Nota clave: L se **cancela** (porque $Q_{\text{enc}} \propto L$). El campo decae como $1/r$ (más lento que el $1/r^2$ de una carga puntual).

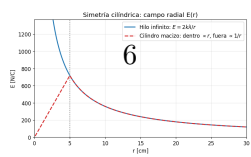
1.6.2 Cilindro macizo (extra, mismo método)

Si en vez de un hilo es un **cilindro macizo** de radio a con ρ uniforme: - Dentro ($r < a$): $Q_{\text{enc}} = \rho\pi r^2 L \Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$ (crece con r). - Fuera ($r > a$): $E = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ con $\lambda = \rho\pi a^2$.

/tmp/ipykernel_1224517/4156016216.py:20: UserWarning: Tight layout not applied.
The bottom and top margins cannot be made large enough to accommodate all Axes decorations.

```
plt.tight_layout(); plt.show()
```

$r = 0.5 \text{ m}$



1.7 6. Aplicación 3 — Simetría plana: plano infinito y condensador

1.7.1 Worked example 4 — Plano infinito con densidad superficial σ

Gaussiana: cilindro (o “caja”) perpendicular al plano, que lo atraviesa, con tapas de área A a cada lado.

- **Lateral:** $\vec{E}$ es perpendicular al plano $\rightarrow$ paralelo a la lateral $\rightarrow \Phi_{\text{lat}} = 0$.
- **Dos tapas:** en cada una $\vec{E}$ sale perpendicular y vale lo mismo $\rightarrow \Phi = 2EA$.
- **Carga encerrada:** $Q_{\text{enc}} = \sigma A$ (el “disco” recortado por el cilindro).

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

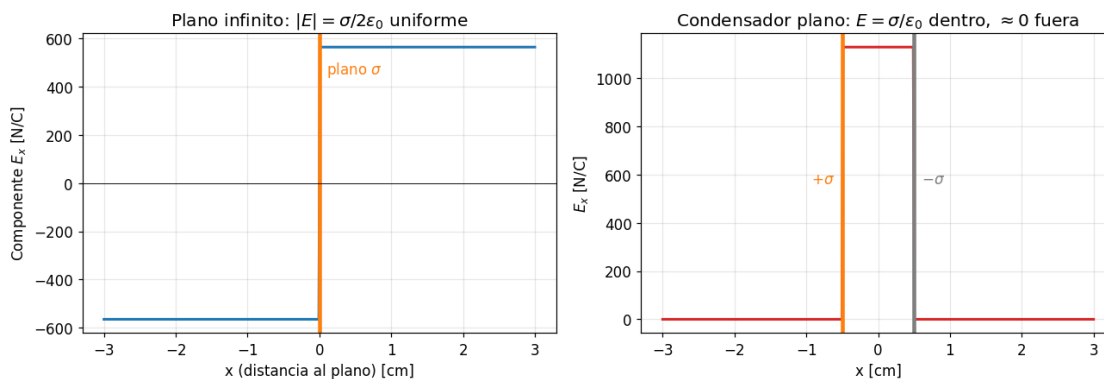
¡El campo **no depende de la distancia**! Es **uniforme** a cada lado (apunta en sentidos opuestos).

1.7.2 Condensador plano (dos planos con $+\sigma$ y $-\sigma$)

Superponiendo los dos planos: - **Entre las placas:** los campos se **suman** $\rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$ (uniforme).

- **Fuera de las placas:** los campos se **cancelan** $\rightarrow E \approx 0$.

De aquí salen la diferencia de potencial $V = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$ y la capacidad $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$.



Un plano: $E = \sigma / (2 \epsilon_0) = 564.7 \text{ N/C}$

Condensador (dentro): $E = \sigma / \epsilon_0 = 1129.4 \text{ N/C}$ (doble)

1.8 7. Errores típicos (los que cuestan puntos en el examen)

1. **Usar Gauss sin simetría.** La ley siempre vale, pero solo despejas E si puedes sacarlo de la integral. Sin simetría esférica/cilíndrica/plana, Gauss no te da E .

2. **Confundir Q_{enc} con Q_{total} .** Dentro de la esfera maciza solo encierras $Q r^3/R^3$, no todo Q . Siempre es la carga *dentro de la gaussiana*.
3. **Olvidar que las cargas exteriores no aportan flujo neto** (pero sí afectan a $\vec{E}$ punto a punto). El flujo total solo “ve” Q_{enc} .
4. **Meter las tapas/lateral que dan flujo cero.** En cilindro las tapas dan 0; en plano la lateral da 0. Identifica bien la $A_{\text{útil}}$.
5. **Plano: factor 2.** Un plano da $\sigma/2\varepsilon_0$; **entre placas** de un condensador es σ/ε_0 (se suman los dos planos). Confundirlos es el error clásico.
6. **No partir el espacio en regiones.** Esfera maciza $\rightarrow$ 2 zonas; corteza $\rightarrow$ 3 zonas. Cada región tiene su $Q_{\text{enc}}(r)$.
7. **Unidades / k vs ε_0 :** $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Mantén un solo sistema y revisa N/C.
8. **Continuidad/discontinuidad:** el campo es continuo al cruzar una distribución de volumen, pero **salta** al cruzar una densidad superficial σ (corteza/placa).

1.9 Resumen de fórmulas (chuleta)

Caso	Campo E	Forma
Carga puntual / esfera (fuera)	$\frac{kQ}{r^2}$	$\propto 1/r^2$
Esfera maciza (dentro)	$\frac{kQ}{R^3} r$	$\propto r$
Esfera hueca (hueco)	0	—
Hilo infinito / cilindro (fuera)	$\frac{2k\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$\propto 1/r$
Cilindro macizo (dentro)	$\frac{r}{\rho r}$	$\propto r$
Plano infinito	$\frac{2\varepsilon_0}{\sigma}$	uniforme
Condensador (entre placas)	$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	uniforme

Ley de Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$ · **Constante:** $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8,99 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$.

1.9.1 Conexiones (bóveda)

- Plan del bloque: [[00_PLAN_apuntes_fisica_II]]
- Tema previo: campo eléctrico y ley de Coulomb (Tema 1).
- Tema siguiente: potencial eléctrico ($\vec{E} = -\nabla V$).

Fuente: apuntes oficiales «Ley de Gauss» (Dpto. Física Aplicada III, GIERM 2023/2024) + desarrollo canónico estándar. Generado con Claude Code.