

Transformada de Laplace — Soluciones

Ejercicio 1

Enunciado. Sea la función escalera $f(t) = \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ para $t \geq 0$, que vale 0 en $[0, 2)$, 1 en $[2, 4)$, 2 en $[4, 6)$, y así sucesivamente. Justifica que admite transformada de Laplace y calcula $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Existencia. La función f es seccionalmente continua (constante a trozos, con saltos de altura 1 en $t = 2, 4, 6, \dots$) y de orden exponencial, pues

$$0 \leq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \leq \frac{t}{2} \leq e^t, \quad t \geq 0.$$

Por tanto existe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > 0$.

Escritura como serie de escalones. Cada salto unitario ocurre en $t = 2n$, de modo que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u(t - 2n).$$

Transformar término a término. Por el segundo teorema de traslación, $\mathcal{L}\{u(t - 2n)\} = \frac{e^{-2ns}}{s}$, luego

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2ns}.$$

Suma geométrica. Con razón $x = e^{-2s}$, que cumple $|x| < 1$ para $s > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2ns} = \frac{e^{-2s}}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{e^{2s} - 1}.$$

Solución.

$$\mathcal{L}\left\{\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor\right\} = \frac{1}{s(e^{2s} - 1)}, \quad s > 0.$$

La forma cerrada muestra el carácter periódico del “diente” del salto: el factor $e^{2s} - 1$ codifica el paso 2 entre escalones.

Ejercicio 2.1

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}\{(t - 4)^5 u(t - 4)\}$.

Propiedad: segundo teorema de traslación. $\mathcal{L}\{g(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}G(s)$, con $g(t) = t^5$ y $a = 4$.

De tabla, $\mathcal{L}\{t^5\} = \frac{5!}{s^6} = \frac{120}{s^6}$.

Solución.

$$\mathcal{L}\{(t - 4)^5 u(t - 4)\} = \frac{120 e^{-4s}}{s^6}$$

Ejercicio 2.2

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}\{u(t-3\pi)\cos(2t)\}$.

Idea: preparar el desplazamiento por periodicidad. El segundo teorema de traslación requiere escribir la función como $g(t-a)u(t-a)$. Aquí $a = 3\pi$, pero el factor es $\cos(2t)$, no $\cos(2(t-3\pi))$. Usamos que $\cos(2t)$ tiene periodo π y que 6π es múltiplo de dicho periodo:

$$\cos(2(t-3\pi)) = \cos(2t-6\pi) = \cos(2t).$$

Aplicar el segundo teorema de traslación. Con $g(t) = \cos(2t)$ y $a = 3\pi$,

$$\mathcal{L}\{u(t-3\pi)\cos(2t)\} = e^{-3\pi s} \mathcal{L}\{\cos(2t)\} = e^{-3\pi s} \cdot \frac{s}{s^2+4}.$$

Solución.

$$\mathcal{L}\{u(t-3\pi)\cos(2t)\} = \frac{s e^{-3\pi s}}{s^2+4}$$

Ejercicio 2.3

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}\{t\cos(5t)\}$.

Propiedad: derivada de la transformada. $\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s)$, con $f(t) = \cos(5t)$ y $F(s) = \frac{s}{s^2+25}$.

Derivando,

$$F'(s) = \frac{(s^2+25) - s \cdot 2s}{(s^2+25)^2} = \frac{25-s^2}{(s^2+25)^2}.$$

Solución.

$$\mathcal{L}\{t\cos(5t)\} = -F'(s) = \frac{s^2-25}{(s^2+25)^2}$$

Ejercicio 2.4

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}\{e^{-3t}(3\cos 2t + 2\sin 2t)\}$.

Transformada del factor sin amortiguar. Con $g(t) = 3\cos 2t + 2\sin 2t$,

$$G(s) = 3 \cdot \frac{s}{s^2+4} + 2 \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{3s+4}{s^2+4}.$$

Propiedad: primer teorema de traslación. $\mathcal{L}\{e^{at}g(t)\} = G(s-a)$. Aquí $a = -3$, luego se sustituye $s \rightarrow s+3$:

$$G(s+3) = \frac{3(s+3)+4}{(s+3)^2+4} = \frac{3s+13}{s^2+6s+13},$$

donde el denominador aparece ya como el cuadrado completado $(s+3)^2+4$.

Solución.

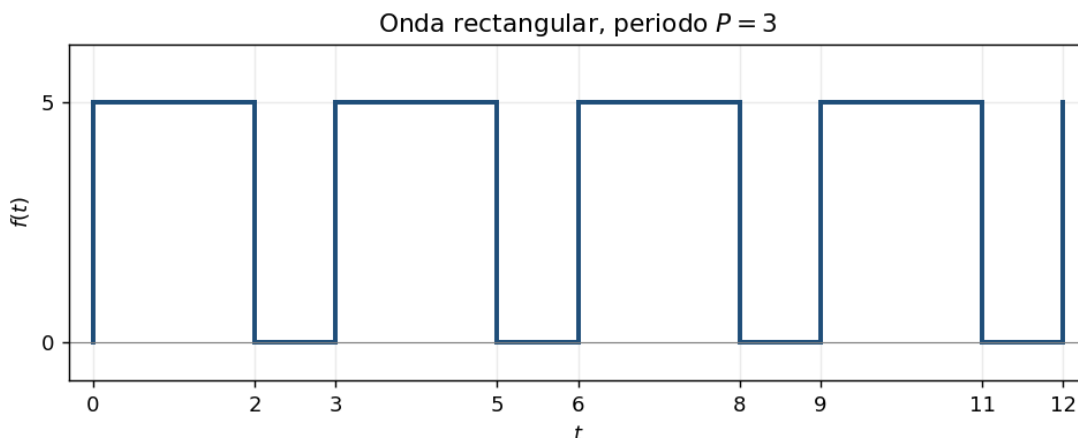
$$\mathcal{L}\{e^{-3t}(3\cos 2t + 2\sin 2t)\} = \frac{3s+13}{s^2+6s+13}$$

Ejercicio 3.1

Enunciado. Sea $f(t)$ la onda rectangular de periodo $P = 3$ definida en un periodo por

$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < 2, \\ 0, & 2 < t < 3, \end{cases} \quad f(t+3) = f(t).$$

Su gráfica es



Dibuja varios periodos y calcula su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Fórmula de la transformada de una función periódica. Si f es periódica de periodo P , entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t) dt.$$

Aquí $P = 3$, y en el primer periodo f solo es no nula en $(0, 2)$, donde vale 5.

Integral sobre un periodo. Como $f = 0$ en $(2, 3)$, la integral se reduce al tramo $(0, 2)$:

$$\int_0^3 e^{-st} f(t) dt = \int_0^2 5 e^{-st} dt = 5 \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^2 = \frac{5(1 - e^{-2s})}{s}.$$

Montaje de la fórmula. Dividiendo por $1 - e^{-Ps} = 1 - e^{-3s}$,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-3s}} \cdot \frac{5(1 - e^{-2s})}{s}.$$

Solución.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5(1 - e^{-2s})}{s(1 - e^{-3s})}$$

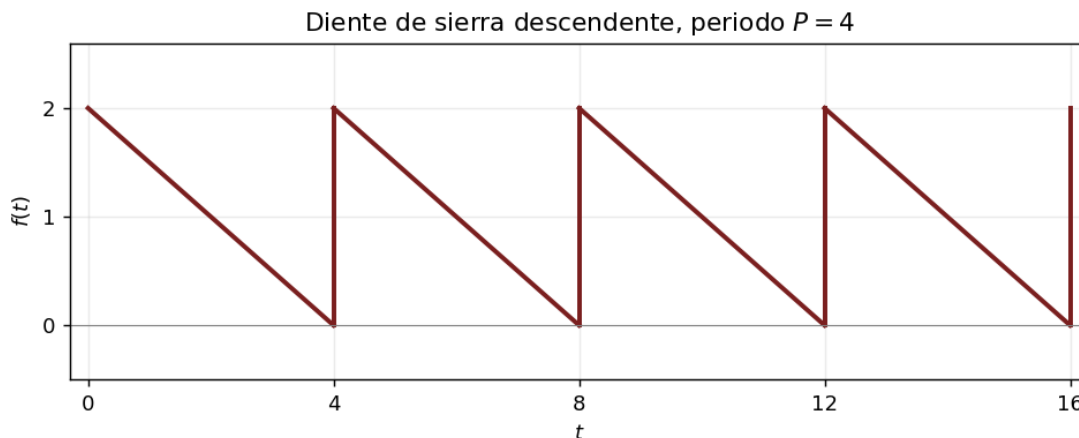
El factor $\frac{1}{1 - e^{-3s}}$ codifica la repetición periódica, mientras que $1 - e^{-2s}$ proviene del pulso de anchura 2 dentro del periodo. El cociente de anchuras $2/3$ es el ciclo de trabajo de la onda.

Ejercicio 3.2

Enunciado. Sea $f(t)$ el diente de sierra descendente de periodo $P = 4$ definido en un periodo por

$$f(t) = \frac{4-t}{2}, \quad 0 < t < 4, \quad f(t+4) = f(t),$$

de modo que decrece linealmente de 2 a 0 en cada periodo. Su gráfica es



Dibuja varios periodos y calcula su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Fórmula de la transformada de una función periódica. Con periodo $P = 4$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \int_0^4 e^{-st} \frac{4-t}{2} dt.$$

Integral sobre un periodo. Separando y usando integración por partes para el término con t ,

$$\int_0^4 4e^{-st} dt = \frac{4(1 - e^{-4s})}{s}, \quad \int_0^4 t e^{-st} dt = -\frac{4e^{-4s}}{s} + \frac{1 - e^{-4s}}{s^2}.$$

Por tanto

$$\int_0^4 e^{-st} (4-t) dt = \frac{4(1 - e^{-4s})}{s} + \frac{4e^{-4s}}{s} - \frac{1 - e^{-4s}}{s^2} = \frac{4}{s} - \frac{1 - e^{-4s}}{s^2},$$

y multiplicando por $\frac{1}{2}$,

$$\int_0^4 e^{-st} \frac{4-t}{2} dt = \frac{2}{s} - \frac{1 - e^{-4s}}{2s^2}.$$

Montaje de la fórmula. Dividiendo por $1 - e^{-4s}$,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \left(\frac{2}{s} - \frac{1 - e^{-4s}}{2s^2} \right) = \frac{2}{s(1 - e^{-4s})} - \frac{1}{2s^2}.$$

Solución.

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s(1 - e^{-4s})} - \frac{1}{2s^2}}$$

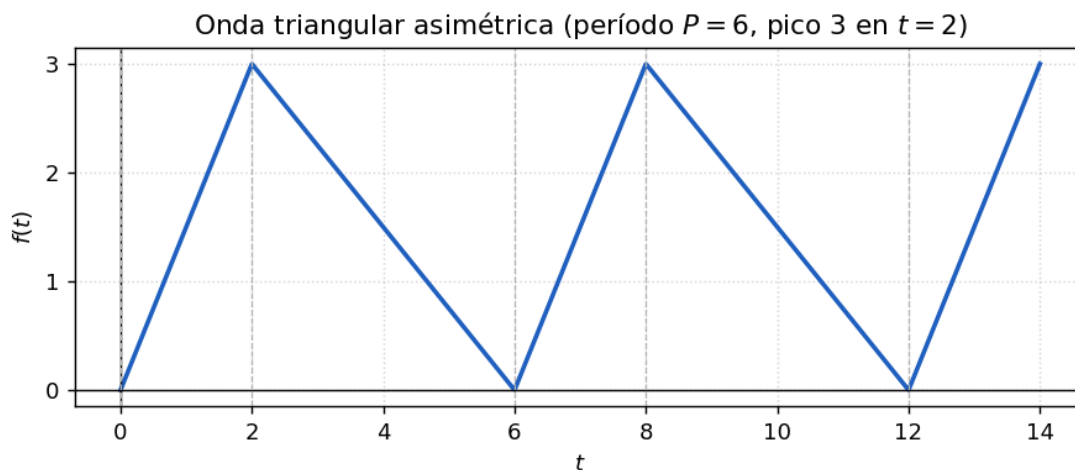
El término $\frac{1}{2s^2}$ recoge la pendiente $-\frac{1}{2}$ de cada rampa descendente, y el término periódico $\frac{2}{s(1 - e^{-4s})}$ reconstruye los saltos hacia arriba al inicio de cada periodo.

Ejercicio 3.3

Enunciado. Sea $f(t)$ la función periódica de período $P = 6$ cuya gráfica en un período es una onda triangular **asimétrica**: sube linealmente desde 0 hasta su valor máximo 3 en el intervalo $(0, 2)$ y baja linealmente de 3 a 0 en el intervalo $(2, 6)$. Es decir, en un período,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t, & 0 < t < 2, \\ \frac{3}{4}(6 - t), & 2 < t < 6, \end{cases} \quad f(t + 6) = f(t).$$

Dibuja la función y calcula su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.



Fórmula de la transformada de una función periódica. Si f es periódica de período P (y de orden exponencial), entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t) dt.$$

El factor $\frac{1}{1 - e^{-Ps}}$ suma la contribución de todos los períodos; basta integrar el primero. Aquí $P = 6$.

Integral del primer período por tramos. Al ser f lineal a trozos, separamos en los dos tramos:

$$I(s) = \int_0^6 e^{-st} f(t) dt = \underbrace{\int_0^2 e^{-st} \frac{3}{2}t dt}_{I_1} + \underbrace{\int_2^6 e^{-st} \frac{3}{4}(6 - t) dt}_{I_2}.$$

Primer tramo (subida). Usando $\int t e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2}$,

$$I_1 = \frac{3}{2} \left[-\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2} \right]_0^2 = \frac{3}{2s^2} (1 - (2s+1)e^{-2s}).$$

Segundo tramo (bajada). Con $\int (6-t) e^{-st} dt = \frac{e^{-st}(st-6s+1)}{s^2}$,

$$I_2 = \frac{3}{4} \left[\frac{e^{-st}(st-6s+1)}{s^2} \right]_2^6 = \frac{3}{4s^2} (e^{-6s} - (1-4s)e^{-2s}).$$

Suma de los dos tramos. Sacando factor común $\frac{3}{4s^2}$ y agrupando los términos en e^{-2s} (aquí conviene vigilar el signo: $-2(2s+1) - (1-4s) = -3$, luego los términos en s se cancelan):

$$I(s) = \frac{3}{4s^2} (2 - 3e^{-2s} + e^{-6s}).$$

Transformada. Dividiendo por $1 - e^{-6s}$,

$$F(s) = \frac{3(2 - 3e^{-2s} + e^{-6s})}{4s^2(1 - e^{-6s})}.$$

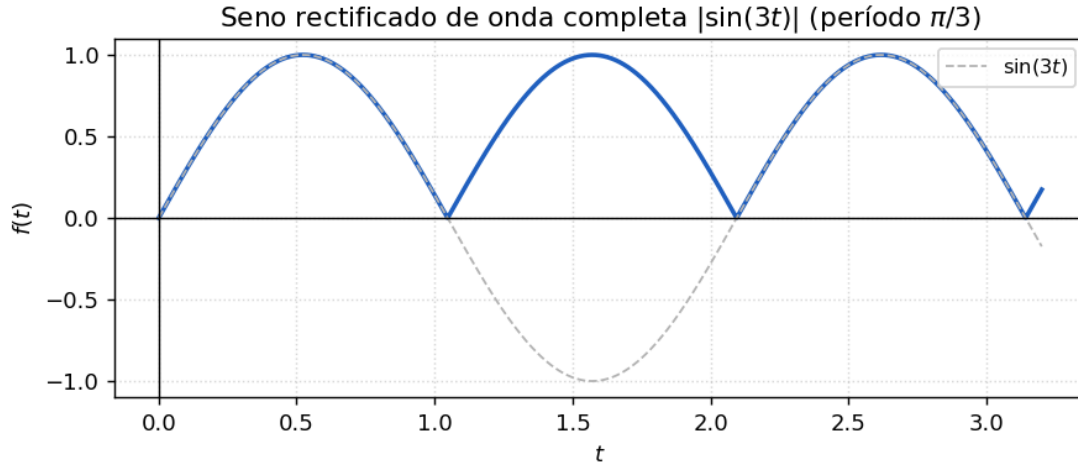
Solución.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3(2 - 3e^{-2s} + e^{-6s})}{4s^2(1 - e^{-6s})}$$

Como comprobación, al evaluar numéricamente en $s = 0.7$ se obtiene $F(0.7) \approx 1.9816$, que coincide con integrar directamente $\int_0^\infty e^{-0.7t} f(t) dt$. La aparición de $\frac{1}{s^2}$ es coherente con que f está formada por rampas, y el numerador solo contiene exponenciales que marcan los vértices $t = 2$ y $t = 6$ del período.

Ejercicio 3.4

Enunciado. Sea $f(t) = |\sin(3t)|$, el seno rectificado de **onda completa** de frecuencia angular $\omega = 3$. Es una función periódica de período $P = \frac{\pi}{3}$ (la mitad del período de $\sin(3t)$, porque al tomar valor absoluto los semiciclos negativos se reflejan hacia arriba). Dibuja la función y calcula su transformada de Laplace.



Período efectivo. El seno $\sin(3t)$ tiene período $\frac{2\pi}{3}$, pero al rectificar en onda completa cada semiciclo negativo se convierte en uno positivo idéntico al anterior, de modo que $f(t) = |\sin(3t)|$ repite su forma cada $P = \frac{\pi}{3}$. En el intervalo $(0, \pi/3)$ se tiene $\sin(3t) \geq 0$, así que allí $f(t) = \sin(3t)$.

Fórmula de la transformada de una función periódica.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t) dt, \quad P = \frac{\pi}{3}.$$

Integral del período. Con $\int_0^a e^{-st} \sin(\omega t) dt = \frac{\omega - e^{-sa}(s \sin(\omega a) + \omega \cos(\omega a))}{s^2 + \omega^2}$ y $\omega = 3$, $a = \pi/3$, de modo que $\omega a = \pi$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$:

$$I(s) = \int_0^{\pi/3} e^{-st} \sin(3t) dt = \frac{3 - e^{-\pi s/3}(0 - 3)}{s^2 + 9} = \frac{3(1 + e^{-\pi s/3})}{s^2 + 9}.$$

Transformada. Sustituyendo,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-\pi s/3}} \cdot \frac{3(1 + e^{-\pi s/3})}{s^2 + 9} = \frac{3}{s^2 + 9} \cdot \frac{1 + e^{-\pi s/3}}{1 - e^{-\pi s/3}}.$$

Simplificación con la cotangente hiperbólica. Multiplicando numerador y denominador de la última fracción por $e^{\pi s/6}$ y usando $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

$$\frac{1 + e^{-\pi s/3}}{1 - e^{-\pi s/3}} = \frac{e^{\pi s/6} + e^{-\pi s/6}}{e^{\pi s/6} - e^{-\pi s/6}} = \coth\left(\frac{\pi s}{6}\right).$$

Solución.

$$\boxed{\mathcal{L}\{|\sin(3t)|\} = \frac{3}{s^2 + 9} \coth\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

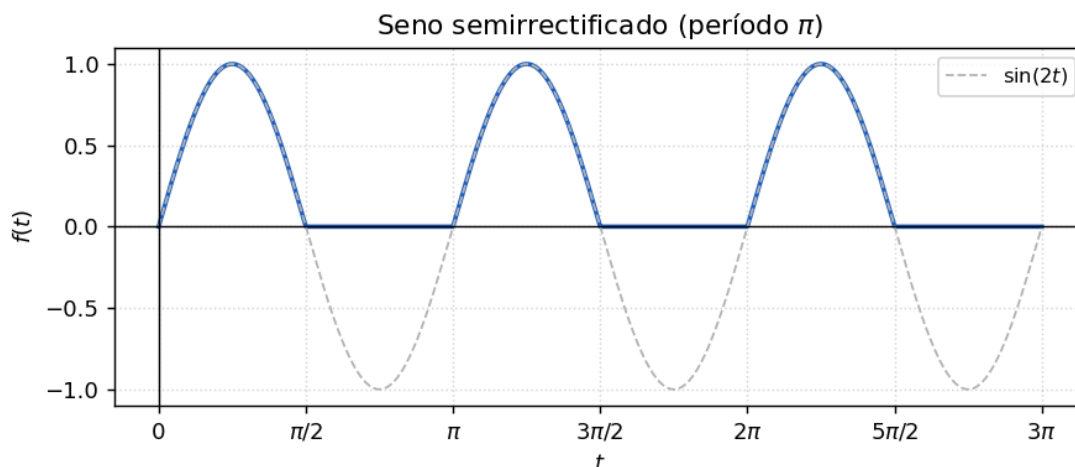
Esto generaliza $\mathcal{L}\{|\sin(\omega t)|\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth\left(\frac{\pi s}{2\omega}\right)$. La aparición de $\coth$ es la firma de las funciones rectificadas: para s grande $\coth(\pi s/6) \rightarrow 1$ y $F(s)$ se comporta como la transformada de un solo pulso de seno. Evaluando en $s = 1.4$ resulta $F(1.4) \approx 0.4380$, en acuerdo con la integral directa.

Ejercicio 3.5

Enunciado. Sea $f(t)$ el seno **semirrectificado** (rectificación de media onda) de $\sin(2t)$: coincide con $\sin(2t)$ mientras este es positivo y vale 0 en el resto. Su período es $T = \pi$ y en un período

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2t), & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases} \quad f(t + \pi) = f(t).$$

Dibuja la función y calcula su transformada de Laplace.



Fórmula de la transformada de una función periódica. Con período $T = \pi$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} f(t) dt.$$

El tramo $(\pi/2, \pi)$ no aporta nada porque allí $f \equiv 0$; solo integramos el semiciclo positivo $(0, \pi/2)$.

Integral del período. Usando $\int_0^a e^{-st} \sin(\omega t) dt = \frac{\omega - e^{-sa}(s \sin(\omega a) + \omega \cos(\omega a))}{s^2 + \omega^2}$ con $\omega = 2$, $a = \pi/2$, luego $\omega a = \pi$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$:

$$I(s) = \int_0^{\pi/2} e^{-st} \sin(2t) dt = \frac{2 - e^{-\pi s/2}(0 - 2)}{s^2 + 4} = \frac{2(1 + e^{-\pi s/2})}{s^2 + 4}.$$

Transformada. Sustituyendo,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \cdot \frac{2(1 + e^{-\pi s/2})}{s^2 + 4}.$$

Factorización de la diferencia de cuadrados. El denominador $1 - e^{-\pi s}$ es una diferencia de cuadrados en $e^{-\pi s/2}$:

$$1 - e^{-\pi s} = (1 - e^{-\pi s/2})(1 + e^{-\pi s/2}),$$

y el factor $1 + e^{-\pi s/2}$ se cancela con el del numerador (aquí está el error típico: olvidar esta cancelación y dejar la respuesta más complicada de lo necesario):

$$F(s) = \frac{2}{(s^2 + 4)(1 - e^{-\pi s/2})}.$$

Solución.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{(s^2 + 4)(1 - e^{-\pi s/2})}$$

A diferencia de la onda completa, la media onda deja un factor $\frac{1}{1 - e^{-\pi s/2}}$ (no un coth), reflejo de que el período contiene un semiciclo de seno seguido de un tramo nulo. Evaluando en $s = 1.2$ se obtiene $F(1.2) \approx 0.4335$, coherente con la integral directa.

Ejercicio 4.1

Enunciado. Calcula la antitransformada $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\}$.

Tabla: potencias. Se usa $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, de donde $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$.

Aquí $n + 1 = 6$, luego $n = 5$ y $5! = 120$.

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\} = \frac{t^5}{120}$$

Ejercicio 4.2

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-7}{s^2+9}\right\}$.

Separar en coseno y seno. Con $\omega = 3$ se tiene $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos 3t$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = \sin 3t$.

Se descompone el cociente:

$$\frac{2s-7}{s^2+9} = 2 \frac{s}{s^2+9} - \frac{7}{3} \frac{3}{s^2+9}.$$

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-7}{s^2+9}\right\} = 2 \cos 3t - \frac{7}{3} \sin 3t$$

Ejercicio 4.3

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+4s^2}\right\}$.

Factorizar y descomponer en fracciones parciales. Como $s^4 + 4s^2 = s^2(s^2 + 4)$, se plantea

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s^2} + \frac{Bs+C}{s^2+4}.$$

Multiplicando por $s^2(s^2 + 4)$: $1 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)s^2$. Igualando coeficientes se obtiene $A = \frac{1}{4}$, $B = 0$, $A + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$. Así:

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{s^2 + 4}.$$

Antitransformar. Con $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$ y $\mathcal{L}^{-1}\{2/(s^2 + 4)\} = \sin 2t$:

$$\frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 + 4s^2}\right\} = \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t$$

Ejercicio 4.4

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}$.

Tabla con traslación en s . Se usa $\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$, es decir $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2}\right\} = te^{at}$.

Aquí $a = 3$.

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = te^{3t}$$

Ejercicio 4.5

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s}\right\}$.

Segundo teorema de traslación (inverso). Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$.

Con $F(s) = \frac{1}{s}$ se tiene $f(t) = 1$ y $a = 5$.

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s}\right\} = u(t-5)$$

Ejercicio 4.6

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{s^2}\right\}$.

Segundo teorema de traslación (inverso). Con $F(s) = \frac{2}{s^2}$ se tiene $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{2/s^2\} = 2t$ y factor de desplazamiento $a = 3$.

Por tanto $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-3s}F(s)\} = f(t-3)u(t-3) = 2(t-3)u(t-3)$.

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2e^{-3s}}{s^2} \right\} = 2(t-3)u(t-3)$$

Ejercicio 4.7

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5e^{-2s}}{s+1} \right\}$.

Segundo teorema de traslación (inverso). Con $F(s) = \frac{5}{s+1}$ se tiene $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s+1} \right\} = 5e^{-t}$ y desplazamiento $a = 2$.

Entonces $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\} = f(t-2)u(t-2) = 5e^{-(t-2)}u(t-2)$.

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5e^{-2s}}{s+1} \right\} = 5e^{-(t-2)}u(t-2)$$

Ejercicio 4.8

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 6s + 13} \right\}$.

Completar el cuadrado. El denominador es $s^2 + 6s + 13 = (s+3)^2 + 4$, con parte real -3 y frecuencia $\omega = 2$.

Ajustar el numerador a $s+3$. Se escribe $s = (s+3) - 3$:

$$\frac{s}{(s+3)^2 + 4} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4} - \frac{3}{(s+3)^2 + 4}.$$

Antitransformar con traslación en s . Usando $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4} \right\} = e^{-3t} \cos 2t$ y

$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+3)^2 + 4} \right\} = e^{-3t} \sin 2t$:

$$e^{-3t} \cos 2t - \frac{3}{2} e^{-3t} \sin 2t.$$

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 6s + 13} \right\} = e^{-3t} \left(\cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t \right)$$

Ejercicio 4.9

Enunciado. Sea $b > 0$ una constante. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b}{s(s+b)} \right\}$.

Fracciones parciales (dos polos reales). Se descompone

$$\frac{b}{s(s+b)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+b}.$$

Tapando polos: $A = \frac{b}{s+b} \Big|_{s=0} = 1$ y $B = \frac{b}{s} \Big|_{s=-b} = -1$. Así $\frac{b}{s(s+b)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+b}$.

Antitransformar. Con $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ y $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+b)\} = e^{-bt}$.

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b}{s(s+b)} \right\} = 1 - e^{-bt}$$

Ejercicio 4.10

Enunciado. Calcula $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+2)(s^2+1)} \right\}$.

Fracciones parciales (polo real + par complejo). Se plantea

$$\frac{2}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}.$$

Multiplicando: $2 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+2)$. En $s = -2$: $2 = 5A \Rightarrow A = \frac{2}{5}$. Igualando coeficientes de s^2 : $A+B=0 \Rightarrow B = -\frac{2}{5}$; de s^1 : $2B+C=0 \Rightarrow C = \frac{4}{5}$.

Antitransformar. Se separa el par complejo en coseno y seno:

$$\frac{2}{5} \frac{1}{s+2} - \frac{2}{5} \frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{5} \frac{1}{s^2+1}.$$

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+2)(s^2+1)} \right\} = \frac{2}{5} e^{-2t} - \frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \sin t$$

Ejercicio 5

Enunciado. Enuncia la propiedad de la transformada de Laplace de una integral y aplícala para calcular

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t \tau^2 e^{-3\tau} d\tau \right\}.$$

Propiedad: transformada de una integral. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Aquí el integrando es $f(t) = t^2 e^{-3t}$.

Transformada del integrando. Por el primer teorema de traslación, $\mathcal{L}\{e^{-3t}g(t)\} = G(s+3)$ con $g(t) = t^2$, y como $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$,

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}\} = \frac{2}{(s+3)^3}.$$

Aplicación de la propiedad. Dividiendo entre s ,

Solución.

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t \tau^2 e^{-3\tau} d\tau \right\} = \frac{2}{s(s+3)^3}$$

Ejercicio 6

Enunciado. Calcula la transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s+12}{s(s^2+4)} \right\}.$$

Descomposición en fracciones simples. El denominador tiene un polo en $s = 0$ y el par complejo de $s^2 + 4$, así que

$$\frac{4s+12}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}.$$

Multiplicando por $s(s^2+4)$: $4s+12 = A(s^2+4) + (Bs+C)s$. Igualando coeficientes,

$$s^2 : A+B=0, \quad s^1 : C=4, \quad s^0 : 4A=12.$$

De aquí $A=3$, $B=-3$ y $C=4$, es decir

$$\frac{4s+12}{s(s^2+4)} = \frac{3}{s} + \frac{-3s+4}{s^2+4}.$$

Antitransformada término a término. Usando $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+4)\} = \cos 2t$ y $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+4)\} = \frac{1}{2} \sin 2t$,

Solución.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s+12}{s(s^2+4)} \right\} = 3 - 3 \cos 2t + 2 \sin 2t$$

El término constante procede del polo en $s = 0$ y la parte oscilatoria del par complejo.

Ejercicio 7.1

Enunciado. Resuelve mediante la transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$y'' + 4y = 2t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

Transformar la ecuación. Con $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ y las condiciones iniciales,

$$(s^2+4)Y(s) - 3s + 1 = \frac{2}{s^2}.$$

Despejando,

$$Y(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)} + \frac{3s-1}{s^2+4}.$$

Fracciones simples. Como $\frac{2}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+4}$, antitransformando cada término,

$$y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t + 3 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Solución.

$$y(t) = \frac{t}{2} + 3 \cos 2t - \frac{3}{4} \sin 2t$$

Ejercicio 7.2

Enunciado. Resuelve mediante la transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$y'' - 5y' + 6y = 12t + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Transformar la ecuación. Con las condiciones iniciales,

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) - (s \cdot 0 + 1) + 5 \cdot 0 = \frac{12}{s^2} + \frac{2}{s},$$

y como $s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3)$,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)} + \frac{12+2s}{s^2(s-2)(s-3)}.$$

Fracciones simples. Reuniéndolo todo sobre $s^2(s-2)(s-3)$ y descomponiendo,

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{5}{s-2} + \frac{3}{s-3}.$$

El bloque $\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}$ corresponde a la solución particular polinómica $y_p = 2t + 2$, y los polos en $s = 2, 3$ a la parte homogénea.

Antitransformar.

Solución.

$$y(t) = 2t + 2 - 5e^{2t} + 3e^{3t}$$

Ejercicio 7.3

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valores iniciales

$$y'' - 4y' + 4y = 6te^{2t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Transformada de la ecuación. Aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros y usamos la propiedad de la transformada de la derivada, $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$ y $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$, con $Y = \mathcal{L}\{y\}$. Con $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1$,

$$(s^2Y - 2s - 1) - 4(sY - 2) + 4Y = \mathcal{L}\{6te^{2t}\}.$$

Segundo miembro. Por el primer teorema de traslación, $\mathcal{L}\{t e^{2t}\} = \frac{1}{(s-2)^2}$, de modo que $\mathcal{L}\{6t e^{2t}\} = \frac{6}{(s-2)^2}$. Agrupando el lado izquierdo, el polinomio característico es $s^2 - 4s + 4 = (s-2)^2$, que tiene la raíz **doble** $s = 2$. Justamente esa raíz coincide con el exponente del forzado e^{2t} : ahí está la resonancia. Reuniendo términos,

$$(s-2)^2 Y - 2s + 7 = \frac{6}{(s-2)^2}.$$

Despeje de $Y(s)$.

$$Y(s) = \frac{6}{(s-2)^4} + \frac{2s-7}{(s-2)^2}.$$

El primer sumando es la firma de la resonancia: al dividir el forzado $\frac{6}{(s-2)^2}$ entre el operador $(s-2)^2$ aparece $(s-2)$ **elevado a la cuarta** en el denominador. Cuanto mayor es la potencia, mayor será el grado del polinomio en t que multiplica a e^{2t} .

Descomposición en fracciones simples. El segundo sumando se escribe en potencias de $(s-2)$. Como $2s-7 = 2(s-2) - 3$,

$$\frac{2s-7}{(s-2)^2} = \frac{2}{s-2} - \frac{3}{(s-2)^2}.$$

Un error habitual es intentar antitransformar $\frac{2s-7}{(s-2)^2}$ directamente; conviene desplazar el numerador a la variable $s-2$ antes de usar la tabla.

Antitransformada. Con $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-2)^{n+1}}\right\} = t^n e^{2t}$ (primer teorema de traslación aplicado a $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s-2)^4}\right\} = 6 \cdot \frac{t^3}{3!} e^{2t} = t^3 e^{2t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-2}\right\} = 2e^{2t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2}\right\} = 3t e^{2t}.$$

Sumando las tres contribuciones,

$$y(t) = t^3 e^{2t} + 2e^{2t} - 3t e^{2t}.$$

Solución.

$y(t) = (t^3 - 3t + 2) e^{2t}$

El término $t^3 e^{2t}$ es **secular**: nace de la resonancia y crece más deprisa que el propio modo natural e^{2t} . Al coincidir el forzado $6t e^{2t}$ con las funciones propias e^{2t} y $t e^{2t}$ de la raíz doble, la respuesta no puede quedarse en el mismo grado que la excitación y sube dos unidades de potencia en t , hasta t^3 . Se comprueba que $y(0) = 2$ y, derivando, $y'(0) = 1$, como exigían los datos iniciales.

Ejercicio 7.4

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valores iniciales

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Transformada de la ecuación. Aplicamos la transformada de Laplace y la propiedad de la derivada, $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$ y $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$, con $Y = \mathcal{L}\{y\}$. Con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$,

$$(s^2Y - s) + 2(sY - 1) + 5Y = \mathcal{L}\{e^{-t} \sin 2t\}.$$

Segundo miembro. Partiendo de $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$ y aplicando el primer teorema de traslación (sustituir s por $s + 1$),

$$\mathcal{L}\{e^{-t} \sin 2t\} = \frac{2}{(s + 1)^2 + 4}.$$

El polinomio característico es $s^2 + 2s + 5$. **Completando el cuadrado**, $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4$, cuyas raíces son $s = -1 \pm 2i$. Esa frecuencia amortiguada $e^{-t} \sin 2t$ es exactamente un modo propio del sistema: de nuevo hay resonancia, ahora sobre un par complejo conjugado.

Despeje de $Y(s)$. Agrupando y usando $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4$,

$$((s + 1)^2 + 4)Y - s - 2 = \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} \implies Y(s) = \frac{2}{((s + 1)^2 + 4)^2} + \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4}.$$

El denominador **elevado al cuadrado** del primer sumando es la marca de la resonancia compleja: al dividir el forzado entre el operador $(s + 1)^2 + 4$ aparece el mismo bloque al cuadrado, y de ahí saldrá un factor t multiplicando a las oscilaciones.

Parte no resonante. Escribimos el numerador del segundo sumando en la variable $s + 1$: como $s + 2 = (s + 1) + 1$,

$$\frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 4}.$$

Por el primer teorema de traslación, con $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} = \cos 2t$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} = \sin 2t$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4}\right\} = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

Parte resonante. Para el primer sumando usamos la antitransformada de la potencia doble, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}\right\} = \frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$, con $\omega = 2$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 4)^2}\right\} = \frac{1}{16}(\sin 2t - 2t \cos 2t).$$

Multiplicando por 2 y aplicando el desplazamiento e^{-t} (por el factor $(s + 1)$ en lugar de s),

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{((s + 1)^2 + 4)^2}\right\} = e^{-t} \cdot \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t \cos 2t).$$

Suma de contribuciones.

$$y(t) = e^{-t} \left[\frac{1}{8} \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t + \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right].$$

Solución.

$$y(t) = e^{-t} \left[\left(1 - \frac{t}{4} \right) \cos 2t + \frac{5}{8} \sin 2t \right]$$

El término secular es $-\frac{t}{4} e^{-t} \cos 2t$: la resonancia introduce un factor t que multiplica a la oscilación. Aquí el amortiguamiento e^{-t} acaba dominando, así que la solución tiende a cero, pero antes de extinguirse la amplitud recibe el empuje lineal en t propio de la excitación en fase con el modo propio. Se verifica que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, de acuerdo con los datos iniciales.

Ejercicio 7.5

Enunciado. Resuelve mediante la transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$y'' - 5y' + 4y = 4t^2 - 10t + 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5.$$

Transformar la ecuación. Con $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$,

$$(s^2 - 5s + 4)Y(s) - (2s + 5) + 5 \cdot 2 = \frac{8}{s^3} - \frac{10}{s^2} + \frac{2}{s}.$$

Como $s^2 - 5s + 4 = (s - 1)(s - 4)$,

$$Y(s) = \frac{2s - 5}{(s - 1)(s - 4)} + \frac{1}{(s - 1)(s - 4)} \left(\frac{8}{s^3} - \frac{10}{s^2} + \frac{2}{s} \right).$$

Fracciones simples. Agrupando y descomponiendo se llega a

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s - 4},$$

donde $\frac{2}{s^3}$ da la solución particular $y_p = t^2$ y los polos en $s = 1, 4$ la parte homogénea.

Antitransformar. Usando $\mathcal{L}^{-1}\{2/s^3\} = t^2$ y $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s - a)\} = e^{at}$,

Solución.

$$y(t) = t^2 + e^t + e^{4t}$$

Ejercicio 8.1

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Reescritura del forzado con la función escalón. El pulso rampa se expresa con el escalón unitario $u(t - 1)$ como

$$f(t) = 4t [1 - u(t - 1)] = 4t - 4t u(t - 1).$$

Para poder aplicar el segundo teorema de traslación, el término desplazado debe depender de $t - 1$; escribimos $4t = 4(t - 1) + 4$, de modo que

$$f(t) = 4t - 4(t - 1)u(t - 1) - 4u(t - 1).$$

Transformada del forzado. Por el segundo teorema de traslación $\mathcal{L}\{g(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}G(s)$, con $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$ y $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$,

$$F(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{4e^{-s}}{s^2} - \frac{4e^{-s}}{s}.$$

Transformada de la ecuación. Aplicando $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$ con $y(0) = 1$,

$$(s+2)Y(s) = 1 + F(s) \implies Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{4}{s^2(s+2)} - e^{-s} \left[\frac{4}{s^2(s+2)} + \frac{4}{s(s+2)} \right].$$

Fracciones simples.

$$\frac{4}{s^2(s+2)} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2}, \quad \frac{4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2}.$$

La suma que multiplica a e^{-s} tiene antitransformada

$$g(t) = (-1 + 2t + e^{-2t}) + (2 - 2e^{-2t}) = 1 + 2t - e^{-2t}.$$

Antitransformación y segundo teorema de traslación. El término con e^{-s} produce $g(t-1)u(t-1)$:

$$y(t) = e^{-2t} + (-1 + 2t + e^{-2t}) - [1 + 2(t-1) - e^{-2(t-1)}]u(t-1).$$

Solución.

$$y(t) = 2t - 1 + 2e^{-2t} - u(t-1)[2(t-1) + 1 - e^{-2(t-1)}]$$

En el primer tramo $0 \leq t < 1$ la respuesta sigue la rampa forzada, $y(t) = 2t - 1 + 2e^{-2t}$; al cesar el forzado en $t = 1$ el sistema decae exponencialmente y, para $t \geq 1$, se simplifica a $y(t) = (2 + e^2)e^{-2t}$. La solución y su derivada son continuas en $t = 1$.

Ejercicio 8.2

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 9y = f(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad f(t) = \begin{cases} 4\pi - 2t, & 0 \leq t < 2\pi, \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Reescritura del forzado con la función escalón. La rampa se anula justo en el instante de conmutación, pues $4\pi - 2t = -2(t - 2\pi)$. Por ello

$$f(t) = (4\pi - 2t)[1 - u(t - 2\pi)] = (4\pi - 2t) + 2(t - 2\pi)u(t - 2\pi),$$

donde ya hemos expresado el término desplazado en función de $t - 2\pi$, listo para el segundo teorema de traslación.

Transformada del forzado. Con $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$ y $\mathcal{L}\{g(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}G(s)$,

$$F(s) = \frac{4\pi}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{2e^{-2\pi s}}{s^2}.$$

Transformada de la ecuación. Como $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2s - 1$,

$$(s^2 + 9)Y(s) = 2s + 1 + F(s) \implies Y(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 9} + \frac{4\pi}{s(s^2 + 9)} - \frac{2}{s^2(s^2 + 9)} + \frac{2e^{-2\pi s}}{s^2(s^2 + 9)}.$$

Fracciones simples. Usando

$$\frac{1}{s(s^2 + 9)} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 9} \right), \quad \frac{1}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 9} \right),$$

la parte no retardada antitransforma a

$$2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{4\pi}{9} (1 - \cos 3t) - \frac{2}{9} \left(t - \frac{1}{3} \sin 3t \right) = \frac{18 - 4\pi}{9} \cos 3t + \frac{11}{27} \sin 3t + \frac{4\pi}{9} - \frac{2t}{9}.$$

Segundo teorema de traslación. El término con $e^{-2\pi s}$ genera la respuesta retardada

$$\frac{2}{s^2(s^2 + 9)} \mapsto \frac{2}{9} \left[(t - 2\pi) - \frac{1}{3} \sin(3(t - 2\pi)) \right] u(t - 2\pi).$$

Solución.

$$y(t) = \frac{18 - 4\pi}{9} \cos 3t + \frac{11}{27} \sin 3t + \frac{4\pi}{9} - \frac{2t}{9} + u(t - 2\pi) \left[\frac{2}{9} (t - 2\pi) - \frac{2}{27} \sin(3(t - 2\pi)) \right]$$

Como $\sin(3(t - 2\pi)) = \sin 3t$, para $t \geq 2\pi$ la solución se reduce a la oscilación libre $y(t) = \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{18 - 4\pi}{9} \cos 3t$: al desaparecer la rampa el sistema queda oscilando a su frecuencia natural $\omega = 3$. La solución y su derivada son continuas en $t = 2\pi$.

Ejercicio 8.3

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 9y = \cos(3t) \left[1 - u\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

es decir, con forzado $\cos(3t)$ en el intervalo $(0, \frac{2\pi}{3})$ y nulo a partir de $t = \frac{2\pi}{3}$. Interpreta el comportamiento de la amplitud antes y después de que cese la excitación.

Planteamiento del forzado a trozos. El término independiente se escribe con la función escalón como

$$f(t) = \cos(3t) - \cos(3t) u\left(t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Como $\cos(3t)$ tiene periodo $\frac{2\pi}{3}$, se cumple $\cos(3t) = \cos(3(t - \frac{2\pi}{3}))$, lo que permite aplicar el segundo teorema de traslación al segundo sumando sin residuos.

Transformada de la ecuación. Con $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ y las condiciones $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

$$(s^2 + 9)Y - s = \frac{s}{s^2 + 9} \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{3}s} \right).$$

Despejando,

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{s}{(s^2 + 9)^2} \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{3}s} \right).$$

Antitransformada y resonancia. De la tabla, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+9}\} = \cos 3t$. El núcleo de la resonancia es

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+9)^2}\right\} = \frac{t}{6} \sin 3t,$$

que aparece porque el forzado $\cos 3t$ oscila justo a la frecuencia natural $\omega = 3$: el denominador $(s^2+9)^2$ elevado al cuadrado genera el factor t que hace crecer la amplitud. Aplicando el segundo teorema de traslación al término con $e^{-\frac{2\pi}{3}s}$, y usando $\sin(3(t - \frac{2\pi}{3})) = \sin 3t$,

$$y(t) = \cos 3t + \frac{t}{6} \sin 3t - \frac{t - \frac{2\pi}{3}}{6} \sin(3t) u(t - \frac{2\pi}{3}).$$

Lectura por tramos. Para $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ actúa la excitación resonante y la amplitud crece de forma lineal, $y = \cos 3t + \frac{t}{6} \sin 3t$. Para $t > \frac{2\pi}{3}$ los dos términos con factor t se cancelan y queda una oscilación de amplitud congelada.

Solución.

$$y(t) = \cos 3t + \frac{t}{6} \sin 3t - \frac{t - \frac{2\pi}{3}}{6} \sin(3t) u(t - \frac{2\pi}{3}) = \begin{cases} \cos 3t + \frac{t}{6} \sin 3t, & 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \cos 3t + \frac{\pi}{9} \sin 3t, & t > \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Mientras la fuente está encendida la resonancia bombea energía y la amplitud crece proporcionalmente a t ; al apagarse en $t = \frac{2\pi}{3}$ el sistema conserva la energía acumulada y oscila indefinidamente con amplitud constante $\sqrt{1 + \pi^2/81}$.

Ejercicio 8.4

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 4y' + 3y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2, \\ e^{-2t}, & t \geq 2. \end{cases}$$

Reescritura del forzado con la función escalón. El forzado arranca en $t = 2$, luego $f(t) = e^{-2t} u(t - 2)$. Para el segundo teorema de traslación necesitamos el exponente en $t - 2$:

$$e^{-2t} = e^{-4} e^{-2(t-2)} \implies f(t) = e^{-4} e^{-2(t-2)} u(t - 2).$$

Transformada del forzado. Con $\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = 1/(s+2)$ y el factor de retardo e^{-2s} ,

$$F(s) = e^{-4} \frac{e^{-2s}}{s+2}.$$

Transformada de la ecuación. Con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = s + 5 + F(s), \quad s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3),$$

$$Y(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} + e^{-4} \frac{e^{-2s}}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Fracciones simples. Para la parte sin retardo,

$$\frac{s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+3} \mapsto 2e^{-t} - e^{-3t}.$$

Para el núcleo del término retardado,

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{1/2}{s+3} \mapsto h(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Segundo teorema de traslación. El término con e^{-2s} produce $e^{-4} h(t-2) u(t-2)$.

Solución.

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-3t} + e^{-4} u(t-2) \left[\frac{1}{2}e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-3(t-2)} \right]$$

Antes de $t = 2$ solo actúa la respuesta libre $y(t) = 2e^{-t} - e^{-3t}$, que decae hacia cero. La excitación tardía e^{-2t} inyecta un pequeño aporte a partir de $t = 2$ (el corchete y su derivada se anulan en $t = 2$, de modo que y y y' son continuas), tras el cual el sistema, sobreamortiguado por sus raíces -1 y -3 , vuelve a decaer.

Ejercicio 8.5

Enunciado. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial

$$y'' + 6y' + 8y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

Reescritura del forzado con la función escalón. El pulso constante de amplitud 3 y duración 2 es

$$f(t) = 3[u(t) - u(t-2)] = 3 - 3u(t-2).$$

Transformada del forzado. Con $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ y el factor de retardo,

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{3e^{-2s}}{s}.$$

Transformada de la ecuación. Con condiciones iniciales nulas y $s^2 + 6s + 8 = (s+2)(s+4)$,

$$(s+2)(s+4)Y(s) = F(s) \implies Y(s) = \frac{3}{s(s+2)(s+4)} - e^{-2s} \frac{3}{s(s+2)(s+4)}.$$

Fracciones simples.

$$\frac{3}{s(s+2)(s+4)} = \frac{3/8}{s} - \frac{3/4}{s+2} + \frac{3/8}{s+4} \mapsto h(t) = \frac{3}{8} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t}.$$

Segundo teorema de traslación. El término con e^{-2s} produce $-h(t-2)u(t-2)$, es decir, la misma respuesta al escalón pero desfasada y con signo opuesto, que cancela la excitación a partir de $t = 2$.

Solución.

$$y(t) = \frac{3}{8} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t} - u(t-2)\left[\frac{3}{8} - \frac{3}{4}e^{-2(t-2)} + \frac{3}{8}e^{-4(t-2)}\right]$$

Durante el pulso ($0 \leq t < 2$) la salida sube desde el reposo hacia el valor estacionario $3/8$; al terminar el pulso en $t = 2$ la excitación se retira y el sistema, sobreamortiguado por sus raíces -2 y -4 , decae de nuevo hacia cero. La solución y su derivada son continuas en $t = 2$.

Ejercicio 9

Enunciado. Resuelve el problema de valor inicial de primer orden con forzado cuadrático a trozos

$$y' + 2y = (4 - t^2)[1 - u(t-2)], \quad y(0) = 1,$$

esto es, con término independiente $4 - t^2$ en $(0, 2)$ y nulo para $t > 2$. Comprueba el resultado por factor integrante.

Reescritura con la función escalón. El forzado es $f(t) = (4 - t^2) - (4 - t^2)u(t-2)$. Para trasladar el segundo bloque a la variable $t - 2$ se desarrolla el polinomio alrededor de $t = 2$:

$$4 - t^2 = -(t-2)^2 - 4(t-2),$$

de modo que $(4 - t^2)u(t-2) = [-(t-2)^2 - 4(t-2)]u(t-2)$.

Transformada de la ecuación. Con $y(0) = 1$,

$$(s+2)Y - 1 = \frac{4}{s} - \frac{2}{s^3} + e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2}\right).$$

El primer bloque da la respuesta válida en $(0, 2)$; el bloque con e^{-2s} solo se activa tras $t = 2$.

Antitransformada del primer bloque. Descomponiendo $\frac{1}{s(s+2)}$, $\frac{1}{s^2(s+2)}$ y $\frac{1}{s^3(s+2)}$ en fracciones simples y sumando (junto con el término $\frac{1}{s+2}$ de la condición inicial) se obtiene, para $0 \leq t \leq 2$,

$$y(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t}.$$

El polinomio $-\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{7}{4}$ es la solución particular (coeficientes indeterminados) y $-\frac{3}{4}e^{-2t}$ ajusta $y(0) = 1$.

Tramo posterior. Para $t > 2$ el forzado es nulo y la ecuación homogénea $y' + 2y = 0$ decae exponencialmente desde el valor de empalme $y(2^-) = \frac{3}{4}(1 - e^{-4})$:

$$y(t) = \frac{3}{4}(1 - e^{-4})e^{-2(t-2)}.$$

Comprobación por factor integrante. En $(0, 2)$, $\mu(t) = e^{2t}$ y $(e^{2t}y)' = e^{2t}(4 - t^2)$; integrando y aplicando $y(0) = 1$ se recupera la misma expresión, lo que confirma el resultado.

Solución.

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t}, & 0 \leq t \leq 2, \\ \frac{3}{4}(1 - e^{-4})e^{-2(t-2)}, & t > 2. \end{cases}$$

La solución es continua en $t = 2$; al desaparecer el forzado, el sistema relaja hacia el equilibrio sin sobresaltos.

Ejercicio 10.1

Enunciado. Resuelve la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente variable, mediante factor integrante (no por transformada de Laplace),

$$f'(t) + 2 \tan(t) f(t) = -2 \tan(t), \quad f(0) = 1,$$

en un entorno de $t = 0$. Deja la función f explícita.

Factor integrante. Para $f' + p(t)f = q(t)$ con $p(t) = 2 \tan t$, el factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int 2 \tan t \, dt} = e^{-2 \ln \cos t} = \sec^2 t.$$

Ecuación exacta. Multiplicando por μ , el lado izquierdo es la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dt}(\sec^2 t f) = \sec^2 t (-2 \tan t) = -2 \tan t \sec^2 t.$$

Integración. Como $\frac{d}{dt}(\tan^2 t) = 2 \tan t \sec^2 t$,

$$\sec^2 t f = -\tan^2 t + C \quad \implies \quad f(t) = \cos^2 t (C - \tan^2 t) = C \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Condición inicial. Imponiendo $f(0) = 1$ resulta $C = 1$, y usando la identidad del ángulo doble,

$$f(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

Solución.

$f(t) = \cos 2t$

El coeficiente variable $2 \tan t$ y el forzado $-2 \tan t$ se combinan para producir una respuesta armónica de frecuencia doble; esta $f = \cos 2t$ será el forzado resonante del problema siguiente.

Ejercicio 10.2

Enunciado. Sea $f(t) = \cos 2t$ la función obtenida en el apartado anterior. Resuelve, mediante la transformada de Laplace, el problema de valor inicial resonante a trozos

$$y'' + 4y = \cos 2t [1 - u(t - \pi)], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2,$$

con forzado $\cos 2t$ en $(0, \pi)$ y nulo después. Halla $y(7)$ con tres decimales.

Forzado a trozos. El término independiente es $f(t) = \cos 2t - \cos 2t u(t - \pi)$. Como $\cos 2t$ tiene periodo π , $\cos 2t = \cos(2(t - \pi))$, lo que hace directo el segundo teorema de traslación.

Transformada de la ecuación. Con $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,

$$(s^2 + 4)Y - 2 = \frac{s}{s^2 + 4}(1 - e^{-\pi s}),$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{s}{(s^2 + 4)^2}(1 - e^{-\pi s}).$$

Resonancia. El forzado $\cos 2t$ oscila exactamente a la frecuencia natural $\omega = 2$, de modo que el denominador aparece al cuadrado y genera el núcleo resonante

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 4)^2}\right\} = \frac{t}{4} \sin 2t.$$

Junto con $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\} = \sin 2t$ y el segundo teorema de traslación (usando $\sin(2(t - \pi)) = \sin 2t$),

$$y(t) = \sin 2t + \frac{t}{4} \sin 2t - \frac{t - \pi}{4} \sin(2t) u(t - \pi).$$

Comportamiento por tramos. En $(0, \pi)$ la amplitud crece linealmente por resonancia, $y = \sin 2t + \frac{t}{4} \sin 2t$. Para $t > \pi$ los términos con factor t se cancelan y la amplitud queda congelada:

$$y(t) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \sin 2t.$$

Evaluación numérica. Como $7 > \pi$, se usa el tramo estacionario:

$$y(7) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \sin(14).$$

Con $\sin(14) \approx 0.990607$ y $1 + \frac{\pi}{4} \approx 1.785398$,

$$y(7) \approx 1.769.$$

Solución.

$y(t) = \sin 2t + \frac{t}{4} \sin 2t - \frac{t - \pi}{4} \sin(2t) u(t - \pi), \quad y(7) \approx 1.769$
--

Mientras el forzado resonante actúa, la energía inyectada hace crecer la amplitud proporcionalmente a t ; al cesar en $t = \pi$ la oscilación persiste con amplitud fija $1 + \frac{\pi}{4}$.