

Series de Fourier — Soluciones

Ejercicio 1

Enunciado. Sea f la extensión periódica, de periodo $T = 2\pi$, de la onda triangular par

$$f(t) = |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Obtén su serie de Fourier en forma compleja, es decir, los coeficientes c_0 y c_n y la expresión de la serie. Estudia además el carácter de la convergencia de dicha serie hacia f .

Planteamiento: forma compleja. Con frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$, la serie compleja es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| e^{-int} dt.$$

Término constante c_0 . Es el valor medio de f en un periodo:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Coefficientes c_n con $n \neq 0$. Como f es par y $\sin(nt)$ impar, la parte imaginaria del integrando se anula y queda solo la parte con coseno:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| (\cos(nt) - i \sin(nt)) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt.$$

Integrando por partes con $u = t$, $dv = \cos(nt) dt$:

$$\int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \left[\frac{t \sin(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Por tanto

$$c_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \frac{-2}{\pi n^2}, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Los coeficientes son reales (consecuencia de que f es par) y solo sobreviven los armónicos impares, que decaen como $1/n^2$.

Serie. Agrupando n y $-n$ (con $c_{-n} = c_n$) se recupera la forma real:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi n^2} e^{int} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

Convergencia. La extensión periódica de f es continua en todo $\mathbb{R}$ (en $t = \pm\pi$ los valores laterales coinciden, $|\pi| = |-\pi| = \pi$) y de clase C^1 a trozos. Además

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi (2k+1)^2} < \infty,$$

serie numérica convergente. Por el criterio M de Weierstrass, la serie de Fourier converge **uniforme y absolutamente** a f en todo $\mathbb{R}$: no hay fenómeno de Gibbs y en cada punto la suma vale exactamente $f(t)$.

Solución.

$c_0 = \frac{\pi}{2}, \quad c_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad (n \neq 0) \implies c_n = \frac{-2}{\pi n^2} \quad (n \text{ impar}), \quad c_n = 0 \quad (n \text{ par}); \quad \text{convergencia uniforme.}$
--

El pico anguloso de $|t|$ en $t = 0$ no impide la convergencia uniforme porque la función sigue siendo continua; solo ralentiza el decaimiento de los coeficientes a un orden $1/n^2$.

Ejercicio 2

Enunciado. Se considera la onda cuadrada impar de período $T = 2$ definida en un período por

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0, \\ +1, & 0 < t < 1, \end{cases}$$

y extendida de forma 2-periódica a toda la recta real, de modo que $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Apartado 1

Calcula la forma compleja de su serie de Fourier (los coeficientes c_0 y c_n), escribe la serie y dibuja la función a la que converge en el intervalo $[-2, 2]$.

Convenio complejo. Para una función de período T escribimos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-in\omega t} dt,$$

donde $\int_T$ denota la integral sobre cualquier intervalo de longitud T . Aquí conviene el intervalo simétrico $[-1, 1]$, en el que f toma los valores ∓ 1 .

Coficiente medio c_0 . Es el valor medio de la función sobre un período. Como f vale -1 en $(-1, 0)$ y $+1$ en $(0, 1)$, las dos áreas se cancelan:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 (-1) dt + \int_0^1 (+1) dt \right) = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0.$$

Coficientes c_n **con** $n \neq 0$. Partimos de

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-in\pi t} dt.$$

La función f es **impar**. Escribiendo $e^{-in\pi t} = \cos(n\pi t) - i \sin(n\pi t)$, el trozo con $\cos$ (par) multiplica a f (impar) dando un integrando impar que se anula sobre $[-1, 1]$; solo sobrevive el trozo con $-i \sin$ (par por par), que se duplica en $[0, 1]$:

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) (-i \sin(n\pi t)) dt = -i \int_0^1 \sin(n\pi t) dt.$$

Este hecho es general y conviene recordarlo: **si f es par, los c_n salen reales; si es impar, salen imaginarios puros.** Calculando la integral,

$$\int_0^1 \sin(n\pi t) dt = \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}.$$

Por tanto

$$\boxed{c_0 = 0, \quad c_n = -i \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \quad (n \neq 0)}$$

El factor $1 - (-1)^n$ actúa como interruptor de paridad: se anula para n **par** y vale 2 para n **impar**. Solo sobreviven los armónicos impares:

$$c_n = \begin{cases} -\frac{2i}{n\pi}, & n \text{ impar}, \\ 0, & n \text{ par}, \quad n \neq 0. \end{cases}$$

La serie. Reuniendo todo,

$$f(t) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left(-\frac{2i}{n\pi} \right) e^{in\pi t}.$$

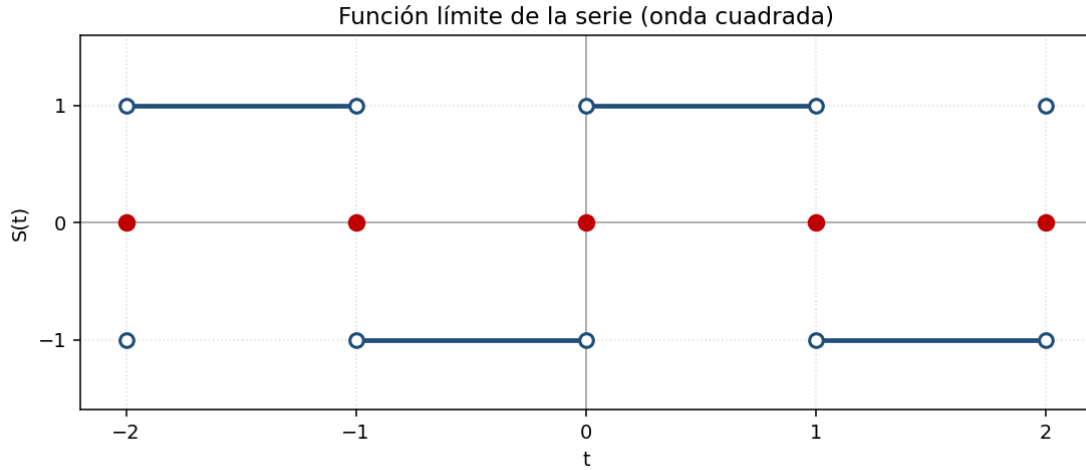
Agrupando cada armónico con su conjugado (n y $-n$) y usando $e^{in\pi t} - e^{-in\pi t} = 2i \sin(n\pi t)$, se obtiene la forma real equivalente, cómoda para visualizar:

$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \dots \right).$$

Función a la que converge la serie. La onda cuadrada presenta un **salto** en cada entero: alrededor de $t = 0$, por la izquierda vale -1 y por la derecha $+1$ (y de forma análoga en los demás enteros, alternando el sentido del salto). El **teorema de Dirichlet** afirma que en un punto de salto la serie no converge a ninguno de los dos valores laterales, sino a su **punto medio**:

$$S(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \quad \text{en cada entero.}$$

En los puntos donde f es continua, la serie converge al propio valor ± 1 . La figura muestra esta función límite en $[-2, 2]$: tramos horizontales a altura ± 1 , con círculos abiertos en los extremos de cada tramo y un punto relleno en la altura 0 sobre cada entero.



Apartado 2

Aplica la igualdad de Parseval en forma compleja a la onda cuadrada del apartado anterior para deducir el valor de la suma sobre los enteros impares

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Igualdad de Parseval (forma compleja). Relaciona la energía media de la función con la suma de los módulos al cuadrado de sus coeficientes:

$$\frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Lado izquierdo. Como $|f(t)| = 1$ en todo el período,

$$\frac{1}{T} \int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 dt = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Lado derecho. Del apartado anterior, $c_0 = 0$ y los únicos coeficientes no nulos son los de índice impar, con

$$|c_n|^2 = \left| -\frac{2i}{n\pi} \right|^2 = \frac{4}{n^2\pi^2} \quad (n \text{ impar}).$$

Como $|c_n|^2 = |c_{-n}|^2$, la suma sobre todos los enteros duplica la suma sobre $n \geq 1$ (y solo cuentan los impares):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Despeje. Igualando ambos lados,

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Un aviso de cálculo: es habitual olvidar el factor 2 que aparece al sumar simétricamente sobre n y $-n$; sin él saldría el doble del valor correcto. Con él, el despeje es inmediato.

Solución.

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.233701$$

Interpretación y cierre. La energía media de la onda cuadrada (que vale 1, pues $|f| \equiv 1$) queda repartida exactamente entre sus armónicos impares, y esa contabilidad obliga a que la suma valga $\pi^2/8$. A partir de aquí se recupera de paso la suma sobre todos los enteros: separando pares e impares y observando que la parte par es $\sum_{n \text{ par}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, se tiene

$$\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

de donde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$, el célebre resultado de Basilea.