

## Ecuaciones en derivadas parciales — Ejercicios propuestos

### Ejercicio 1

**Enunciado.** Una cuerda de longitud 3 con extremos fijos vibra según la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno  $u(0, t) = u(3, t) = 0$  y los datos iniciales

$$u(x, 0) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{3}\right).$$

Determina  $u(x, t)$ .

### Ejercicio 2

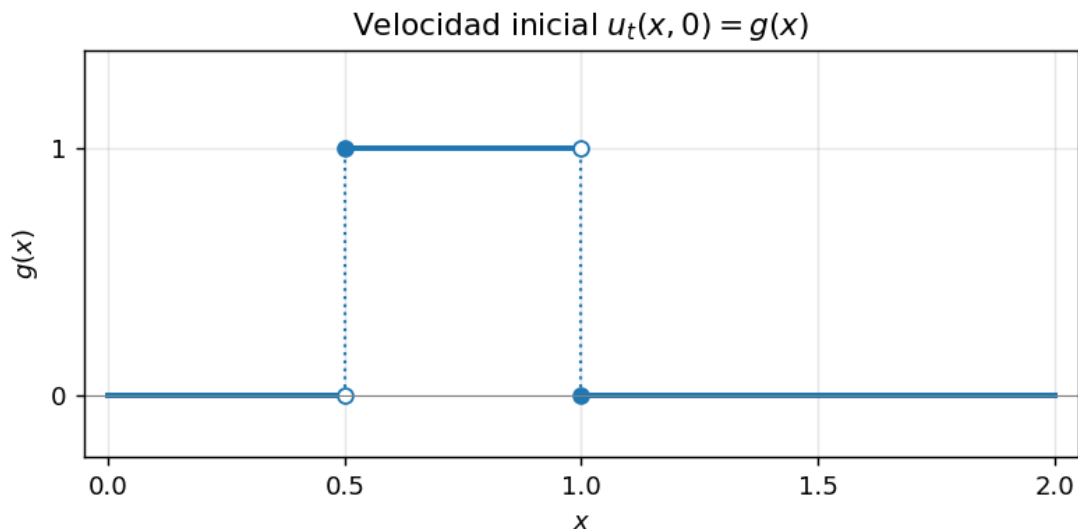
**Enunciado.** Una cuerda de longitud 2 con extremos fijos parte del reposo y recibe un impulso de velocidad constante sobre un tramo interior. El desplazamiento  $u(x, t)$  satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con  $u(0, t) = u(2, t) = 0$ , desplazamiento inicial nulo  $u(x, 0) = 0$  y velocidad inicial a trozos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{en el resto de } [0, 2]. \end{cases}$$

El perfil de  $g(x)$  es:



Determina  $u(x, t)$ .

### Ejercicio 3

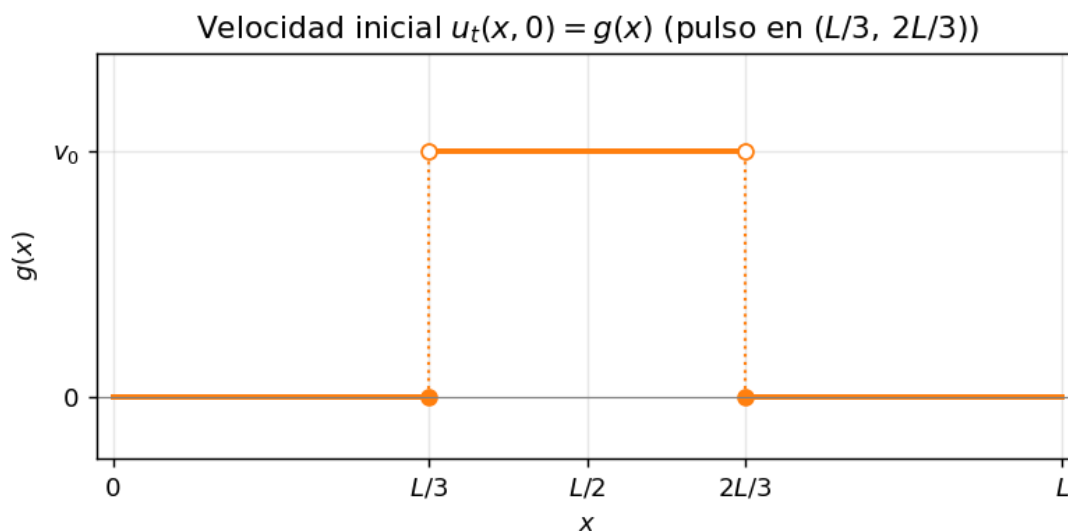
**Enunciado.** Una cuerda de longitud  $L$  con extremos fijos, gobernada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

y con  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , parte del segundo modo propio y recibe un impulso constante en el tercio central:

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \begin{cases} v_0, & \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3}, \\ 0, & \text{en el resto de } [0, L]. \end{cases}$$

El perfil de la velocidad inicial es:



Determina  $u(x, t)$  (deja  $L$ ,  $c$  y  $v_0$  como parámetros).

### Ejercicio 5

**Enunciado.** Una barra elástica de longitud 2 tiene ambos extremos libres. El desplazamiento longitudinal  $u(x, t)$  obedece la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno de Neumann (extremos libres de tensión)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0,$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x(2 - x).$$

Determina  $u(x, t)$  por separación de variables.

### Ejercicio 6

**Enunciado.** Un tubo de órgano de longitud 3 está cerrado en  $x = 0$  y abierto en  $x = 3$ . La perturbación acústica  $u(x, t)$  satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

con un extremo fijo y otro libre,

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0,$$

y con el tubo inicialmente en reposo al que se comunica un impulso uniforme,

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 6.$$

Halla  $u(x, t)$  por separación de variables.

### Ejercicio 7

**Enunciado.** Una cuerda flexible de longitud 6, con los extremos sujetos, se abandona desde el reposo con una deformación triangular **asimétrica**: parte del origen, sube hasta un pico de altura 4 situado en  $x = 2$  y desciende hasta el otro extremo. El desplazamiento transversal  $u(x, t)$  satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 6, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0, t) = u(6, t) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 6 - x, & 2 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Se pide:

#### 7.1

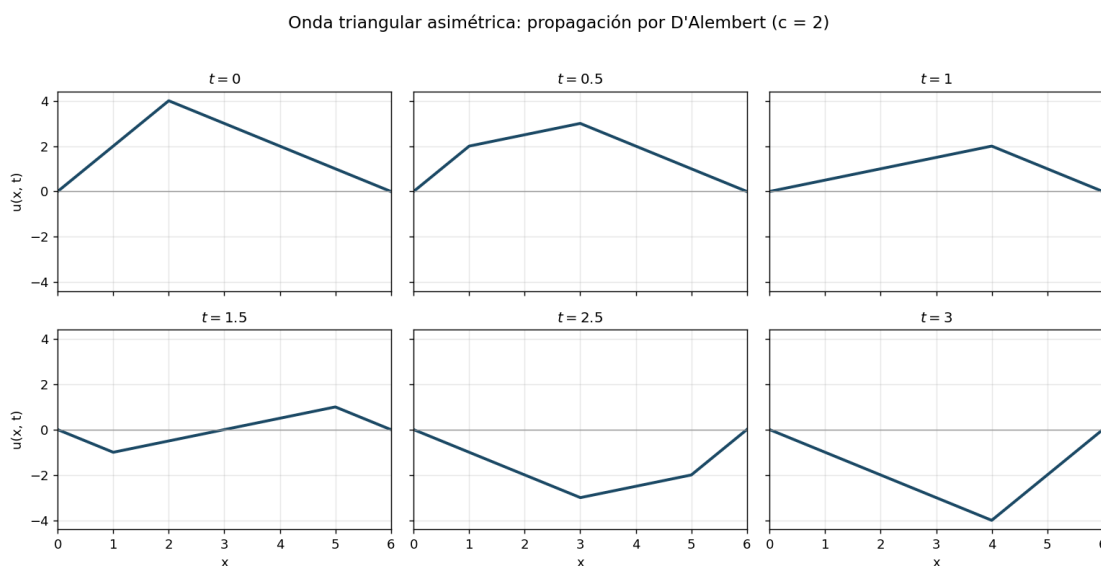
Resolver el problema por **separación de variables** (método de Bernoulli), obteniendo la serie de Fourier de la solución.

#### 7.2

Resolver el **mismo** problema mediante la **fórmula de D'Alembert**, usando la extensión impar 12-periódica del dato, y comprobar que ambas expresiones coinciden.

### 7.3

Describir el fenómeno de propagación: velocidad de las ondas viajeras, papel de la reflexión en los extremos fijos y periodicidad temporal. Los siguientes fotogramas de la solución sirven de guía.



### Ejercicio 8

**Enunciado.** Una cuerda de longitud 3, con los extremos fijos y en reposo, se somete a una fuerza externa distribuida que oscila armónicamente en el tiempo. El desplazamiento transversal  $u(x, t)$  satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (x - 3) \cos(2t), \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno  $u(0, t) = u(3, t) = 0$  y las condiciones iniciales  $u(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ . Halla  $u(x, t)$ .

### Ejercicio 9

**Enunciado.** Una cuerda de longitud 2 con los extremos fijos cuelga en reposo bajo la acción de una carga uniforme constante (su propio peso). El desplazamiento  $u(x, t)$  satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con  $u(0, t) = u(2, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  y  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ . Determina  $u(x, t)$ .

### Ejercicio 10

**Enunciado.** Una cuerda de longitud 2 con los extremos fijos, inicialmente en reposo, está sometida a una carga distribuida estacionaria que depende solo de la posición. El desplazamiento  $u(x, t)$  satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x^2, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con  $u(0, t) = u(2, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  y  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ . Halla  $u(x, t)$ .

### Ejercicio 11

**Enunciado.** El desplazamiento  $u(x, t)$  de una cuerda de longitud 1 con los extremos fijos, en reposo, sometida a una carga estacionaria de perfil cosenoidal, satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 9\pi^2 \cos(3\pi x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  y  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ . Halla  $u(x, t)$ .

### Ejercicio 12

**Enunciado.** Un medio elástico unidimensional con ambos extremos libres ocupa el intervalo  $0 \leq x \leq \pi$  y vibra según la ecuación de ondas forzada

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16 \cos(4x) \sin(2t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno de Neumann (extremos libres)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0,$$

y partiendo del reposo

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Determina  $u(x, t)$  y describe el comportamiento de la amplitud cuando  $t$  crece.

### Ejercicio 13

**Enunciado.** Una barra de longitud  $L = 3$  y difusividad térmica  $\kappa^2 = 1,05$  tiene sus dos extremos mantenidos a 0 grados. Su temperatura inicial es uniforme e igual a 20 grados. Determina la temperatura  $u(x, t)$  resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 1,05 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(3, t) = 0, & u(x, 0) &= 20. \end{aligned}$$

### Ejercicio 14

**Enunciado.** La misma barra ( $L = 3$ ,  $\kappa^2 = 1,5$ ), pero ahora con el extremo izquierdo mantenido a 20 grados y el derecho a 80 grados, partiendo de temperatura inicial uniforme 10:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1,5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = 20, \quad u(3, t) = 80, \quad u(x, 0) = 10.$$

### Ejercicio 15

**Enunciado.** Resuelve la ecuación del calor con difusividad  $\kappa^2 = 0,9$  en  $[0, 2]$ , extremos mantenidos a 0 y perfil inicial  $5 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad u(x, 0) = 5 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2}.$$

### Ejercicio 16

**Enunciado.** El mismo problema en  $[0, 2]$  con difusividad unidad, pero con extremos a 30 y 10 grados y perfil inicial  $2 \operatorname{sen}(\pi x)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = 30, \quad u(2, t) = 10, \quad u(x, 0) = 2 \operatorname{sen}(\pi x).$$

### Ejercicio 17

**Enunciado.** Una varilla de longitud 3 tiene sus extremos mantenidos a temperatura nula y evoluciona según la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno  $u(0, t) = 0$ ,  $u(3, t) = 0$  y distribución inicial de temperatura

$$u(x, 0) = x(3 - x).$$

Halla  $u(x, t)$  mediante separación de variables.

### Ejercicio 18

**Enunciado.** Una varilla de longitud 2 tiene sus dos extremos térmicamente aislados (flujo de calor nulo) y su temperatura obedece

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con condiciones de Neumann  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0$  y temperatura inicial

$$u(x, 0) = 3 - x.$$

Determina  $u(x, t)$  y su valor límite cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### Ejercicio 19

**Enunciado.** Una barra de longitud 1 se calienta mediante una fuente interna que decae exponencialmente con la posición. Su temperatura satisface la ecuación no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9e^{-3x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno fijas

$$u(0, t) = -\frac{1}{2}, \quad u(1, t) = -\frac{1}{2} e^{-3},$$

y distribución inicial

$$u(x, 0) = 3 \operatorname{sen}(4\pi x) - \frac{1}{2} e^{-3x}.$$

Halla  $u(x, t)$  descomponiéndola en una parte estacionaria y una parte transitoria, y describe el comportamiento a largo plazo.

### Ejercicio 20

**Enunciado.** Una varilla de longitud 2 con los extremos a temperatura nula se calienta uniformemente por una fuente constante. Su temperatura cumple

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con  $u(0, t) = 0$ ,  $u(2, t) = 0$  y temperatura inicial nula  $u(x, 0) = 0$ . Halla  $u(x, t)$  y la distribución de temperaturas de equilibrio.

### Ejercicio 28

**Enunciado.** Una cuerda de longitud unidad, con los extremos fijos, se somete a un forzado espacialmente cuadrático que oscila en el tiempo:

$$9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (x^2 - x) \operatorname{sen}(3t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno de Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Halla la oscilación forzada estacionaria de la forma  $u(x, t) = f(x) \operatorname{sen}(3t)$  compatible con los extremos fijos, y razona si el sistema entra en resonancia.

### Ejercicio 29

**Enunciado.** La propagación de una señal en una línea con pérdidas se modela mediante la ecuación del telegrafista (onda amortiguada)

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} + u, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con los extremos conectados a tierra

$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0,$$

y estado inicial

$$u(x, 0) = 5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - 2 \operatorname{sen}(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Determina  $u(x, t)$  y describe cómo decae la señal.

### Ejercicio 30

**Enunciado.** Una barra de longitud  $\pi$  pierde calor hacia el ambiente a un ritmo proporcional a su temperatura (radiación lineal). El problema es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con extremos a temperatura nula  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  y perfil inicial  $u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} 3x$ . Halla  $u(x, t)$ .

### Ejercicio 31

**Enunciado.** En un modelo de reacción-difusión con generación proporcional a la concentración,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  y estado inicial  $u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} x$ . Determina  $u(x, t)$  e indica si la concentración crece o decae.

### Ejercicio 32

**Enunciado.** Considera la ecuación de reacción-difusión con absorción

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sometida a las condiciones de contorno no homogéneas  $u(0, t) = 2$ ,  $u(1, t) = 0$  y al dato inicial

$$u(x, 0) = 2 \frac{\sinh(1-x)}{\sinh 1} + 3 \operatorname{sen}(2\pi x).$$

Halla la solución  $u(x, t)$  y su régimen estacionario.

### Ejercicio 33

**Enunciado.** Una barra tiene una difusividad que crece linealmente con el tiempo y además pierde calor por radiación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con extremos  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  y perfil inicial  $u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} 3x$ . Resuelve el problema y comenta el efecto del coeficiente variable.