

Transformada de Laplace — Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Enunciado. Sea la función escalera $f(t) = \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ para $t \geq 0$, que vale 0 en $[0, 2)$, 1 en $[2, 4)$, 2 en $[4, 6)$, y así sucesivamente. Justifica que admite transformada de Laplace y calcula $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Ejercicio 2.1

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}\{(t-4)^5 u(t-4)\}$.

Ejercicio 2.2

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}\{u(t-3\pi) \cos(2t)\}$.

Ejercicio 2.3

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}\{t \cos(5t)\}$.

Ejercicio 2.4

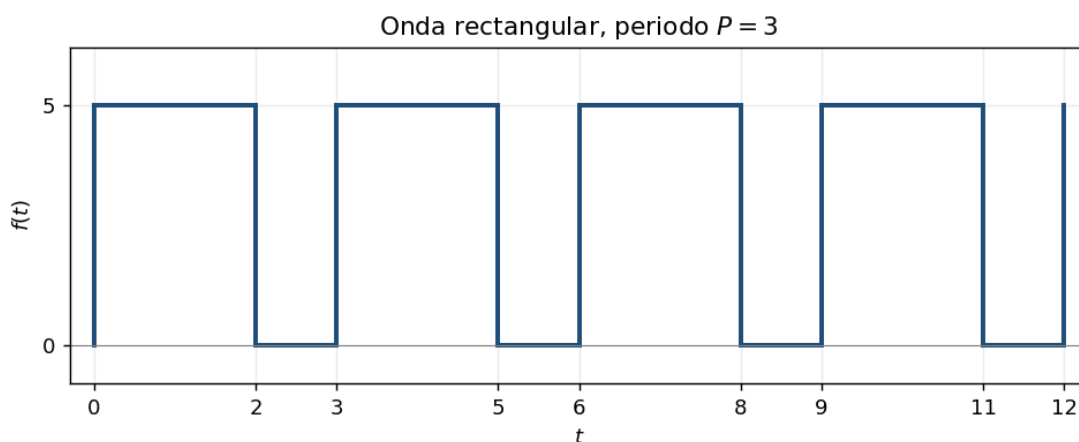
Enunciado. Calcula $\mathcal{L}\{e^{-3t} (3 \cos 2t + 2 \sin 2t)\}$.

Ejercicio 3.1

Enunciado. Sea $f(t)$ la onda rectangular de periodo $P = 3$ definida en un periodo por

$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < 2, \\ 0, & 2 < t < 3, \end{cases} \quad f(t+3) = f(t).$$

Su gráfica es



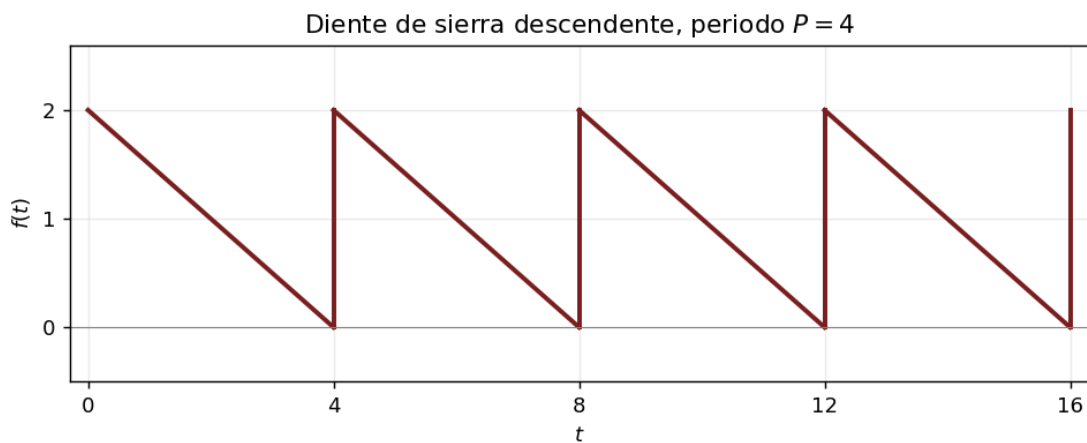
Dibuja varios periodos y calcula su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Ejercicio 3.2

Enunciado. Sea $f(t)$ el diente de sierra descendente de periodo $P = 4$ definido en un periodo por

$$f(t) = \frac{4-t}{2}, \quad 0 < t < 4, \quad f(t+4) = f(t),$$

de modo que decrece linealmente de 2 a 0 en cada periodo. Su gráfica es



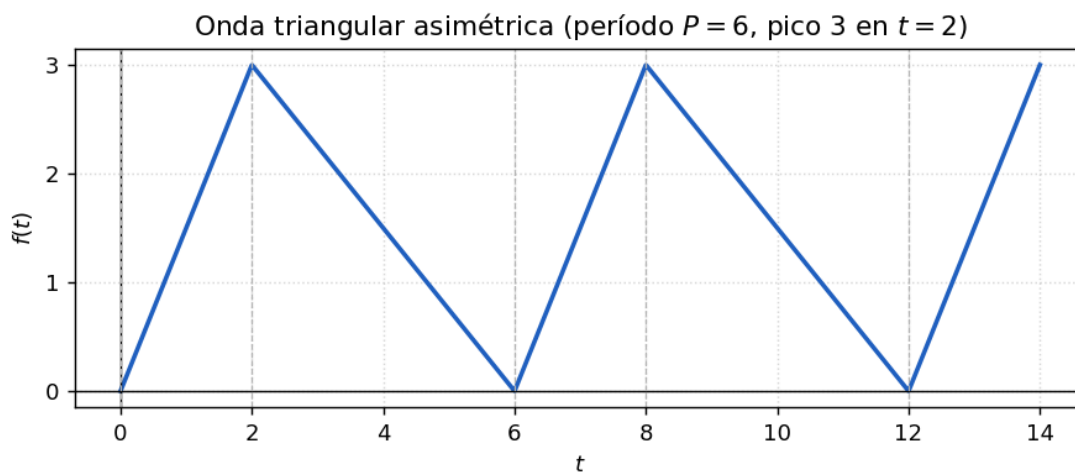
Dibuja varios periodos y calcula su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Ejercicio 3.3

Enunciado. Sea $f(t)$ la función periódica de período $P = 6$ cuya gráfica en un período es una onda triangular **asimétrica**: sube linealmente desde 0 hasta su valor máximo 3 en el intervalo $(0, 2)$ y baja linealmente de 3 a 0 en el intervalo $(2, 6)$. Es decir, en un período,

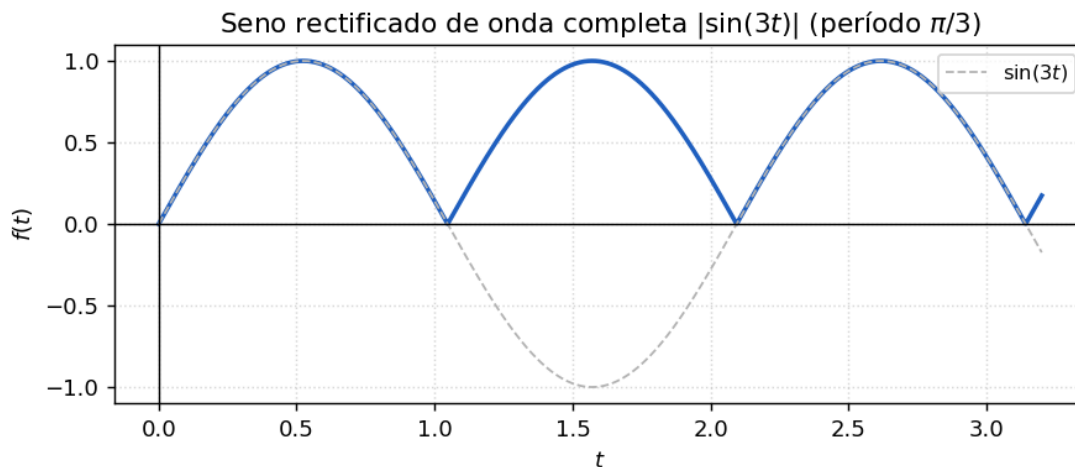
$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t, & 0 < t < 2, \\ \frac{3}{4}(6-t), & 2 < t < 6, \end{cases} \quad f(t+6) = f(t).$$

Dibuja la función y calcula su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.



Ejercicio 3.4

Enunciado. Sea $f(t) = |\sin(3t)|$, el seno rectificado de **onda completa** de frecuencia angular $\omega = 3$. Es una función periódica de período $P = \frac{\pi}{3}$ (la mitad del período de $\sin(3t)$, porque al tomar valor absoluto los semiciclos negativos se reflejan hacia arriba). Dibuja la función y calcula su transformada de Laplace.

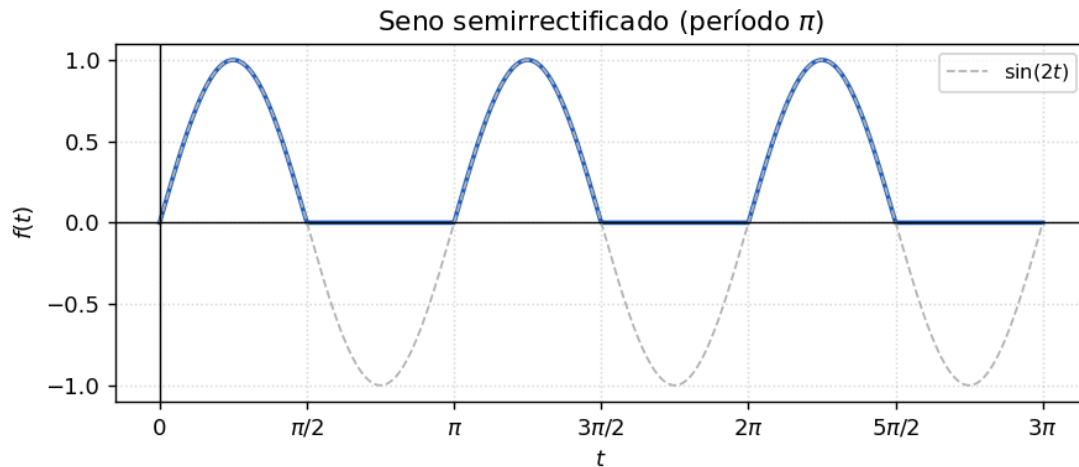


Ejercicio 3.5

Enunciado. Sea $f(t)$ el seno **semirrectificado** (rectificación de media onda) de $\sin(2t)$: coincide con $\sin(2t)$ mientras este es positivo y vale 0 en el resto. Su período es $T = \pi$ y en un período

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2t), & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases} \quad f(t + \pi) = f(t).$$

Dibuja la función y calcula su transformada de Laplace.



Ejercicio 4.1

Enunciado. Calcula la antitransformada $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^6} \right\}$.

Ejercicio 4.2

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s - 7}{s^2 + 9} \right\}$.

Ejercicio 4.3

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4 + 4s^2} \right\}$.

Ejercicio 4.4

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - 3)^2} \right\}$.

Ejercicio 4.5

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-5s}}{s} \right\}$.

Ejercicio 4.6

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2e^{-3s}}{s^2} \right\}$.

Ejercicio 4.7

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5e^{-2s}}{s+1} \right\}$.

Ejercicio 4.8

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 6s + 13} \right\}$.

Ejercicio 4.9

Enunciado. Sea $b > 0$ una constante. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b}{s(s+b)} \right\}$.

Ejercicio 4.10

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+2)(s^2+1)} \right\}$.

Ejercicio 5

Enunciado. Enuncia la propiedad de la transformada de Laplace de una integral y aplícala para calcular

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t \tau^2 e^{-3\tau} d\tau \right\}.$$

Ejercicio 6

Enunciado. Calcula la transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s+12}{s(s^2+4)} \right\}.$$

Ejercicio 7.1

Enunciado. Resuelve mediante la transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$y'' + 4y = 2t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

Ejercicio 7.2

Enunciado. Resuelve mediante la transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$y'' - 5y' + 6y = 12t + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Ejercicio 7.3

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valores iniciales

$$y'' - 4y' + 4y = 6t e^{2t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Ejercicio 7.4

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valores iniciales

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Ejercicio 7.5

Enunciado. Resuelve mediante la transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$y'' - 5y' + 4y = 4t^2 - 10t + 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5.$$

Ejercicio 8.1

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Ejercicio 8.2

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 9y = f(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad f(t) = \begin{cases} 4\pi - 2t, & 0 \leq t < 2\pi, \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Ejercicio 8.3

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 9y = \cos(3t) \left[1 - u\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

es decir, con forzado $\cos(3t)$ en el intervalo $(0, \frac{2\pi}{3})$ y nulo a partir de $t = \frac{2\pi}{3}$. Interpreta el comportamiento de la amplitud antes y después de que cese la excitación.

Ejercicio 8.4

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 4y' + 3y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2, \\ e^{-2t}, & t \geq 2. \end{cases}$$

Ejercicio 8.5

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 6y' + 8y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

Ejercicio 9

Enunciado. Resuelve el problema de valor inicial de primer orden con forzado cuadrático a trozos

$$y' + 2y = (4 - t^2) [1 - u(t - 2)], \quad y(0) = 1,$$

esto es, con término independiente $4 - t^2$ en $(0, 2)$ y nulo para $t > 2$. Comprueba el resultado por factor integrante.

Ejercicio 10.1

Enunciado. Resuelve la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente variable, mediante factor integrante (no por transformada de Laplace),

$$f'(t) + 2 \tan(t) f(t) = -2 \tan(t), \quad f(0) = 1,$$

en un entorno de $t = 0$. Deja la función f explícita.

Ejercicio 10.2

Enunciado. Sea $f(t) = \cos 2t$ la función obtenida en el apartado anterior. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial resonante a trozos

$$y'' + 4y = \cos 2t [1 - u(t - \pi)], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2,$$

con forzado $\cos 2t$ en $(0, \pi)$ y nulo después. Halla $y(7)$ con tres decimales.