

Ecuaciones en derivadas parciales — Soluciones

Ejercicio 1

Enunciado. Una cuerda de longitud 3 con extremos fijos vibra según la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = u(3, t) = 0$ y los datos iniciales

$$u(x, 0) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{3}\right).$$

Determina $u(x, t)$.

Separación de variables. Con $u(x, t) = X(x)T(t)$ y extremos fijos, los modos propios que cumplen $X(0) = X(3) = 0$ son

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y la parte temporal oscila con frecuencia $\omega_n = c \frac{n\pi}{L} = 3 \cdot \frac{n\pi}{3} = n\pi$. La solución general es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(n\pi t) + B_n \operatorname{sen}(n\pi t) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right).$$

Ajuste del desplazamiento inicial. Como $u(x, 0) = \sum_n A_n \operatorname{sen}(n\pi x/3)$ y el dato ya es una combinación de modos propios, se identifican los coeficientes por inspección, sin integrales de Fourier:

$$A_1 = 4, \quad A_2 = -1, \quad A_n = 0 \text{ para el resto.}$$

Ajuste de la velocidad inicial. Derivando, $u_t(x, 0) = \sum_n \omega_n B_n \operatorname{sen}(n\pi x/3)$. El dato $2 \operatorname{sen}(4\pi x/3)$ es el modo $n = 4$, cuya frecuencia es $\omega_4 = 4\pi$:

$$\omega_4 B_4 = 2 \implies B_4 = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}, \quad B_n = 0 \text{ para el resto.}$$

Solución.

$$u(x, t) = 4 \cos(\pi t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) - \cos(2\pi t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(4\pi t) \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{3}\right)$$

Al ser los datos combinaciones de modos propios, cada armónico evoluciona de forma independiente: no hay mezcla de frecuencias y la vibración es la superposición de tres ondas estacionarias.

Ejercicio 2

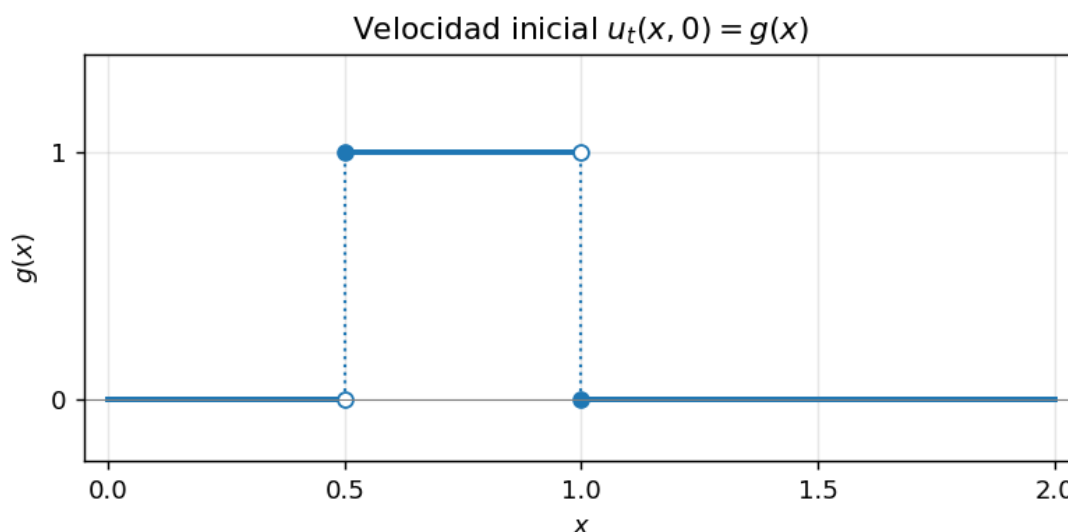
Enunciado. Una cuerda de longitud 2 con extremos fijos parte del reposo y recibe un impulso de velocidad constante sobre un tramo interior. El desplazamiento $u(x, t)$ satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con $u(0, t) = u(2, t) = 0$, desplazamiento inicial nulo $u(x, 0) = 0$ y velocidad inicial a trozos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{en el resto de } [0, 2]. \end{cases}$$

El perfil de $g(x)$ es:



Determina $u(x, t)$.

Separación de variables. Con extremos fijos, los modos son $\sin(n\pi x/2)$ y las frecuencias $\omega_n = c \frac{n\pi}{L} = 3 \cdot \frac{n\pi}{2} = \frac{3n\pi}{2}$. La solución general es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Desplazamiento inicial nulo. De $u(x, 0) = \sum_n A_n \sin(n\pi x/2) = 0$ se obtiene $A_n = 0$ para todo n . Solo sobreviven los términos en $\sin(\omega_n t)$.

Velocidad inicial: coeficientes del pulso. Derivando, $u_t(x, 0) = \sum_n \omega_n B_n \sin(n\pi x/2) = g(x)$. Los coeficientes son los de la serie de senos de g en $[0, 2]$:

$$\omega_n B_n = \frac{2}{2} \int_0^2 g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_{1/2}^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx.$$

Integrando sobre el único tramo no nulo,

$$\int_{1/2}^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \left[-\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_{1/2}^1 = \frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right].$$

Despeje de B_n . Dividiendo por $\omega_n = \frac{3n\pi}{2}$:

$$B_n = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \frac{4}{3n^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right].$$

Solución.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3n^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

El decaimiento $\sim 1/n^2$ de los coeficientes refleja que la velocidad inicial es discontinua (un pulso): la serie converge, pero más despacio que si el dato fuese suave.

Ejercicio 3

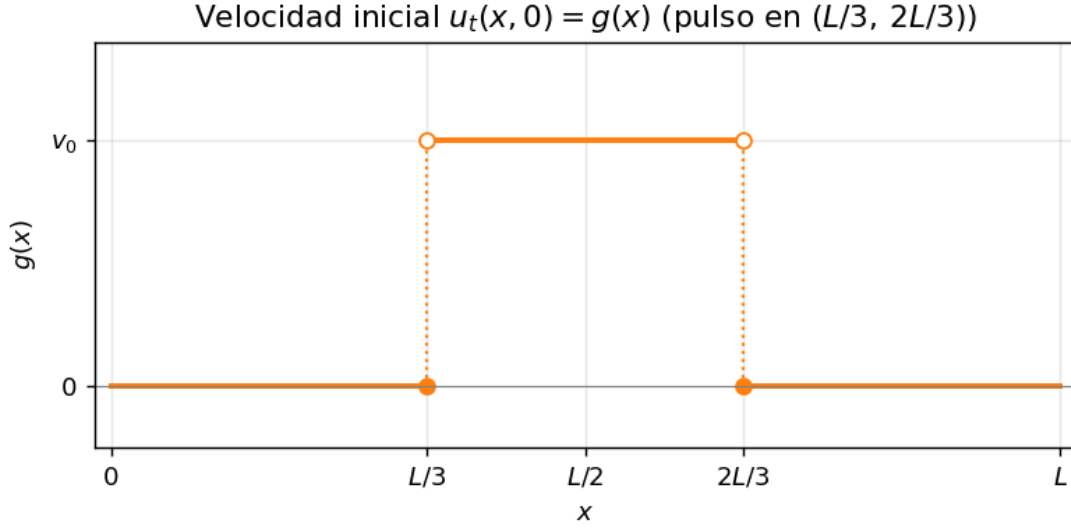
Enunciado. Una cuerda de longitud L con extremos fijos, gobernada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

y con $u(0, t) = u(L, t) = 0$, parte del segundo modo propio y recibe un impulso constante en el tercio central:

$$u(x, 0) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \begin{cases} v_0, & \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3}, \\ 0, & \text{en el resto de } [0, L]. \end{cases}$$

El perfil de la velocidad inicial es:



Determina $u(x, t)$ (deja L , c y v_0 como parámetros).

Separación de variables. Con extremos fijos, los modos son $\sin(n\pi x/L)$ y las frecuencias $\omega_n = \frac{cn\pi}{L}$. La solución general es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Desplazamiento inicial: un modo puro. Como $u(x, 0) = \sin(2\pi x/L)$ es exactamente el modo $n = 2$, se identifica directamente

$$A_2 = 1, \quad A_n = 0 \text{ para el resto,}$$

y su frecuencia asociada es $\omega_2 = \frac{2c\pi}{L}$.

Velocidad inicial: coeficientes del pulso. De $u_t(x, 0) = \sum_n \omega_n B_n \sin(n\pi x/L) = g(x)$ se obtienen los coeficientes de la serie de senos del pulso en $[0, L]$:

$$\omega_n B_n = \frac{2}{L} \int_{L/3}^{2L/3} v_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2v_0}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right].$$

Simetría del pulso. El pulso es simétrico respecto de $x = L/2$, por lo que su serie de senos solo contiene armónicos impares: el corchete se anula para todo n par. Dividiendo por $\omega_n = \frac{cn\pi}{L}$,

$$B_n = \frac{2v_0 L}{cn^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right].$$

Solución.

$$u(x, t) = \cos\left(\frac{2c\pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0 L}{c n^2 \pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right] \sin\left(\frac{c n \pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

El primer término es la vibración limpia del segundo modo, que perdura sin mezclarse; la serie recoge la respuesta al impulso, con coeficientes $\sim 1/n^2$ y solo armónicos impares por la simetría del pulso.

Ejercicio 5

Enunciado. Una barra elástica de longitud 2 tiene ambos extremos libres. El desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ obedece la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno de Neumann (extremos libres de tensión)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0,$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x(2 - x).$$

Determina $u(x, t)$ por separación de variables.

Separación de variables. Se busca $u(x, t) = X(x) T(t)$. Sustituyendo en la ecuación y dividiendo por $4XT$,

$$\frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

El problema espacial es $X'' + \lambda X = 0$ con $X'(0) = X'(2) = 0$.

Problema de Sturm-Liouville (Neumann). Las condiciones de derivada nula en ambos extremos seleccionan cosenos. Para $\lambda = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$ con $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Aquí aparece explícitamente el modo $n = 0$ (autovalor $\lambda_0 = 0$), que es constante en x .

Parte temporal. Para $n \geq 1$, $T_n'' + 4\lambda_n T_n = 0$ con frecuencia $\omega_n = 2 \cdot \frac{n\pi}{2} = n\pi$, así que

$$T_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t).$$

Para $n = 0$ la ecuación es $T_0'' = 0$, cuya solución es afín: $T_0(t) = A_0 + B_0 t$. Este término lineal en t es característico de Neumann: la barra libre puede desplazarse en bloque.

Solución general.

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t) \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Imposición de $u(x, 0) = 0$. Anula todos los cosenos de t , luego $A_n = 0$ para todo $n \geq 0$.

Imposición de la velocidad inicial. Derivando respecto a t y evaluando en $t = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n\pi \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = x(2-x).$$

Es el desarrollo en serie de cosenos de $g(x) = x(2-x)$ en $[0, 2]$. Sus coeficientes son $a_n = \int_0^2 x(2-x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$.

Cálculo de los coeficientes. El término medio:

$$\frac{B_0}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 x(2-x) dx = \frac{1}{2} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Para $n \geq 1$, integrando por partes dos veces,

$$a_n = \int_0^2 (2x - x^2) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{8[(-1)^n + 1]}{n^2\pi^2}.$$

Por la simetría de $x(2-x)$ respecto a $x = 1$, los modos impares se anulan: $a_n = 0$ si n es impar. Para $n = 2m$ par,

$$a_{2m} = -\frac{16}{(2m)^2\pi^2} = -\frac{4}{m^2\pi^2}.$$

De $B_n n\pi = a_n$ se obtiene, para $n = 2m$,

$$B_{2m} = \frac{a_{2m}}{2m\pi} = -\frac{4}{m^2\pi^2} \cdot \frac{1}{2m\pi} = -\frac{2}{m^3\pi^3},$$

mientras que el término medio aporta $\frac{B_0}{2} t = \frac{2}{3}t$. Los cosenos de argumento $\frac{2m\pi x}{2} = m\pi x$.

Solución.

$$u(x, t) = \frac{2}{3}t - \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m\pi t) \cos(m\pi x)}{m^3}$$

El término $\frac{2}{3}t$ es el movimiento del centro de masas: con ambos extremos libres el impulso inicial no está confinado y la barra deriva uniformemente, mientras los modos vibratorios oscilan alrededor de esa deriva.

Ejercicio 6

Enunciado. Un tubo de órgano de longitud 3 está cerrado en $x = 0$ y abierto en $x = 3$. La perturbación acústica $u(x, t)$ satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

con un extremo fijo y otro libre,

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0,$$

y con el tubo inicialmente en reposo al que se comunica un impulso uniforme,

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 6.$$

Halla $u(x, t)$ por separación de variables.

Separación de variables. Con $u(x, t) = X(x)T(t)$ y constante de separación $-\lambda$,

$$\frac{T''}{9T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Las condiciones son mixtas: $X(0) = 0$ (extremo fijo) y $X'(3) = 0$ (extremo libre).

Problema de Sturm-Liouville (fijo-libre). Con $\lambda > 0$, la condición $X(0) = 0$ da $X(x) = \text{sen}(\sqrt{\lambda}x)$. Imponiendo $X'(3) = \sqrt{\lambda} \cos(3\sqrt{\lambda}) = 0$ se necesita

$$3\sqrt{\lambda} = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Solo sobreviven los armónicos impares. Los autovalores y autofunciones son

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{(2n-1)\pi}{6}, \quad X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{6}\right).$$

Es la conocida serie de un tubo cerrado-abierto: solo frecuencias impares del armónico fundamental.

Parte temporal. La frecuencia es $\omega_n = 3\sqrt{\lambda_n} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$, de modo que

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right) + B_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right).$$

Solución general.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right) + B_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right) \right] \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{6}\right).$$

Imposición de $u(x, 0) = 0$. Todos los cosenos temporales se anulan: $A_n = 0$.

Imposición de la velocidad inicial. Derivando en t y evaluando en $t = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(2n-1)\pi}{2} \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{6}\right) = 6.$$

Hay que desarrollar la constante 6 en la base $\{\text{sen}(\sqrt{\lambda_n}x)\}$. La norma de cada autofunción es

$$\int_0^3 \text{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{6}\right) dx = \frac{3}{2},$$

y el numerador

$$\int_0^3 6 \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{6}\right) dx = 6 \cdot \frac{6}{(2n-1)\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)\right] = \frac{36}{(2n-1)\pi},$$

ya que $\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = 0$. El coeficiente del desarrollo es entonces

$$b_n = \frac{36/((2n-1)\pi)}{3/2} = \frac{24}{(2n-1)\pi}.$$

Cálculo de B_n . De $B_n \frac{(2n-1)\pi}{2} = b_n$,

$$B_n = \frac{2}{(2n-1)\pi} \cdot \frac{24}{(2n-1)\pi} = \frac{48}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

Solución.

$$u(x, t) = \frac{48}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{6}\right)$$

El decaimiento $1/(2n-1)^2$ hace que domine el modo fundamental $n = 1$: el tubo cerrado-abierto suena esencialmente en su tono base y en sus armónicos impares, de acuerdo con la física de los tubos de órgano tapados.

Ejercicio 7

Enunciado. Una cuerda flexible de longitud 6, con los extremos sujetos, se abandona desde el reposo con una deformación triangular **asimétrica**: parte del origen, sube hasta un pico de altura 4 situado en $x = 2$ y desciende hasta el otro extremo. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 6, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0, t) = u(6, t) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 6 - x, & 2 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Se pide:

7.1

Resolver el problema por **separación de variables** (método de Bernoulli), obteniendo la serie de Fourier de la solución.

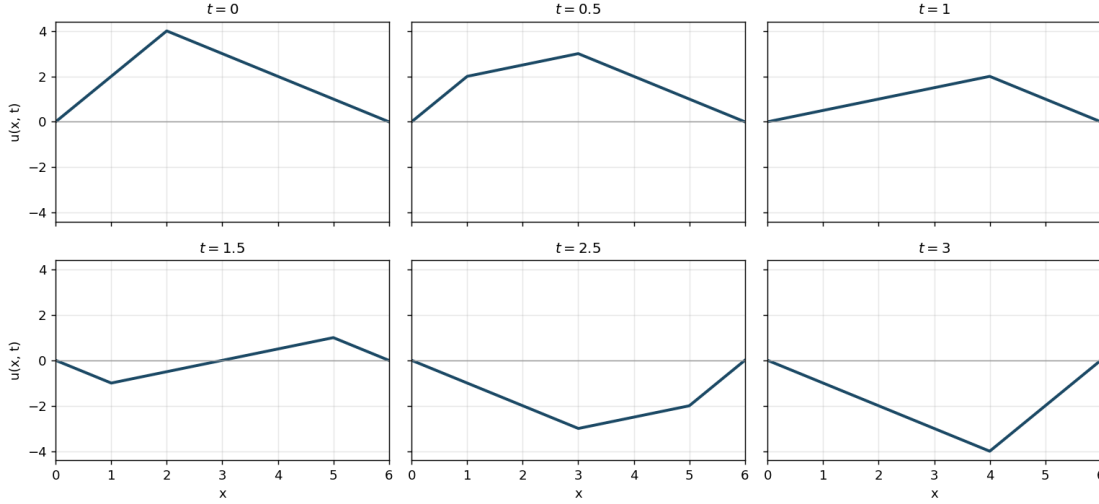
7.2

Resolver el **mismo** problema mediante la **fórmula de D'Alembert**, usando la extensión impar 12-periódica del dato, y comprobar que ambas expresiones coinciden.

7.3

Describir el fenómeno de propagación: velocidad de las ondas viajeras, papel de la reflexión en los extremos fijos y periodicidad temporal. Los siguientes fotogramas de la solución sirven de guía.

Onda triangular asimétrica: propagación por D'Alembert ($c = 2$)



Planteamiento y velocidad de propagación. La ecuación $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ tiene aquí $c^2 = 4$, es decir $c = 2$: las perturbaciones viajan a velocidad 2 en cada sentido. El dato es continuo pero con un vértice en $x = 2$, arranca del reposo ($u_t(x, 0) = 0$) y respeta las ligaduras $f(0) = f(6) = 0$, compatibles con los extremos fijos.

Método de Bernoulli. Separación. Con $u(x, t) = X(x)T(t)$ y extremos fijos, los modos propios que se anulan en $x = 0, 6$ son

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{6}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{6} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para cada modo, $T_n'' + c^2 \lambda_n T_n = 0$ con $c\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi c}{6} = \frac{n\pi}{3}$. La condición $u_t(x, 0) = 0$ elimina los senos temporales, de modo que $T_n(t) = \cos \frac{n\pi t}{3}$ y

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi t}{3} \sin \frac{n\pi x}{6}.$$

Coefficientes: desarrollo del triángulo pulsado. Imponiendo $t = 0$ queda $f(x) = \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{6}$, luego

$$b_n = \frac{2}{6} \int_0^6 f(x) \sin \frac{n\pi x}{6} dx = \frac{1}{3} \left[\int_0^2 2x \sin \frac{n\pi x}{6} dx + \int_2^6 (6-x) \sin \frac{n\pi x}{6} dx \right].$$

Integrando por partes cada trozo (con $\int x \sin kx dx = \frac{\sin kx - kx \cos kx}{k^2}$) los términos de frontera y los cosenos evaluados en $x = 2$ se cancelan entre ambas piezas, y sobrevive solo la contribución del

vértice. El resultado es la fórmula estándar de la cuerda pulsada de altura H con pico en $x = a$ sobre $[0, L]$,

$$b_n = \frac{2HL^2}{\pi^2 n^2 a(L-a)} \sin \frac{n\pi a}{L},$$

que con $H = 4$, $L = 6$, $a = 2$ da

$$b_n = \frac{36}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{3}$$

Como $\sin \frac{n\pi}{3} = 0$ cuando n es múltiplo de 3, **desaparece un modo de cada tres**: el pico en $x = 2 = \frac{L}{3}$ cae en un nodo de esos armónicos y no los excita. Para el resto, $\sin \frac{n\pi}{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, con signo $+$ si $n \equiv 1, 2 \pmod{6}$ y $-$ si $n \equiv 4, 5 \pmod{6}$. Así

$$u(x, t) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ 3 \nmid n}} \frac{\varepsilon_n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{3} \sin \frac{n\pi x}{6}, \quad \varepsilon_n = \pm 1,$$

cuyos primeros términos son

$$u(x, t) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi t}{3} \sin \frac{\pi x}{6} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi t}{3} \sin \frac{2\pi x}{6} - \frac{1}{16} \cos \frac{4\pi t}{3} \sin \frac{4\pi x}{6} - \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi t}{3} \sin \frac{5\pi x}{6} + \dots \right].$$

La caída $\sim n^{-2}$ de los coeficientes confirma que la serie converge uniformemente (el dato es continuo), sin fenómeno de Gibbs.

Método de D'Alembert. Ondas viajeras. Con velocidad inicial nula la solución de la cuerda infinita es $u(x, t) = \frac{1}{2}[F(x-ct) + F(x+ct)]$. Para incorporar los extremos fijos $u(0, t) = u(6, t) = 0$ se toma como F la **extensión impar y $2L$ -periódica** ($2L = 12$) del dato:

$$F(-x) = -F(x), \quad F(x+12) = F(x), \quad F(x) = f(x) \text{ en } [0, 6].$$

La imparidad garantiza $F(-ct) + F(ct) = 0$ en $x = 0$, y la periodicidad más la imparidad hacen lo propio en $x = 6$; ambos extremos permanecen quietos automáticamente. Con $c = 2$,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} F(x-2t) + \frac{1}{2} F(x+2t)$$

Esto expresa el dato como **suma de dos triángulos de media altura**: uno que viaja hacia la derecha y otro hacia la izquierda, ambos a velocidad 2. Al alcanzar un extremo, cada pulso se refleja invertido (por la imparidad de F), lo que reproduce el rebote en un apoyo fijo. Evaluando en $t = 0$ se recupera $u(x, 0) = F(x) = f(x)$, y el desarrollo en serie de Fourier de $\frac{1}{2}[F(x-2t) + F(x+2t)]$ mediante las identidades $\sin A \cos B$ devuelve término a término la serie de Bernoulli anterior: **ambos métodos coinciden**.

Interpretación del fenómeno. El semipulso derecho e izquierdo se separan del vértice inicial y recorren la cuerda; la asimetría (pico en $x = 2$, más cerca del extremo izquierdo) hace que las pendientes de los dos flancos, $+2$ y -1 , se conserven en los pulsos viajeros y produzcan un perfil que se deforma de manera no simétrica al superponerse las reflexiones. El periodo temporal es

$$T = \frac{2L}{c} = \frac{12}{2} = 6,$$

de modo que $u(x, t+6) = u(x, t)$. En el semiperiodo $t = 3$ los dos pulsos, ya reflejados e invertidos, se recombinan en la imagen especular negada del dato, $u(x, 3) = -f(6-x)$ (mínimo -4 en $x = 4$), como muestran los fotogramas; en $t = 6$ la cuerda regresa exactamente a su forma inicial. La frecuencia fundamental es $\omega_1 = \frac{\pi c}{L} = \frac{\pi}{3}$, coherente con el primer armónico de la serie.

Ejercicio 8

Enunciado. Una cuerda de longitud 3, con los extremos fijos y en reposo, se somete a una fuerza externa distribuida que oscila armónicamente en el tiempo. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (x-3) \cos(2t), \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = u(3, t) = 0$ y las condiciones iniciales $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$. Halla $u(x, t)$.

Descomposición en parte forzada más parte homogénea. El término independiente es de la forma $g(x) \cos(\omega t)$ con $g(x) = x-3$ y $\omega = 2$. Buscamos una solución particular que oscile a la misma frecuencia,

$$u_p(x, t) = \varphi(x) \cos(2t),$$

y escribimos $u = v + u_p$, donde v resolverá el problema de ondas homogéneo asociado.

Ecuación para φ . Con $u_p = \varphi(x) \cos(2t)$ se tiene $\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = -4\varphi \cos(2t)$ y $\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} = \varphi'' \cos(2t)$. Sustituyendo en la ecuación,

$$(-4\varphi - 9\varphi'') \cos(2t) = (x-3) \cos(2t) \implies 9\varphi'' + 4\varphi = 3-x,$$

con $\varphi(0) = \varphi(3) = 0$ para que u_p herede las condiciones de contorno.

Comprobación de no resonancia. La ecuación homogénea $\varphi'' + \frac{4}{9}\varphi = 0$ tiene soluciones $\cos(\frac{2x}{3})$, $\sin(\frac{2x}{3})$. Las frecuencias propias de la cuerda son $\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi \cdot 3}{3} = n\pi$. Como $\omega = 2 \neq n\pi$ para todo n (equivalentemente $\sin(\frac{2}{3} \cdot 3) = \sin 2 \neq 0$), no hay resonancia y la particular existe.

Resolución de la EDO. Una particular polinómica es $\varphi_p = \frac{3-x}{4}$. La solución general es

$$\varphi(x) = \frac{3-x}{4} + C_1 \cos\left(\frac{2x}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{2x}{3}\right).$$

De $\varphi(0) = \frac{3}{4} + C_1 = 0$ sale $C_1 = -\frac{3}{4}$; de $\varphi(3) = C_1 \cos 2 + C_2 \sin 2 = 0$ sale $C_2 = \frac{3 \cos 2}{4 \sin 2}$. Por tanto

$$\varphi(x) = \frac{3-x}{4} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{3 \cos 2}{4 \sin 2} \sin\left(\frac{2x}{3}\right).$$

Problema homogéneo para v . La función $v = u - \varphi(x) \cos(2t)$ cumple $v_{tt} = 9v_{xx}$, con $v(0, t) = v(2, t) = 0$ y condiciones iniciales

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \varphi(x) = -\varphi(x), \quad v_t(x, 0) = u_t(x, 0) + 2\varphi(x) \sin 0 = 0.$$

Por separación de variables, con $\omega_n = n\pi$,

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \cos(n\pi t), \quad b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 (-\varphi(x)) \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx.$$

El cálculo de la integral da

$$b_n = \frac{6}{\pi n (\pi^2 n^2 - 4)}.$$

Solución.

$$u(x, t) = \varphi(x) \cos(2t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi n (\pi^2 n^2 - 4)} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \cos(n\pi t)$$

donde $\varphi(x) = \frac{3-x}{4} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{3 \cos 2}{4 \sin 2} \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$.

El primer sumando es la respuesta forzada, que oscila a la frecuencia externa $\omega = 2$; los factores $\frac{1}{\pi^2 n^2 - 4} = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2}$ muestran la amplificación de cada modo, finita porque ninguna frecuencia propia iguala a ω .

Ejercicio 9

Enunciado. Una cuerda de longitud 2 con los extremos fijos cuelga en reposo bajo la acción de una carga uniforme constante (su propio peso). El desplazamiento $u(x, t)$ satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con $u(0, t) = u(2, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$. Determina $u(x, t)$.

Descomposición $u = v + \psi(x)$. La fuente -6 es constante e independiente del tiempo, así que buscamos primero el estado estacionario $\psi(x)$ (el perfil de equilibrio) y escribimos $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$.

Estado estacionario. Imponiendo $\psi_{tt} = 0$,

$$0 = 4\psi'' - 6 \implies \psi'' = \frac{3}{2} \implies \psi(x) = \frac{3}{4}x^2 + ax + b.$$

Las condiciones $\psi(0) = 0$ y $\psi(2) = 0$ dan $b = 0$ y $3 + 2a = 0$, es decir $a = -\frac{3}{2}$. Así

$$\psi(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{3}{4}x(x - 2),$$

una parábola que representa la flecha estática de la cuerda bajo la carga.

Problema homogéneo para v . Restando, $v = u - \psi$ cumple $v_{tt} = 4v_{xx}$, con $v(0, t) = v(2, t) = 0$ y

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \psi(x) = -\psi(x) = \frac{3}{4}x(2 - x), \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Con $\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi \cdot 2}{2} = n\pi$, la separación de variables da

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos(n\pi t), \quad b_n = \int_0^2 \frac{3}{4} x(2-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx.$$

Coeficientes. La integral de la parábola por el seno da

$$b_n = \frac{12(1 - (-1)^n)}{\pi^3 n^3} = \begin{cases} \frac{24}{\pi^3 n^3}, & n \text{ impar}, \\ 0, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Solo sobreviven los armónicos impares.

Solución.

$$u(x, t) = \frac{3}{4} x(x-2) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{24}{\pi^3 n^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos(n\pi t)$$

La parábola $\frac{3}{4}x(x-2)$ es la posición de equilibrio bajo el peso; la serie describe las oscilaciones libres que, superpuestas, mantienen la cuerda inicialmente recta y en reposo.

Ejercicio 10

Enunciado. Una cuerda de longitud 2 con los extremos fijos, inicialmente en reposo, está sometida a una carga distribuida estacionaria que depende solo de la posición. El desplazamiento $u(x, t)$ satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x^2, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con $u(0, t) = u(2, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$. Halla $u(x, t)$.

Descomposición $u = v + \varphi(x)$. El forzado $3x^2$ no depende del tiempo, así que buscamos una particular estacionaria $\varphi(x)$ que absorba la carga y escribimos $u = v + \varphi(x)$.

Particular polinómica. Imponiendo $\varphi_{tt} = 0$,

$$0 = \varphi'' + 3x^2 \implies \varphi'' = -3x^2.$$

Integrando dos veces, $\varphi(x) = -\frac{x^4}{4} + ax + b$. Las condiciones $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(2) = 0$ dan $b = 0$ y $-4 + 2a = 0$, es decir $a = 2$. Por tanto

$$\varphi(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x = \frac{x(8-x^3)}{4}.$$

Problema homogéneo para v . La función $v = u - \varphi$ cumple $v_{tt} = v_{xx}$, con $v(0, t) = v(2, t) = 0$ y

$$v(x, 0) = -\varphi(x), \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Aquí $c = 1$ y $L = 2$, luego $\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{2}$, y

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right), \quad b_n = \int_0^2 (-\varphi(x)) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx.$$

Coeficientes. Integrando por partes el polinomio de cuarto grado contra el seno,

$$b_n = \frac{96 [(-1)^n (\pi^2 n^2 - 2) + 2]}{\pi^5 n^5}.$$

Solución.

$$u(x, t) = \frac{x(8 - x^3)}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{96 [(-1)^n (\pi^2 n^2 - 2) + 2]}{\pi^5 n^5} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

El término $\varphi(x)$ es la deformación estática que equilibra la carga $3x^2$; la serie son las vibraciones libres que devuelven a cero la posición y la velocidad iniciales.

Ejercicio 11

Enunciado. El desplazamiento $u(x, t)$ de una cuerda de longitud 1 con los extremos fijos, en reposo, sometida a una carga estacionaria de perfil cosenoidal, satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 9\pi^2 \cos(3\pi x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$. Halla $u(x, t)$.

Reescritura y descomposición. Ordenando la ecuación,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9\pi^2 \cos(3\pi x).$$

El forzado $9\pi^2 \cos(3\pi x)$ no depende del tiempo, así que buscamos una particular estacionaria $\varphi(x)$ y escribimos $u = v + \varphi(x)$.

Particular trigonométrica. Imponiendo $\varphi_{tt} = 0$,

$$0 = \varphi'' + 9\pi^2 \cos(3\pi x) \implies \varphi'' = -9\pi^2 \cos(3\pi x).$$

Como $\frac{d^2}{dx^2} \cos(3\pi x) = -9\pi^2 \cos(3\pi x)$, una particular es $\cos(3\pi x)$; el coeficiente $9\pi^2$ está elegido justo para que cierre. La solución general es $\varphi(x) = \cos(3\pi x) + ax + b$. De $\varphi(0) = 1 + b = 0$ sale $b = -1$; de $\varphi(1) = \cos(3\pi) + a - 1 = -2 + a = 0$ sale $a = 2$. Así

$$\varphi(x) = \cos(3\pi x) + 2x - 1.$$

Problema homogéneo para v . La función $v = u - \varphi$ cumple $v_{tt} = v_{xx}$, con $v(0, t) = v(1, t) = 0$ y

$$v(x, 0) = -\varphi(x), \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Con $c = 1$, $L = 1$ se tiene $\omega_n = n\pi$, y

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \cos(n\pi t), \quad b_n = 2 \int_0^1 (-\varphi(x)) \operatorname{sen}(n\pi x) dx.$$

Coeficientes. El aporte del término lineal $2x - 1$ se anula por simetría para todo n , y el de $\cos(3\pi x)$ solo sobrevive para n par:

$$b_n = \begin{cases} -\frac{36}{\pi n(n^2 - 9)}, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

(El caso $n = 3$ no plantea singularidad, pues es impar y su coeficiente es nulo.)

Solución.

$$u(x, t) = \cos(3\pi x) + 2x - 1 - \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{36}{\pi n(n^2 - 9)} \sin(n\pi x) \cos(n\pi t)$$

El término $\varphi(x) = \cos(3\pi x) + 2x - 1$ es la deflexión estática producida por la carga; la serie de modos libres la compensa en $t = 0$ para respetar el reposo inicial.

Ejercicio 12

Enunciado. Un medio elástico unidimensional con ambos extremos libres ocupa el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ y vibra según la ecuación de ondas forzada

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16 \cos(4x) \sin(2t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno de Neumann (extremos libres)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0,$$

y partiendo del reposo

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Determina $u(x, t)$ y describe el comportamiento de la amplitud cuando t crece.

Velocidad de propagación y frecuencias naturales. Escribiendo la parte homogénea como $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}$ se identifica $c^2 = \frac{1}{4}$, es decir $c = \frac{1}{2}$. Con condiciones de Neumann en $[0, \pi]$ las funciones propias son $\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y cada modo $\cos(nx)$ oscila con frecuencia natural

$$\omega_n = c n = \frac{1}{2} n.$$

El forzado excita un único modo. El término $16 \cos(4x) \sin(2t)$ es proporcional a la función propia $\cos(4x)$, cuya frecuencia natural es $\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$. Como el resto de modos no aparecen en el dato ni en el forzado, y el sistema parte del reposo, la respuesta es puramente el modo $n = 4$. Se propone

$$u(x, t) = T(t) \cos(4x).$$

Reducción a una ecuación temporal. Sustituyendo, $4u_{tt} - u_{xx} = (4T'' + 16T) \cos(4x)$, e igualando con $16 \cos(4x) \sin(2t)$,

$$4T'' + 16T = 16 \sin(2t) \implies T'' + 4T = 4 \sin(2t).$$

Resonancia. La frecuencia natural del oscilador temporal es $\sqrt{4} = 2$, exactamente la frecuencia del forzado $\sin(2t)$: se trata de resonancia pura. La solución particular no puede ser del tipo $a \sin(2t) + b \cos(2t)$ (esa forma resuelve la homogénea), sino que incorpora un factor secular. Para $T'' + \omega_0^2 T = F \sin(\omega_0 t)$ la particular resonante es $T_p = -\frac{F}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$; con $\omega_0 = 2$ y $F = 4$,

$$T_p = -t \cos(2t).$$

Solución general e imposición de los datos. La solución completa de la ODE es

$$T(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) - t \cos(2t).$$

De $T(0) = 0$ se obtiene $C_1 = 0$. Derivando, $T'(t) = 2C_2 \cos(2t) - \cos(2t) + 2t \sin(2t)$, y $T'(0) = 2C_2 - 1 = 0$ da $C_2 = \frac{1}{2}$. Por tanto

$$T(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) - t \cos(2t).$$

Solución.

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{2} \sin 2t - t \cos 2t \right) \cos 4x$$

La amplitud del modo excitado crece sin cota: la envolvente del término $t \cos(2t)$ aumenta linealmente con el tiempo. Físicamente el forzado inyecta energía en fase con la oscilación natural del modo $\cos(4x)$, y al coincidir la frecuencia forzante con $\omega_4 = 2$ el medio acumula energía indefinidamente. En un sistema real este crecimiento se ve limitado por el amortiguamiento o por efectos no lineales que aquí se han despreciado.

Ejercicio 13

Enunciado. Una barra de longitud $L = 3$ y difusividad térmica $\kappa^2 = 1,05$ tiene sus dos extremos mantenidos a 0 grados. Su temperatura inicial es uniforme e igual a 20 grados. Determina la temperatura $u(x, t)$ resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 1,05 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(3, t) = 0, & u(x, 0) &= 20. \end{aligned}$$

Separación de variables. Las condiciones de contorno son homogéneas ($u = 0$ en ambos extremos), así que buscamos soluciones producto $u(x, t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación y dividiendo por $\kappa^2 XT$,

$$\frac{T'}{\kappa^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

con λ constante de separación (el signo negativo se anticipa para que la solución no crezca en el tiempo). El problema se desacopla en

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \kappa^2 \lambda T = 0.$$

Problema de contorno en X . Las condiciones $u(0, t) = u(3, t) = 0$ obligan a $X(0) = X(3) = 0$. Este problema de Sturm-Liouville tiene autovalores y autofunciones

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2, \quad X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Parte temporal. Con ese λ_n , la ecuación $T' + \kappa^2 \lambda_n T = 0$ tiene por solución la exponencial decreciente $T_n(t) = e^{-1,05(n\pi/3)^2 t}$. Por superposición,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} e^{-1,05(n\pi/3)^2 t}.$$

Ajuste del dato inicial. En $t = 0$ se debe cumplir $u(x, 0) = 20$, de modo que los b_n son los coeficientes del desarrollo en senos de la constante 20 en $[0, 3]$:

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 20 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{40}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{40}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Este factor vale 0 para n par y $\frac{80}{n\pi}$ para n impar. Escribiendo $n = 2k - 1$ para recorrer solo los impares, $b_{2k-1} = \frac{80}{(2k-1)\pi}$.

Solución.

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{3} e^{-1,05\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}\right)^2 t}$$

El estado estacionario es $u \equiv 0$: la barra se enfría hacia sus extremos. El primer modo ($k = 1$) domina el decaimiento, y los modos altos, con exponente proporcional a $(2k-1)^2$, se apagan mucho más deprisa, de modo que el perfil se suaviza rápidamente hacia una semionda seno.

Ejercicio 14

Enunciado. La misma barra ($L = 3$, $\kappa^2 = 1,5$), pero ahora con el extremo izquierdo mantenido a 20 grados y el derecho a 80 grados, partiendo de temperatura inicial uniforme 10:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1,5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = 20, \quad u(3, t) = 80, \quad u(x, 0) = 10.$$

Descomposición estacionario + transitorio. Las condiciones de contorno ya no son homogéneas, así que no podemos separar variables directamente. Buscamos primero el estado estacionario $u_s(x)$, el que ya no depende del tiempo: haciendo $\partial u / \partial t = 0$ queda $u_s'' = 0$, es decir un perfil lineal $u_s(x) = Ax + B$. Imponiendo $u_s(0) = 20$ y $u_s(3) = 80$ se obtiene $B = 20$, $A = 20$:

$$u_s(x) = 20 + 20x.$$

Escribimos entonces $u(x, t) = u_s(x) + v(x, t)$. Al restar, la parte transitoria v hereda la misma ecuación del calor pero con condiciones de contorno ya homogéneas:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 1,5 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(0, t) = v(3, t) = 0, \quad v(x, 0) = 10 - (20 + 20x) = -10 - 20x.$$

Resolución del transitorio. Es el problema homogéneo del ejercicio anterior con otro dato inicial. Los autovalores y autofunciones son los mismos, $\text{sen } \frac{n\pi x}{3}$, y

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{3} e^{-1,5 (n\pi/3)^2 t}.$$

Coefficientes. Desarrollamos $v(x, 0) = -10 - 20x$ en senos sobre $[0, 3]$:

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 (-10 - 20x) \text{sen} \frac{n\pi x}{3} dx.$$

La parte constante -10 aporta $-\frac{20}{n\pi}(1 - (-1)^n)$; la parte lineal $-20x$, integrando por partes, aporta $\frac{120}{n\pi}(-1)^n$. Sumando ambas contribuciones,

$$b_n = \frac{20(7(-1)^n - 1)}{n\pi}.$$

Solución.

$$u(x, t) = 20 + 20x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20(7(-1)^n - 1)}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi x}{3} e^{-1,5 (n\pi/3)^2 t}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ todas las exponenciales se anulan y $u \rightarrow u_s(x) = 20 + 20x$: la barra se establece en el perfil lineal de temperaturas impuesto por los extremos. El transitorio v es la corrección que borra el desajuste inicial entre el dato 10 y ese perfil lineal.

Ejercicio 15

Enunciado. Resuelve la ecuación del calor con difusividad $\kappa^2 = 0,9$ en $[0, 2]$, extremos mantenidos a 0 y perfil inicial $5 \text{sen} \frac{3\pi x}{2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad u(x, 0) = 5 \text{sen} \frac{3\pi x}{2}.$$

Separación de variables. Con extremos homogéneos en $[0, 2]$, las autofunciones son $\text{sen} \frac{n\pi x}{2}$ con autovalores $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$, y la solución general es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{2} e^{-0,9 (n\pi/2)^2 t}.$$

Ajuste del dato inicial. El dato ya es una autofunción pura: $u(x, 0) = 5 \text{sen} \frac{3\pi x}{2}$, que es exactamente el modo $n = 3$. Por ortogonalidad de los senos, al desarrollar en la base $\{\text{sen} \frac{n\pi x}{2}\}$

solo sobrevive el término $n = 3$ con coeficiente $b_3 = 5$; todos los demás b_n son nulos. No hace falta integrar: basta identificar coeficientes.

Solución.

$$u(x, t) = 5 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} e^{-0,9(\frac{3\pi}{2})^2 t}$$

Al ser un único modo, el perfil conserva exactamente su forma senoidal (tres semiondas) y solo decae en amplitud, con constante de tiempo $1/[0,9(3\pi/2)^2]$. El estado estacionario es $u \equiv 0$.

Ejercicio 16

Enunciado. El mismo problema en $[0, 2]$ con difusividad unidad, pero con extremos a 30 y 10 grados y perfil inicial $2 \operatorname{sen}(\pi x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = 30, \quad u(2, t) = 10, \quad u(x, 0) = 2 \operatorname{sen}(\pi x).$$

Estado estacionario. Como las condiciones de contorno son no homogéneas, separamos $u = u_s(x) + v(x, t)$. El estacionario cumple $u_s'' = 0$ con $u_s(0) = 30$, $u_s(2) = 10$, de donde

$$u_s(x) = 30 - 10x.$$

Problema transitorio. La parte v satisface la ecuación del calor con extremos ya homogéneos y dato inicial corregido:

$$v(0, t) = v(2, t) = 0, \quad v(x, 0) = 2 \operatorname{sen}(\pi x) - (30 - 10x),$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} e^{-(n\pi/2)^2 t}.$$

Coeficientes. Desarrollamos $v(x, 0)$ en senos sobre $[0, 2]$, con $b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 v(x, 0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx$. Conviene separar las dos partes del dato:

- El término $2 \operatorname{sen}(\pi x) = 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{2}$ es ya la autofunción $n = 2$: aporta 2 al coeficiente b_2 y nada al resto.
- La parte lineal $-(30 - 10x)$ se integra por partes y da, para cada n ,

$$-\frac{20}{n\pi}(3 - (-1)^n).$$

Reuniendo ambas contribuciones, para el modo $n = 2$ resulta $b_2 = 2 - \frac{20}{\pi}$, y para los restantes $n \neq 2$

$$b_n = -\frac{20}{n\pi}(3 - (-1)^n).$$

Solución.

$$u(x, t) = 30 - 10x + \left(2 - \frac{20}{\pi}\right) \operatorname{sen}(\pi x) e^{-\pi^2 t} - \frac{20}{\pi} \sum_{n \neq 2} \frac{3 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} e^{-(n\pi/2)^2 t}$$

Para $t \rightarrow \infty$ toda la serie se apaga y queda $u \rightarrow u_s(x) = 30 - 10x$, el perfil lineal entre 30 y 10 grados. El decaimiento es de nuevo modo a modo, dominado por los armónicos bajos; el modo $n = 2$ combina el aporte del dato senoidal con la corrección del perfil lineal.

Ejercicio 17

Enunciado. Una varilla de longitud 3 tiene sus extremos mantenidos a temperatura nula y evoluciona según la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno $u(0, t) = 0$, $u(3, t) = 0$ y distribución inicial de temperatura

$$u(x, 0) = x(3 - x).$$

Halla $u(x, t)$ mediante separación de variables.

Separación de variables. Buscamos soluciones producto $u(x, t) = X(x)T(t)$ que anulen los extremos. Al sustituir en la ecuación y dividir por $2XT$ se obtiene

$$\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

constante de separación. El problema espacial $X'' + \lambda X = 0$ con $X(0) = X(3) = 0$ es un problema de Sturm-Liouville cuyos autovalores y autofunciones son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2, \quad X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Parte temporal. Para cada n , la ecuación $T' = -2\lambda_n T$ da $T_n(t) = e^{-2(n\pi/3)^2 t}$. Superponiendo modos,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} e^{-2(\frac{n\pi}{3})^2 t}.$$

Coefficientes: serie de senos de la parábola. Imponiendo $u(x, 0) = x(3 - x)$ se identifican los b_n con los coeficientes del desarrollo en senos en $[0, 3]$:

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 x(3 - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} dx.$$

Integrando por partes dos veces (el término $x(3 - x)$ es un polinomio de grado dos, por lo que aparecen tanto la primera como la segunda primitiva) se llega a

$$b_n = \frac{4 \cdot 3^2}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) = \frac{36}{n^3 \pi^3} (1 - \cos n\pi).$$

Como $1 - (-1)^n$ vale 2 para n impar y 0 para n par, solo sobreviven los armónicos impares:

$$b_n = \frac{72}{n^3\pi^3} \quad (n \text{ impar}), \quad b_n = 0 \quad (n \text{ par}).$$

Solución.

$$u(x, t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{72}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi x}{3} e^{-2\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2 t}$$

El primer armónico ($n = 1$) domina: su factor temporal $e^{-2\pi^2 t/9}$ decae más lento que los demás, de modo que para tiempos moderados el perfil se aproxima a una única semionda senoidal que se aplanan hacia el equilibrio nulo.

Ejercicio 18

Enunciado. Una varilla de longitud 2 tiene sus dos extremos térmicamente aislados (flujo de calor nulo) y su temperatura obedece

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con condiciones de Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0$ y temperatura inicial

$$u(x, 0) = 3 - x.$$

Determina $u(x, t)$ y su valor límite cuando $t \rightarrow \infty$.

Separación de variables con extremos aislados. Con $u(x, t) = X(x)T(t)$ y $X'' + \lambda X = 0$, las condiciones de flujo nulo $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$ se traducen en $X'(0) = X'(2) = 0$. Este problema de Neumann admite el autovalor nulo y los cosenos:

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0 = 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad n \geq 1.$$

Superposición. La parte temporal es $T_n(t) = e^{-3\lambda_n t}$, y el modo $n = 0$ es constante en el tiempo. Por tanto

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2} e^{-3\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}.$$

Término medio. El coeficiente $a_0/2$ es el valor medio del dato inicial:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 (3 - x) dx = \frac{1}{2} \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} (6 - 2) = 2.$$

Coefficientes de los cosenos.

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 (3 - x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^2 (3 - x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx.$$

La constante 3 no contribuye porque $\int_0^2 \cos(n\pi x/2) dx = 0$. Queda, integrando por partes $\int_0^2 x \cos(n\pi x/2) dx = \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$:

$$a_n = -\frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) = \frac{4}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n).$$

Solo los índices impares sobreviven:

$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2} \quad (n \text{ impar}), \quad a_n = 0 \quad (n \text{ par}).$$

Solución.

$$u(x, t) = 2 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} e^{-3(\frac{n\pi}{2})^2 t}$$

Con extremos aislados no se pierde calor por la frontera, de modo que la energía total se conserva: la temperatura media permanece igual a 2 en todo instante. Cuando $t \rightarrow \infty$ los cosenos se amortiguan y $u(x, t) \rightarrow 2$, la temperatura de equilibrio uniforme igual al promedio del dato inicial.

Ejercicio 19

Enunciado. Una barra de longitud 1 se calienta mediante una fuente interna que decae exponencialmente con la posición. Su temperatura satisface la ecuación no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9e^{-3x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno fijas

$$u(0, t) = -\frac{1}{2}, \quad u(1, t) = -\frac{1}{2}e^{-3},$$

y distribución inicial

$$u(x, 0) = 3 \sin(4\pi x) - \frac{1}{2}e^{-3x}.$$

Halla $u(x, t)$ descomponiéndola en una parte estacionaria y una parte transitoria, y describe el comportamiento a largo plazo.

Estrategia $u = \varphi(x) + v(x, t)$. Como la fuente y las condiciones de contorno no dependen del tiempo, buscamos primero un estado estacionario $\varphi(x)$ que absorba tanto el término no homogéneo como los valores de frontera; la diferencia $v = u - \varphi$ resolverá entonces un problema homogéneo con contorno nulo.

Parte estacionaria: la particular que reproduce la fuente. Imponiendo $\partial_t \varphi = 0$ en la ecuación,

$$2\varphi''(x) + 9e^{-3x} = 0 \implies \varphi''(x) = -\frac{9}{2}e^{-3x}.$$

Integrando dos veces, y observando que $\frac{d^2}{dx^2}e^{-3x} = 9e^{-3x}$, una particular es $-\frac{1}{2}e^{-3x}$; la solución general añade una recta:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x} + C_1x + C_2.$$

Las constantes se fijan con el contorno. Como

$$\varphi(0) = -\frac{1}{2} + C_2 = -\frac{1}{2}, \quad \varphi(1) = -\frac{1}{2}e^{-3} + C_1 + C_2 = -\frac{1}{2}e^{-3},$$

resulta $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Por tanto la estacionaria es exactamente la exponencial que equilibra la fuente:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x}.$$

Parte transitoria: problema homogéneo. Escribiendo $v = u - \varphi$, y usando que φ satisface la ecuación estacionaria, se cancela la fuente:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(0, t) = v(1, t) = 0.$$

El dato inicial de v es lo que queda al restar la estacionaria:

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \varphi(x) = 3 \sin(4\pi x) - \frac{1}{2}e^{-3x} - \left(-\frac{1}{2}e^{-3x}\right) = 3 \sin(4\pi x).$$

Resolución del transitorio. Los modos de Dirichlet en $[0, 1]$ son $\sin(n\pi x)$ con factor temporal $e^{-2(n\pi)^2 t}$. El dato $3 \sin(4\pi x)$ es directamente el modo $n = 4$, sin necesidad de calcular una serie completa: todos los demás coeficientes son nulos. Así,

$$v(x, t) = 3 \sin(4\pi x) e^{-2(4\pi)^2 t} = 3 \sin(4\pi x) e^{-32\pi^2 t}.$$

Solución.

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}e^{-3x} + 3 \sin(4\pi x) e^{-32\pi^2 t}$$

El término oscilante se amortigua con enorme rapidez, pues $32\pi^2 \approx 315$: el modo $n = 4$ tiene número de onda alto y por tanto se difunde de inmediato. Lo que perdura es el perfil estacionario $-\frac{1}{2}e^{-3x}$, único equilibrio compatible con la fuente $9e^{-3x}$ y con el contorno impuesto; el signo negativo indica que, en ausencia de otro aporte, la fuente exponencial y las condiciones de frontera sostienen una distribución de temperaturas por debajo del cero de referencia, más fría hacia $x = 0$ y tendiendo a $-\frac{1}{2}e^{-3}$ en $x = 1$.

Ejercicio 20

Enunciado. Una varilla de longitud 2 con los extremos a temperatura nula se calienta uniformemente por una fuente constante. Su temperatura cumple

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con $u(0, t) = 0$, $u(2, t) = 0$ y temperatura inicial nula $u(x, 0) = 0$. Halla $u(x, t)$ y la distribución de temperaturas de equilibrio.

Descomposición $u = \varphi(x) + v(x, t)$. La fuente $+6$ es constante, así que buscamos un estado estacionario $\varphi(x)$ que la absorba y una parte transitoria v con contorno nulo.

Estado estacionario parabólico. Con $\partial_t \varphi = 0$,

$$2 \varphi''(x) + 6 = 0 \quad \implies \quad \varphi''(x) = -3,$$

de donde $\varphi(x) = -\frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$. Imponiendo $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(2) = 0$ se obtiene $C_2 = 0$ y $-6 + 2C_1 = 0$, es decir $C_1 = 3$:

$$\varphi(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2}x(2-x).$$

Es una parábola simétrica respecto de $x = 1$, con temperatura máxima $\varphi(1) = \frac{3}{2}$ en el centro.

Parte transitoria. Al restar, $v = u - \varphi$ satisface la ecuación homogénea

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(0, t) = v(2, t) = 0,$$

con dato inicial

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \varphi(x) = -\frac{3}{2}x(2-x).$$

Serie de senos del dato transitorio. Desarrollamos $v(x, 0)$ en la base $\sin(n\pi x/2)$ de $[0, 2]$:

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x(2-x)\right) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{3}{2} \int_0^2 x(2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx.$$

La integral de la parábola vale $\int_0^2 x(2-x) \sin(n\pi x/2) dx = \frac{16}{n^3\pi^3}(1 - (-1)^n)$, que anulada para n par da

$$b_n = -\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{n^3\pi^3}(1 - (-1)^n) = -\frac{48}{n^3\pi^3} \quad (n \text{ impar}), \quad b_n = 0 \quad (n \text{ par}).$$

Cada modo lleva su factor $e^{-2(n\pi/2)^2 t} = e^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}$.

Solución.

$$u(x, t) = \frac{3}{2}x(2-x) - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{48}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi x}{2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}$$

Partiendo de temperatura nula, el calentamiento uniforme eleva la barra hasta el perfil parabólico de equilibrio $\varphi(x) = \frac{3}{2}x(2-x)$; la serie de senos, toda ella con exponentes negativos, describe el transitorio de subida y se desvanece cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejercicio 28

Enunciado. Una cuerda de longitud unidad, con los extremos fijos, se somete a un forzado espacialmente cuadrático que oscila en el tiempo:

$$9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (x^2 - x) \sin(3t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con condiciones de contorno de Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Halla la oscilación forzada estacionaria de la forma $u(x, t) = f(x) \sin(3t)$ compatible con los extremos fijos, y razona si el sistema entra en resonancia.

Ansatz de respuesta forzada. Se busca la parte que oscila a la frecuencia del forzado, $u(x, t) = f(x) \sin(3t)$. Entonces $u_{xx} = f''(x) \sin(3t)$ y $u_{tt} = -9f(x) \sin(3t)$, de modo que

$$9u_{xx} - u_{tt} = 9(f'' + f) \sin(3t).$$

Igualando con $(x^2 - x) \sin(3t)$ se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para f :

$$f'' + f = \frac{1}{9}(x^2 - x), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

Las condiciones de contorno de f son las de la cuerda, porque $f(0) = f(1) = 0$ garantiza $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Solución particular polinómica. Como el término independiente es un polinomio de grado dos, se ensaya $f_p = ax^2 + bx + d$. Entonces $f_p'' + f_p = ax^2 + bx + (d + 2a)$, que igualado a $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x$ da

$$a = \frac{1}{9}, \quad b = -\frac{1}{9}, \quad d = -2a = -\frac{2}{9},$$

es decir $f_p = \frac{1}{9}(x^2 - x - 2)$.

Solución homogénea y ajuste de contorno. La homogénea de $f'' + f = 0$ es $C_1 \cos x + C_2 \sin x$, luego

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{9}(x^2 - x - 2).$$

Imponiendo $f(0) = 0$: $C_1 - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{9}$. Imponiendo $f(1) = 0$:

$$\frac{2}{9} \cos 1 + C_2 \sin 1 - \frac{2}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{2}{9} \frac{1 - \cos 1}{\sin 1} = \frac{2}{9} \tan \frac{1}{2},$$

donde se ha usado la identidad del ángulo mitad $\frac{1 - \cos 1}{\sin 1} = \tan \frac{1}{2}$.

Solución.

$$u(x, t) = \left[\frac{2}{9} \cos x + \frac{2}{9} \tan \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{9}(x^2 - x - 2) \right] \sin 3t$$

Sobre la resonancia. La parte homogénea $9u_{xx} = u_{tt}$ tiene velocidad $c = 3$ y, con extremos fijos en $[0, 1]$, frecuencias propias $\omega_n = cn\pi = 3n\pi$ asociadas a los modos $\sin(n\pi x)$. La frecuencia del forzado es $\omega = 3$, y como $3 \neq 3n\pi$ para todo entero $n \geq 1$, no hay coincidencia con ninguna frecuencia propia: el sistema no resuena. Esto se refleja en que la ODE de f tiene solución acotada y bien definida (no aparece ningún factor secular), de modo que la oscilación forzada permanece finita en el tiempo.

Ejercicio 29

Enunciado. La propagación de una señal en una línea con pérdidas se modela mediante la ecuación del telegrafista (onda amortiguada)

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} + u, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

con los extremos conectados a tierra

$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0,$$

y estado inicial

$$u(x, 0) = 5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - 2 \operatorname{sen}(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Determina $u(x, t)$ y describe cómo decae la señal.

Separación de variables. Se propone $u(x, t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación y dividiendo por XT ,

$$4 \frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2T' + T}{T}.$$

Cada miembro depende de una variable distinta, luego ambos igualan una constante. Escribiendo $\frac{X''}{X} = -\mu$ se obtienen los problemas

$$X'' + \mu X = 0, \quad T'' + 2T' + (1 + 4\mu)T = 0.$$

Problema espacial. Con $X(0) = X(2) = 0$ los valores y funciones propios son

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}, \quad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Problema temporal amortiguado. Para cada modo, $1 + 4\mu_n = 1 + n^2\pi^2$, y la ecuación característica es

$$r^2 + 2r + (1 + n^2\pi^2) = 0 \implies r = -1 \pm \sqrt{1 - (1 + n^2\pi^2)} = -1 \pm n\pi i.$$

Las raíces son complejas conjugadas con parte real -1 , lo que da un decaimiento oscilatorio:

$$T_n(t) = e^{-t} [A_n \cos(n\pi t) + B_n \operatorname{sen}(n\pi t)].$$

Imposición de los datos iniciales. El dato $u(x, 0) = 5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - 2 \operatorname{sen}(\pi x)$ contiene solo los modos $n = 1$ y $n = 2$, de modo que $A_1 = 5$, $A_2 = -2$ y el resto son nulos. De la condición $u_t(x, 0) = 0$, usando $T'_n(0) = -A_n + n\pi B_n = 0$, se despeja $B_n = \frac{A_n}{n\pi}$:

$$B_1 = \frac{5}{\pi}, \quad B_2 = \frac{-2}{2\pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

Solución.

$$u(x, t) = e^{-t} \left[\left(5 \cos \pi t + \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} \pi t \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + \left(-2 \cos 2\pi t - \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi t \right) \operatorname{sen} \pi x \right]$$

La señal decae hacia el reposo con un factor común e^{-t} : la parte real de las raíces vale -1 para todos los modos, ya que solo depende del coeficiente de amortiguamiento $\frac{b}{2} = 1$ y no del número de onda. Por tanto todos los armónicos se atenúan al mismo ritmo, mientras que los modos más altos oscilan más deprisa (frecuencia $n\pi$). El término $2u_t$ actúa como disipación (fricción) y el término u como fuerza recuperadora adicional; juntos hacen que la energía inicial se pierda y la línea vuelva al estado nulo.

Ejercicio 30

Enunciado. Una barra de longitud π pierde calor hacia el ambiente a un ritmo proporcional a su temperatura (radiación lineal). El problema es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con extremos a temperatura nula $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ y perfil inicial $u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} 3x$. Halla $u(x, t)$.

Cambio que absorbe la radiación. El término $-u$ sugiere escribir $u(x, t) = e^{-t} v(x, t)$. Sustituyendo, $u_t = e^{-t}(v_t - v)$ y $u_{xx} = e^{-t}v_{xx}$, de modo que la ecuación $u_t = 2u_{xx} - u$ se reduce a la ecuación del calor estándar

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

con las mismas condiciones de contorno homogéneas y $v(x, 0) = 4 \operatorname{sen} 3x$.

Separación de variables. Con $v = X(x)T(t)$ y extremos fijos en $[0, \pi]$, los modos propios son $X_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$ y $T_n(t) = e^{-2n^2t}$, luego

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-2n^2t} \operatorname{sen}(nx).$$

Ajuste del dato inicial. Como $v(x, 0) = 4 \operatorname{sen} 3x$ ya es un único modo propio ($n = 3$), la serie se reduce a un término: $B_3 = 4$ y el resto nulo. Por tanto

$$v(x, t) = 4 e^{-2 \cdot 9t} \operatorname{sen} 3x = 4 e^{-18t} \operatorname{sen} 3x.$$

Deshacer el cambio. Multiplicando por e^{-t} ,

$$u(x, t) = e^{-t} \cdot 4 e^{-18t} \operatorname{sen} 3x = 4 e^{-19t} \operatorname{sen} 3x.$$

Solución.

$u(x, t) = 4 e^{-19t} \operatorname{sen} 3x$

La radiación añade un factor de decaimiento extra e^{-t} : el modo se apaga a ritmo 19 en lugar de 18, es decir, más rápido que en el calor puro.

Ejercicio 31

Enunciado. En un modelo de reacción-difusión con generación proporcional a la concentración,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ y estado inicial $u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} x$. Determina $u(x, t)$ e indica si la concentración crece o decae.

Cambio que separa reacción y difusión. El término $+3u$ es una tasa de crecimiento uniforme; se elimina con $u(x, t) = e^{3t} v(x, t)$. Entonces $u_t = e^{3t}(v_t + 3v)$ y $u_{xx} = e^{3t}v_{xx}$, y la ecuación $u_t = u_{xx} + 3u$ queda como la ecuación del calor

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

con extremos nulos y $v(x, 0) = 2 \operatorname{sen} x$.

Solución del calor por separación de variables. En $[0, \pi]$ los modos son $\operatorname{sen}(nx)$ con factor temporal $e^{-n^2 t}$:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx).$$

El dato $v(x, 0) = 2 \operatorname{sen} x$ es el modo $n = 1$, así que $B_1 = 2$ y los demás son nulos:

$$v(x, t) = 2 e^{-t} \operatorname{sen} x.$$

Deshacer el cambio.

$$u(x, t) = e^{3t} \cdot 2 e^{-t} \operatorname{sen} x = 2 e^{2t} \operatorname{sen} x.$$

Solución.

$u(x, t) = 2 e^{2t} \operatorname{sen} x$

El exponente neto es $k - n^2 = 3 - 1 = 2 > 0$: la reacción vence a la difusión y la concentración crece exponencialmente. Si el modo inicial fuese más alto ($n \geq 2$, con $n^2 > 3$) ganaría la difusión y decaería.

Ejercicio 32

Enunciado. Considera la ecuación de reacción-difusión con absorción

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sometida a las condiciones de contorno no homogéneas $u(0, t) = 2$, $u(1, t) = 0$ y al dato inicial

$$u(x, 0) = 2 \frac{\sinh(1-x)}{\sinh 1} + 3 \operatorname{sen}(2\pi x).$$

Halla la solución $u(x, t)$ y su régimen estacionario.

Descomposición estacionario + transitorio. Como las condiciones de contorno son constantes, busca $u(x, t) = \varphi(x) + w(x, t)$, donde φ es la solución estacionaria (independiente de t) que absorbe las condiciones de contorno y w es un transitorio con contorno homogéneo.

Estado estacionario. Imponiendo $\varphi_t = 0$ en la ecuación:

$$\varphi''(x) - \varphi(x) = 0 \implies \varphi(x) = A \cosh x + B \sinh x.$$

No es lineal en x (a diferencia del calor sin reacción): aparecen funciones hiperbólicas. Con $\varphi(0) = 2$ se obtiene $A = 2$; con $\varphi(1) = 0$,

$$2 \cosh 1 + B \sinh 1 = 0 \implies B = -2 \frac{\cosh 1}{\sinh 1}.$$

Usando $\cosh 1 \sinh(-x) + \dots$, o directamente la identidad $\sinh(1-x) = \sinh 1 \cosh x - \cosh 1 \sinh x$, el resultado se compacta en

$$\varphi(x) = 2 \frac{\sinh(1-x)}{\sinh 1}.$$

Transitorio. Al restar φ , la función $w = u - \varphi$ cumple $w_t = w_{xx} - w$ con $w(0, t) = w(1, t) = 0$ y

$$w(x, 0) = u(x, 0) - \varphi(x) = 3 \operatorname{sen}(2\pi x).$$

El cambio $w = e^{-t}z$ lleva a la ecuación del calor $z_t = z_{xx}$ en $[0, 1]$, cuyos modos son $\operatorname{sen}(n\pi x)$ con factor $e^{-(n\pi)^2 t}$. El dato $3 \operatorname{sen}(2\pi x)$ es el modo $n = 2$, luego $z = 3 e^{-4\pi^2 t} \operatorname{sen}(2\pi x)$ y

$$w(x, t) = 3 e^{-(1+4\pi^2)t} \operatorname{sen}(2\pi x).$$

Solución.

$$u(x, t) = 2 \frac{\sinh(1-x)}{\sinh 1} + 3 e^{-(1+4\pi^2)t} \operatorname{sen}(2\pi x)$$

El transitorio se extingue exponencialmente y, cuando $t \rightarrow \infty$, la barra tiende al perfil estacionario $\varphi(x) = 2 \sinh(1-x)/\sinh 1$, curvado por la absorción.

Ejercicio 33

Enunciado. Una barra tiene una difusividad que crece linealmente con el tiempo y además pierde calor por radiación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con extremos $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ y perfil inicial $u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} 3x$. Resuelve el problema y comenta el efecto del coeficiente variable.

Separación de variables con coeficiente variable. Escribe $u(x, t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación,

$$X T' = 2t X'' T - X T \implies \frac{T'}{T} + 1 = 2t \frac{X''}{X}.$$

El miembro derecho depende de x salvo por el factor $2t$; separando con constante $-\lambda$ mediante $\frac{X''}{X} = -\lambda$, queda

$$X'' + \lambda X = 0, \quad \frac{T'}{T} = -\lambda(2t) - 1.$$

Parte espacial. Con $X(0) = X(\pi) = 0$ se obtiene el problema de Sturm-Liouville clásico: autovalores $\lambda_n = n^2$ y autofunciones $X_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$, $n = 1, 2, \dots$

Parte temporal con difusividad no estacionaria. La clave del nivel es integrar el coeficiente $a(t) = 2t$ en el tiempo. De $\frac{T'}{T} = -2\lambda_n t - 1$,

$$\ln T_n = -\lambda_n \int_0^t 2s \, ds - t = -\lambda_n t^2 - t \implies T_n(t) = e^{-n^2 t^2 - t}.$$

Aparece t^2 en el exponente porque $\int_0^t a(s) \, ds = t^2$: la difusión no es estacionaria, sino que se acelera con el tiempo.

Superposición y ajuste del dato. La solución general es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t^2 - t} \operatorname{sen}(nx).$$

El dato $u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} 3x$ selecciona sólo los modos $n = 1$ y $n = 3$: $B_1 = 4$, $B_3 = -2$, el resto nulos.

Solución.

$$u(x, t) = 4 e^{-t^2 - t} \operatorname{sen} x - 2 e^{-9t^2 - t} \operatorname{sen} 3x$$

El decaimiento no es exponencial simple sino gaussiano en t (factor $e^{-n^2 t^2}$): como la difusividad $2t$ crece, los modos altos se aniquilan mucho más deprisa. El modo $n = 3$ decae con e^{-9t^2} frente a e^{-t^2} del fundamental, de modo que a tiempos moderados sobrevive esencialmente el primer armónico. El término común e^{-t} es la radiación uniforme.