

Sistemas de EDOs lineales — Soluciones

Ejercicio 1

Enunciado. Resuelve el problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autovalores y autovectores. El polinomio característico es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5),$$

así que los autovalores son reales y distintos, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$. Para $\lambda_1 = 1$,

$$(A - I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y para $\lambda_2 = 5$,

$$(A - 5I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución homogénea.

$$\mathbf{y}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Solución particular (coeficientes indeterminados). Como el exponente del forzado es $\alpha = 2$, distinto de 1 y de 5, no hay resonancia y buscamos $\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{w} e^{2t}$. Sustituyendo, $2\mathbf{w} e^{2t} = A\mathbf{w} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$, es decir $(2I - A)\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Condición inicial. La solución general es $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$. Imponiendo $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3c_1 + c_2 = 5, \\ -c_1 + c_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 2.$$

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 3e^t + 2e^{5t} - 3e^{2t} \\ -e^t + 2e^{5t} \end{pmatrix}$$

Ambos autovalores son positivos, de modo que la solución crece sin acotarse; el término e^{5t} domina el comportamiento a largo plazo.

Ejercicio 2

Enunciado. Resuelve el problema de valores iniciales

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Espectro y autovectores. El polinomio característico es

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3),$$

así que hay dos autovalores reales distintos, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$. De $(A - 2I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ sale $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

y de $(A + 3I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ sale $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solución homogénea es

$$\mathbf{y}_h = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detección de la resonancia. El forzado es $\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t} = \mathbf{v}_1 t e^{2t}$: su exponente coincide con el autovalor $\lambda_1 = 2$ y su dirección con el autovector $\mathbf{v}_1$. Esta doble coincidencia es la que provoca la resonancia; conviene desacoplar el sistema. Con $P = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y el cambio $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{y}$ el sistema se diagonaliza. Como $\mathbf{b} = \mathbf{v}_1 t e^{2t}$ apunta puramente en la dirección de $\mathbf{v}_1$, su representación en la base propia es $P^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, y las dos ecuaciones quedan separadas:

$$z'_1 = 2z_1 + t e^{2t}, \quad z'_2 = -3z_2.$$

Coordenada resonante. La segunda es homogénea, $z_2 = B e^{-3t}$. La primera es el caso escalar de resonancia: como el forzado $t e^{2t}$ contiene el propio modo e^{2t} , hay que subir un grado y ensayar $z_{1,p} = \beta t^2 e^{2t}$. Sustituyendo,

$$z'_{1,p} - 2z_{1,p} = \beta(2t + 2t^2)e^{2t} - 2\beta t^2 e^{2t} = 2\beta t e^{2t} \stackrel{!}{=} t e^{2t} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2},$$

sin necesidad de término lineal. Por tanto $z_1 = (A + \frac{1}{2}t^2)e^{2t}$.

Vuelta a las variables originales. Deshaciendo el cambio $\mathbf{y} = z_1 \mathbf{v}_1 + z_2 \mathbf{v}_2$,

$$\mathbf{y} = \left(A + \frac{1}{2}t^2\right)e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + B e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Condiciones iniciales. En $t = 0$, $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $4A - B = 2$ y $A + B = 0$, de donde $A = \frac{2}{5}$ y $B = -\frac{2}{5}$.

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 e^{2t} + \frac{8}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}t^2 e^{2t} + \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

El término $\frac{1}{2}t^2e^{2t}\mathbf{v}_1$ es la firma de la resonancia: al forzar el sistema justo en su modo propio e^{2t} y en su dirección $\mathbf{v}_1$, la respuesta no solo oscila con ese modo sino que gana un factor t^2 que la hace crecer más deprisa que la homogénea.

Ejercicio 3

Enunciado. Resuelve el problema de valores iniciales

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{-t} \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Espectro. La traza vale -2 y el determinante $(1)(-3) - (2)(-4) = 5$, así que

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i.$$

Los autovalores son complejos con parte real $\alpha = -1$ y frecuencia $\beta = 2$.

Reducción a una ecuación de segundo orden. Como el forzado solo actúa en la segunda componente, conviene despejar. De la primera ecuación $y_1' = y_1 + 2y_2$ se obtiene $y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1)$, y derivando $y_2' = \frac{1}{2}(y_1'' - y_1')$. Sustituyendo ambas en la segunda ecuación $y_2' = -4y_1 - 3y_2 + 4e^{-t} \cos 2t$ y ordenando,

$$y_1'' + 2y_1' + 5y_1 = 8e^{-t} \cos 2t.$$

La ecuación característica $r^2 + 2r + 5 = 0$ tiene las mismas raíces $-1 \pm 2i$, luego la homogénea es

$$y_{1,h} = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t).$$

Resonancia compleja. El forzado $e^{-t} \cos 2t$ tiene exactamente la parte real $\alpha = -1$ y la frecuencia $\beta = 2$ de las raíces: es resonante. Por eso la particular no puede ser del tipo $e^{-t}(C \cos 2t + D \sin 2t)$ (quedaría absorbida por la homogénea) y hay que multiplicar por t :

$$y_{1,p} = t e^{-t}(C \cos 2t + D \sin 2t).$$

Sustituyendo en $y_1'' + 2y_1' + 5y_1 = 8e^{-t} \cos 2t$ e igualando los coeficientes de $e^{-t} \cos 2t$ y $e^{-t} \sin 2t$ se obtiene el sistema $4D = 8$, $4C = 0$, esto es $C = 0$, $D = 2$. Así $y_{1,p} = 2t e^{-t} \sin 2t$ y

$$y_1 = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) + 2t e^{-t} \sin 2t.$$

Condiciones iniciales. De $y_1(0) = 2$ sale $A = 2$. Para la derivada usamos la propia ecuación del sistema en $t = 0$: $y_1'(0) = y_1(0) + 2y_2(0) = 2 + 2(1) = 4$. Derivando y_1 y evaluando en 0 resulta $y_1'(0) = -A + 2B$, de modo que $-2 + 2B = 4$ y $B = 3$. Por tanto

$$y_1 = e^{-t}(2 \cos 2t + 3 \sin 2t + 2t \sin 2t).$$

Segunda componente. Con $y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1)$ y $y_1' = e^{-t}(4 \cos 2t - 5 \sin 2t + 4t \cos 2t - 2t \sin 2t)$,

$$y_2 = \frac{1}{2} \left[e^{-t}(4 \cos 2t - 5 \sin 2t + 4t \cos 2t - 2t \sin 2t) - e^{-t}(2 \cos 2t + 3 \sin 2t + 2t \sin 2t) \right] = e^{-t}(\cos 2t - 4 \sin 2t + 2t \cos 2t -$$

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t + 3 \sin 2t + 2t \sin 2t \\ \cos 2t - 4 \sin 2t + 2t \cos 2t - 2t \sin 2t \end{pmatrix}$$

Los términos seculares $t e^{-t} \cos 2t$ y $t e^{-t} \sin 2t$ delatan la resonancia compleja: la amplitud de la oscilación de frecuencia 2 crece linealmente con t , aunque aquí el factor global e^{-t} (parte real negativa) acaba amortiguando el conjunto, de modo que la solución oscila con amplitud $\propto t e^{-t}$ y tiende a cero.

Ejercicio 4

Enunciado. Resuelve el problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A \mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autovalores y autovectores. El polinomio característico es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{3},$$

dos autovalores reales irracionales. De $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, la primera fila da $(3 - \lambda)v_1 + v_2 = 0$, esto es $v_2 = (\lambda - 3)v_1$. Tomando $v_1 = 1$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}), \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}).$$

Solución homogénea.

$$\mathbf{y}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix} e^{(2+\sqrt{3})t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} e^{(2-\sqrt{3})t}.$$

Solución particular (coeficientes indeterminados). El exponente del forzado es $\alpha = -1$, distinto de $2 \pm \sqrt{3}$, luego no hay resonancia y probamos $\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{w} e^{-t}$. Sustituyendo se obtiene $(-I - A)\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Condición inicial. Con $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$ e imponiendo $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De la primera ecuación $c_1 + c_2 = 1$; sustituyendo en la segunda, $\sqrt{3}(c_1 - c_2) - (c_1 + c_2) = -1$, es decir $\sqrt{3}(c_1 - c_2) = 0$, luego $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$.

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix} e^{(2+\sqrt{3})t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} e^{(2-\sqrt{3})t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Al promediar los dos modos irracionales conjugados aparecen funciones hiperbólicas: en forma cerrada equivale a $y_1 = e^{2t} \cosh(\sqrt{3}t) - e^{-t}$ y $y_2 = e^{2t}(\sqrt{3} \sinh(\sqrt{3}t) - \cosh(\sqrt{3}t)) + 2e^{-t}$.

Ejercicio 5

Enunciado. Resuelve el problema de valores iniciales

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Espectro y estructura defectiva. El polinomio característico es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

un único autovalor $\lambda = 3$ de multiplicidad doble. La matriz

$$N := A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene rango 1, así que solo hay un autovector: el sistema es defectivo. De $N\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sale $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

y el vector propio generalizado se obtiene de $N\mathbf{w} = \mathbf{v}$, esto es $-w_1 + w_2 = 1$, de donde $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solución homogénea es la cadena de Jordan

$$\mathbf{y}_h = e^{3t} [C_1 \mathbf{v} + C_2 (\mathbf{w} + t \mathbf{v})].$$

Resonancia con el modo doble. El forzado $\mathbf{c} e^{3t}$ con $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene el exponente $3 = \lambda$: resuena, y además con un autovalor doble defectivo, lo que anticipa una subida de dos grados. El cambio $\mathbf{y} = e^{3t} \mathbf{u}(t)$ lo hace transparente. Como $A = 3I + N$,

$$\mathbf{y}' = e^{3t} (3\mathbf{u} + \mathbf{u}') = A\mathbf{y} + \mathbf{c} e^{3t} = e^{3t} [(3I + N)\mathbf{u} + \mathbf{c}] \implies \mathbf{u}' = N\mathbf{u} + \mathbf{c}.$$

Integración con N nilpotente. Como $N^2 = 0$, la serie termina pronto. Ensayando $\mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{q}t + \mathbf{r}t^2$ e igualando potencias de t en $\mathbf{u}' = N\mathbf{u} + \mathbf{c}$:

$$t^0 : \mathbf{q} = N\mathbf{p} + \mathbf{c}, \quad t^1 : 2\mathbf{r} = N\mathbf{q}, \quad t^2 : N\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

De aquí $\mathbf{r} = \frac{1}{2}N\mathbf{q} = \frac{1}{2}N(N\mathbf{p} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}N\mathbf{c}$ (pues $N^2 = 0$), y $N\mathbf{c} = N \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}$, luego $\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}$.

Condiciones iniciales. Como $\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}(0) = \mathbf{p}$, se toma $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ directamente. Entonces

$$\mathbf{q} = N\mathbf{p} + \mathbf{c} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y por tanto $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} t^2$.

Solución.

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 + 4t - \frac{1}{2}t^2 \\ 3 + 3t - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}}$$

La resonancia con un autovalor doble defectivo sube dos grados: aparece el término secular $-\frac{1}{2}t^2 e^{3t} \mathbf{v}$, alineado con el único autovector $\mathbf{v} = (1, 1)$. Es $N^2 = 0$ quien corta la serie en t^2 y garantiza que la respuesta sea polinómica de grado exactamente 2 por e^{3t} .

Ejercicio 6

Enunciado. Resuelve el problema de valores iniciales $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t+1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Análisis espectral. La matriz es triangular superior, así que su único autovalor es $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 3. Escribimos

$$A = 2I + N, \quad N = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

El rango de N es 2, luego hay un único autovector independiente: el sistema es defectivo y N es un bloque de Jordan nilpotente de tamaño 3.

Solución homogénea (exponencial de matriz vía Jordan). Como N es nilpotente y conmuta con $2I$,

$$e^{At} = e^{2t} \left(I + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 \right).$$

Con el vector de constantes $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^\top$,

$$\mathbf{y}_h(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2 \\ c_2 + c_3t \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Solución particular (coeficientes indeterminados). El forzado es polinómico y $\lambda = 2 \neq 0$, por lo que ensayamos un polinomio del mismo grado $\mathbf{y}_p = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1t + \mathbf{p}_2t^2$. Imponiendo $\mathbf{y}'_p = 2\mathbf{y}_p + N\mathbf{y}_p + \mathbf{b}(t)$ e igualando por potencias de t (recuérdese $N(a, b, c)^\top = (b, c, 0)^\top$):

$$t^2 : 2\mathbf{p}_2 + N\mathbf{p}_2 = -(2, 0, 0)^\top \Rightarrow \mathbf{p}_2 = (-1, 0, 0)^\top,$$

$$t^1 : 2\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{p}_1 + N\mathbf{p}_1 + (0, 1, 0)^\top \Rightarrow \mathbf{p}_1 = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0\right)^\top,$$

$$t^0 : \mathbf{p}_1 = 2\mathbf{p}_0 + N\mathbf{p}_0 + (0, 1, 3)^\top \Rightarrow \mathbf{p}_0 = \left(-\frac{3}{8}, 0, -\frac{3}{2}\right)^\top.$$

Así

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} -t^2 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2}t \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Imposición de la condición inicial. Como $\mathbf{y}(0) = \mathbf{c} + \mathbf{y}_p(0)$ con $\mathbf{y}_p(0) = \left(-\frac{3}{8}, 0, -\frac{3}{2}\right)^\top$,

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{8}, 0, \frac{1}{2}\right)^\top.$$

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \left(\frac{t^2}{4} + \frac{11}{8} \right) - t^2 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2}t e^{2t} - \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Obsérvese cómo la cadena de Jordan hace aparecer los factores t y t^2 multiplicando a e^{2t} , mientras que la parte polinómica pura proviene de la respuesta forzada.

Ejercicio 7

Enunciado. Resuelve el problema de valores iniciales $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Análisis espectral. Por ser triangular, los autovalores son las entradas de la diagonal: $\lambda = 2$ (simple) y $\lambda = -1$ (doble). Para $\lambda = -1$,

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 1, luego su núcleo es de dimensión 2: el autovalor doble aporta dos autovectores independientes y la matriz es diagonalizable.

Autovectores.

$$\lambda = 2: (A - 2I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^\top;$$

$$\lambda = -1: 3v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1, -3, 0)^\top, \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)^\top.$$

Solución homogénea.

$$\mathbf{y}_h(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución particular (coeficientes indeterminados). El exponente $\alpha = 1$ del forzado no coincide con ningún autovalor (2 ni -1): no hay resonancia y basta ensayar $\mathbf{y}_p = \mathbf{v} e^t$. Sustituyendo, $\mathbf{v}$ satisface $(I - A)\mathbf{v} = (1, 2, -1)^\top$, es decir

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = (-2, 1, -\frac{1}{2})^\top, \quad \mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^t.$$

Imposición de la condición inicial. De $\mathbf{y}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \mathbf{y}_p(0) = (2, -1, 3)^\top$:

$$-3c_2 + 1 = -1 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_1 + c_2 - 2 = 2 \Rightarrow c_1 = \frac{10}{3}, \quad c_3 - \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow c_3 = \frac{7}{2}.$$

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t} - 2e^t \\ e^t - 2e^{-t} \\ \frac{7}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^t \end{pmatrix}$$

La tercera componente está desacoplada del bloque 2×2 superior, lo que permite integrarla por separado; el modo e^t es exclusivamente la respuesta forzada.

Ejercicio 8

Enunciado. Resuelve el problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \sin 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Autovalores y autovectores. El polinomio característico es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4),$$

con autovalores reales distintos $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -4$ (ambos negativos: el sistema es estable). Para $\lambda_1 = -1$,

$$(A + I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y para $\lambda_2 = -4$,

$$(A + 4I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Solución homogénea.

$$\mathbf{y}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t}.$$

Solución particular (coeficientes indeterminados). El forzado oscila con frecuencia $\omega = 2$. Como los autovalores son reales, no puede haber resonancia y probamos

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{p} \cos 2t + \mathbf{q} \sin 2t.$$

Entonces $\mathbf{y}_p' = -2\mathbf{p} \sin 2t + 2\mathbf{q} \cos 2t$. Al sustituir en $\mathbf{y}_p' = A\mathbf{y}_p + \mathbf{b}$ e igualar por separado los términos en $\cos 2t$ y en $\sin 2t$,

$$2\mathbf{q} = A\mathbf{p}, \quad -2\mathbf{p} = A\mathbf{q} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ y $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, la primera relación da $2q_1 = p_2$ y $2q_2 = -4p_1 - 5p_2$; la segunda da $-2p_1 = q_2$ y $-2p_2 = -4q_1 - 5q_2 + 10$. Resolviendo el sistema lineal se obtiene

$$q_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad q_2 = 2, \quad p_1 = -1,$$

de modo que

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t = \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Condición inicial. Con $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$ y $\mathbf{y}_p(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, imponemos $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3, \\ -c_1 - 4c_2 = -6, \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2, \quad c_2 = 1.$$

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t} + \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{-4t} - \cos 2t \\ -2e^{-t} - 4e^{-4t} + 2 \sin 2t \end{pmatrix}$$

Los términos exponenciales forman el transitorio, que se extingue por ser $\lambda_1, \lambda_2 < 0$; a largo plazo solo perdura el régimen permanente oscilatorio $\begin{pmatrix} -\cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix}$ inducido por el forzado.

Ejercicio 9

Enunciado. Resuelve el problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Autovalores. El polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \lambda + \det(A) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

así que hay un único autovalor $\lambda = 3$ **doble**.

Por qué la matriz es defectiva. Al calcular el autovector aparece

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

matriz de rango 1: solo produce **un** autovector independiente, luego A **no es diagonalizable** y hace falta una cadena de Jordan. De $(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sale $v_1 + v_2 = 0$, y tomamos

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vector propio generalizado. Buscamos $\mathbf{w}$ con $(A - 3I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow w_1 + w_2 = 1.$$

Ambas filas dan la misma ecuación (el sistema es compatible, como debe ocurrir); elegimos la solución más cómoda

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución homogénea. Con la cadena $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ la parte homogénea del bloque de Jordan es

$$\mathbf{y}_h(t) = c_1 \mathbf{v} e^{3t} + c_2 (\mathbf{v} t + \mathbf{w}) e^{3t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{3t}.$$

El factor $t e^{3t}$ es la huella típica del autovalor defectivo.

Solución particular (no hay resonancia). El forzado es $\mathbf{c} e^{2t}$ con $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y exponente $\alpha = 2$. Como $\alpha = 2 \neq 3 = \lambda$, **no** resuena con el modo propio: basta ensayar $\mathbf{y}_p = \mathbf{p} e^{2t}$ sin subir el grado. Sustituyendo,

$$2\mathbf{p} e^{2t} = A\mathbf{p} e^{2t} + \mathbf{c} e^{2t} \implies (A - 2I)\mathbf{p} = -\mathbf{c}.$$

Con $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (determinante 1),

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = -(A - 2I)^{-1}\mathbf{c} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t}$. (Si el exponente hubiese sido $\alpha = 3$, este paso fallaría porque $A - 3I$ es singular, y habría que multiplicar por t ; aquí se evita esa trampa.)

Imposición de la condición inicial. La solución general es $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$. En $t = 0$,

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 1 \\ -c_1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De la segunda componente $-c_1 - 4 = -2 \Rightarrow c_1 = -2$; de la primera $c_1 + c_2 + 1 = 1 \Rightarrow c_2 = 2$.

Ensamblado. Con $c_1 = -2$, $c_2 = 2$:

$$y_1 = (-2 + 2t + 2)e^{3t} + e^{2t} = 2te^{3t} + e^{2t},$$

$$y_2 = (2 - 2t)e^{3t} - 4e^{2t}.$$

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2te^{3t} + e^{2t} \\ (2 - 2t)e^{3t} - 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

El término $2te^{3t}$ proviene del bloque de Jordan (autovalor doble defectivo), mientras que el modo forzado e^{2t} entra sin subir de grado precisamente por no ser resonante.

Ejercicio 10

Enunciado. Resuelve el problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2t - 3 \\ -2t - 5 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Autovalores y autovectores. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es **simétrica**, luego diagonaliza en base ortogonal con autovalores reales. De

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

salen $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Los autovectores son

$$\lambda_1 = 3 : \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 : \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que en efecto son ortogonales.

Solución homogénea.

$$\mathbf{y}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Detección de resonancia. El forzado se escribe

$$\mathbf{b}(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}t)e^{-t}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

con exponente $\alpha = -1$. Como $\alpha = -1 = \lambda_2$, **hay resonancia** con el modo $\mathbf{v}_2 e^{-t}$: la parte del forzado alineada con $\mathbf{v}_2$ obliga a subir dos grados el polinomio, apareciendo términos en t y t^2 .

Particular por coeficientes indeterminados. Ante la resonancia ensayamos

$$\mathbf{y}_p(t) = (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 t + \mathbf{p}_2 t^2)e^{-t}.$$

Derivando y usando $\mathbf{y}'_p = A\mathbf{y}_p + \mathbf{b}(t)$, tras cancelar e^{-t} se agrupan potencias de t :

$$\begin{aligned} t^2 : & \quad -(A + I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}, \\ t^1 : & \quad 2\mathbf{p}_2 - (A + I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{b}, \\ t^0 : & \quad \mathbf{p}_1 - (A + I)\mathbf{p}_0 = \mathbf{a}, \end{aligned}$$

donde $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ es singular (su núcleo es justo $\mathbf{v}_2$). Resolviendo la cadena de arriba abajo se llega a una elección consistente

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t + 1 \\ -t^2 - t + 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

(El aviso típico: no basta con $(\mathbf{a} + \mathbf{b}t)e^{-t}$ como ensayo; al resonar hay que incluir el grado t^2 , y el coeficiente $\mathbf{p}_2$ vive en la dirección $\mathbf{v}_2$.)

Imposición de la condición inicial. Con $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$ y $\mathbf{y}_p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 1 \\ c_1 - c_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Esto da $c_1 + c_2 = 0$ y $c_1 - c_2 = 2$, es decir $c_1 = 1$, $c_2 = -1$.

Ensamblado. Sumando $\mathbf{y}_h$ y $\mathbf{y}_p$ con $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ y agrupando los términos en e^{-t} :

$$\mathbf{y}_1 = e^{3t} - e^{-t} + (t^2 + t + 1)e^{-t} = e^{3t} + (t^2 + t)e^{-t},$$

$$y_2 = e^{3t} + e^{-t} + (-t^2 - t + 1)e^{-t} = e^{3t} + (-t^2 - t + 2)e^{-t}.$$

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} + (t^2 + t)e^{-t} \\ e^{3t} + (2 - t - t^2)e^{-t} \end{pmatrix}$$

La subida hasta t^2e^{-t} es el sello de la resonancia entre el forzado y el autovalor $\lambda = -1$; el modo e^{3t} domina el crecimiento a largo plazo. Como método alternativo, la variación de parámetros con la matriz fundamental $\Phi(t)$ conduce al mismo resultado.

Ejercicio 11

Enunciado. Resuelve el problema de valores iniciales $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$, con

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 4 \\ -10 & 5 & 4 \\ -11 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Polinomio característico. Con $\text{tr } A = 4$, la suma de menores principales 2×2 igual a 1 y $\det A = -6$,

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

de modo que los autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, reales y distintos (matriz diagonalizable).

Autovectores. Resolviendo $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = 0$ en cada caso,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = -1), \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 2), \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 3).$$

Solución homogénea.

$$\mathbf{y}_h(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solución particular (coeficientes indeterminados). El exponente $\alpha = 1$ del forzado no es autovalor, luego no hay resonancia y ensayamos $\mathbf{y}_p = \mathbf{v}e^t$ con $(I - A)\mathbf{v} = (1, -2, 1)^\top$:

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 \\ 10 & -4 & -4 \\ 11 & -3 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = (5, 8, 5)^\top, \quad \mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} e^t.$$

Imposición de la condición inicial. De $\mathbf{y}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + (5, 8, 5)^\top = (1, 2, -1)^\top$ resulta el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -4 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = -6 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = -2.$$

Solución.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 5e^t - 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ 8e^t - 4e^{2t} - 2e^{3t} \\ 5e^t - 2e^{2t} - 4e^{3t} \end{pmatrix}$$

Como $c_1 = 0$, el modo estable e^{-t} no interviene: la condición inicial elegida excita únicamente los modos crecientes e^{2t} y e^{3t} , además de la respuesta forzada e^t .