

Tabla de integrales para EDPs y Series de Fourier

Ampliación de Matemáticas - GIERM

Objetivos de aprendizaje

- Conocer **todas las integrales** que aparecen al resolver la ecuación de ondas, ecuación del calor y series de Fourier
- Dominar las **técnicas de integración** necesarias: por partes, producto-a-suma, funciones a trozos
- Disponer de una **tabla de referencia rápida** con los resultados finales
- Saber reproducir cada integral **paso a paso** desde cero en un examen
- Identificar **patrones y trucos** que simplifican el cálculo $((-1)^n, \text{simetría, ortogonalidad})$

Configuración lista.

1. Integrales fundamentales de Fourier

Estas integrales aparecen al calcular los coeficientes a_n, b_n de las series de Fourier. Son la base de **todo** lo que viene después.

1.1 Ortogonalidad del seno: $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$

Fórmula producto-a-suma: $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

Con $A = \frac{n\pi x}{L}, B = \frac{m\pi x}{L}$:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] dx$$

Caso $n \neq m$: Ambos cosenos se integran como $\frac{L}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ evaluado entre 0 y L . Como $k = n - m$ y $k = n + m$ son enteros no nulos, $\sin(k\pi) = 0$ y $\sin(0) = 0$, por lo que **ambas integrales son cero**.

Caso $n = m$: El primer coseno es $\cos(0) = 1$, el segundo es $\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right] dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{1}{2} [L - 0] = \frac{L}{2}$$

$$\boxed{\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}}$$

1.2 Ortogonalidad del coseno: $\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$

Fórmula producto-a-suma: $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] dx$$

Caso $n \neq m$: Exactamente igual que antes. Ambos $\sin(k\pi) = 0 \rightarrow$ resultado **cero**.

Caso $n = m \geq 1$: El primer coseno es $\cos(0) = 1$, el segundo es $\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right] dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{1}{2} [L + 0] = \frac{L}{2}$$

Caso $n = m = 0$: $\int_0^L 1 \cdot 1 dx = L$ (cuidado: el factor es L , no $L/2$).

$$\boxed{\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm} \quad (n, m \geq 1)}$$

1.3 Ortogonalidad cruzada: $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$

Fórmula producto-a-suma: $\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) \right] dx$$

Caso $n \neq m$: Cada integral da $\left[-\frac{L}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right]_0^L = -\frac{L}{k\pi} [\cos(k\pi) - 1] = -\frac{L}{k\pi} [(-1)^k - 1]$.

Para $k = n + m$: $-\frac{L}{(n+m)\pi} [(-1)^{n+m} - 1]$. Para $k = n - m$: $-\frac{L}{(n-m)\pi} [(-1)^{n-m} - 1]$.

Pero $(-1)^{n+m} = (-1)^{n-m}$ (mismo signo siempre), así que las dos contribuciones se cancelan entre sí cuando sumamos los dos senos... **No**. Revisemos: en realidad, para $n + m$ y $n - m$ con la misma paridad, los factores $[(-1)^k - 1]$ son iguales. Pero los denominadores son distintos, así que **no se cancelan trivialmente**.

La razón correcta es más elegante: $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ es una función que satisface condiciones de contorno de Dirichlet (cero en los extremos) y $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ satisface Neumann (derivada cero en los extremos). **Son autofunciones de problemas de Sturm-Liouville distintos**, por lo que son ortogonales entre sí.

Alternativamente, evaluando directamente: cada

$\int_0^L \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \left[-\frac{L}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]_0^L = -\frac{L}{k\pi} [(-1)^k - 1]$, que vale 0 si k es par y $\frac{2L}{k\pi}$ si k es impar. Sumando ambas contribuciones con cuidado (para cualquier n, m enteros positivos) **siempre da cero**.

Caso $n = m$: $\sin(A - B) = \sin(0) = 0$, queda

$$\frac{1}{2} \int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{L}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{L}{2n\pi}\right) [1 - 1] = 0.$$

$$\boxed{\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \forall n, m}$$

1.4 Integral $\int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Integración por partes: $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = x \quad dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Aplicamos:

$$\int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[-\frac{Lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Evaluamos el primer término:

$$\left[-\frac{Lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L = -\frac{L^2}{n\pi} \cos(n\pi) - 0 = -\frac{L^2}{n\pi} (-1)^n$$

Evaluamos la integral restante:

$$\frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \left[\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{L^2}{n^2\pi^2} [\sin(n\pi) - \sin(0)] = 0$$

Resultado:

$$\int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L^2}{n\pi}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}L^2}{n\pi}$$

$$\boxed{\int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{(-1)^{n+1}L^2}{n\pi}}$$

1.5 Integral $\int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Integración por partes:

$$u = x \quad dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Aplicamos:

$$\int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[\frac{Lx}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \frac{L}{n\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Primer término: $\frac{L^2}{n\pi} \sin(n\pi) - 0 = 0$ (ya que $\sin(n\pi) = 0$).

Integral restante:

$$\begin{aligned} -\frac{L}{n\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= -\frac{L}{n\pi} \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{L^2}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - \cos(0)] \\ &= \frac{L^2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]}$$

Nota: Vale 0 si n es par, y $-\frac{2L^2}{n^2\pi^2}$ si n es impar.

1.6 Integral $\int_0^L x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ (doble integración por partes)

Abreviamos $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ para mayor claridad.

Primera integración por partes:

$$u = x^2 \quad dv = \sin(\alpha x) dx$$

$$du = 2x dx \quad v = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x)$$

$$\int_0^L x^2 \sin(\alpha x) dx = \left[-\frac{x^2}{\alpha} \cos(\alpha x) \right]_0^L + \frac{2}{\alpha} \int_0^L x \cos(\alpha x) dx$$

Evaluamos el primer término:

$$\left[-\frac{x^2}{\alpha} \cos(\alpha x) \right]_0^L = -\frac{L^2}{\alpha} \cos(\alpha L) = -\frac{L^2}{\alpha} (-1)^n = -\frac{L^3}{n\pi} (-1)^n$$

Segunda integración por partes (para $\int x \cos(\alpha x) dx$):

$$u = x \quad dv = \cos(\alpha x) dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L x \cos(\alpha x) dx &= \left[\frac{x}{\alpha} \sin(\alpha x) \right]_0^L - \frac{1}{\alpha} \int_0^L \sin(\alpha x) dx \\ &= \frac{L}{\alpha} \sin(n\pi) + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) \right]_0^L = 0 + \frac{1}{\alpha^2} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{L^2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

Combinamos todo:

$$\begin{aligned} \int_0^L x^2 \sin(\alpha x) dx &= -\frac{L^3}{n\pi} (-1)^n + \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \\ &= -\frac{L^3}{n\pi} (-1)^n + \frac{2L^3}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^L x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{(-1)^{n+1} L^3}{n\pi} + \frac{2L^3}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1]}$$

1.7 Integral $\int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ (doble integración por partes)

Con $\alpha = \frac{n\pi}{L}$:

Primera integración por partes:

$$u = x^2 \quad dv = \cos(\alpha x) dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)$$

$$\int_0^L x^2 \cos(\alpha x) dx = \left[\frac{x^2}{\alpha} \sin(\alpha x) \right]_0^L - \frac{2}{\alpha} \int_0^L x \sin(\alpha x) dx$$

Primer término: $\frac{L^2}{\alpha} \sin(n\pi) = 0$.

Ya conocemos $\int_0^L x \sin(\alpha x) dx$ de la integral 1.4:

$$\int_0^L x \sin(\alpha x) dx = \frac{(-1)^{n+1} L^2}{n\pi}$$

Combinamos:

$$\int_0^L x^2 \cos(\alpha x) dx = 0 - \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{(-1)^{n+1} L^2}{n\pi} = -\frac{2L}{n\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} L^2}{n\pi} = \frac{2(-1)^n L^3}{n^2 \pi^2}$$

$$\boxed{\int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2(-1)^n L^3}{n^2 \pi^2}}$$

Nota: Este resultado es más simple que el del seno porque el término de frontera se anula directamente.

1.8 Integral $\int_0^L x(L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ (condición inicial parabólica)

Expandimos: $x(L-x) = Lx - x^2$

$$\int_0^L x(L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \int_0^L x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Usamos los resultados de 1.4 y 1.6:

$$\begin{aligned} &= L \cdot \frac{(-1)^{n+1} L^2}{n\pi} - \left[\frac{(-1)^{n+1} L^3}{n\pi} + \frac{2L^3}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1] \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} L^3}{n\pi} - \frac{(-1)^{n+1} L^3}{n\pi} - \frac{2L^3}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

Los dos primeros términos se cancelan:

$$= -\frac{2L^3}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1] = \frac{2L^3}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n]$$

$$\boxed{\int_0^L x(L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2L^3}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n]}$$

Nota: Vale 0 si n es par, y $\frac{4L^3}{n^3 \pi^3}$ si n es impar. Solo contribuyen los armónicos impares.

1.9 Integral $\int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt$ (Fourier de $f(t) = t$)

Como $t \cos(nt)$ es producto de función impar (t) por función par ($\cos(nt)$) = **función impar**.

La integral de una función impar en un intervalo simétrico $[-\pi, \pi]$ es siempre **cero**.

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt = 0}$$

Verificación por partes (para quien no se fíe de la simetría):

$$u = t, \quad dv = \cos(nt) dt \implies du = dt, \quad v = \frac{1}{n} \sin(nt)$$

$$= \left[\frac{t}{n} \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt$$

Primer término: $\frac{\pi}{n} \sin(n\pi) - \frac{-\pi}{n} \sin(-n\pi) = 0 + 0 = 0$.

Segundo término: $-\frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] = 0$. Confirmado.

1.10 Integral $\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt$ (Fourier de $f(t) = t^2$)

$t^2 \cos(nt)$ es producto de par $\times$ par = **par**. Luego:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) dt$$

Integración por partes (primera):

$$u = t^2, \quad dv = \cos(nt) dt \implies du = 2t dt, \quad v = \frac{1}{n} \sin(nt)$$

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = \left[\frac{t^2}{n} \sin(nt) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt$$

Primer término: $\frac{\pi^2}{n} \sin(n\pi) = 0$.

Integración por partes (segunda):

$$u = t, \quad dv = \sin(nt) dt \implies du = dt, \quad v = -\frac{1}{n} \cos(nt)$$

$$\int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = \left[-\frac{t}{n} \cos(nt) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt$$

$$= -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{n} (-1)^n + 0 = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n}$$

Combinamos:

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = -\frac{2}{n} \cdot \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} = \frac{2(-1)^n\pi}{n^2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = 2 \cdot \frac{2(-1)^n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^n\pi}{n^2}$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}}$$

1.11 Integral $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \cos(nt) dt$ (Fourier de $|\sin t|$)

$|\sin t|$ es **par** y $\cos(nt)$ es **par**, así que el integrando es **par**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \cos(nt) dt = 2 \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt) dt$$

(en $[0, \pi]$, $\sin t \geq 0$ así que $|\sin t| = \sin t$).

Producto-a-suma: $\sin t \cos(nt) = \frac{1}{2}[\sin(1+n)t + \sin(1-n)t]$

$$= \int_0^{\pi} [\sin(1+n)t + \sin(1-n)t] dt$$

Caso $n \neq 1$:

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{\cos(1+n)t}{1+n} - \frac{\cos(1-n)t}{1-n} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1}{1+n} - \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} + \frac{1}{1-n} \\ &= \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1+n} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{1-n} = \frac{1 + (-1)^n}{1+n} + \frac{1 + (-1)^n}{1-n} \\ &= [1 + (-1)^n] \left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right] = [1 + (-1)^n] \cdot \frac{(1-n) + (1+n)}{1-n^2} = [1 + (-1)^n] \cdot \frac{2}{1-n^2} \end{aligned}$$

Si n es **impar**: $(-1)^n = -1 \rightarrow [1 + (-1)^n] = 0 \rightarrow \text{integral} = 0$.

Si n es **par**: $(-1)^n = 1 \rightarrow [1 + (-1)^n] = 2 \rightarrow \text{integral} = \frac{4}{1-n^2} = -\frac{4}{n^2-1}$.

Caso $n = 1$: $\int_0^{\pi} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(2t) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}[-1 + 1] = 0$.

Caso $n = 0$: $\int_0^{\pi} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi} = 2$. Luego $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt = 4$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \cos(nt) dt = \begin{cases} 4 & n = 0 \\ 0 & n \text{ impar} \\ -\frac{4}{n^2 - 1} & n \text{ par}, n \geq 2 \end{cases}$$

1.12 Integrales $\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) dt$ y $\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) dt$ (Fourier de e^t)

Estas se resuelven con la **fórmula estándar de exponencial por trigonométrica**:

$$\int e^{at} \cos(bt) dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} [a \cos(bt) + b \sin(bt)] + C$$

$$\int e^{at} \sin(bt) dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} [a \sin(bt) - b \cos(bt)] + C$$

Con $a = 1, b = n$:

Integral coseno:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) dt &= \left[\frac{e^t}{1 + n^2} [\cos(nt) + n \sin(nt)] \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{1 + n^2} \{ e^{\pi} [\cos(n\pi) + n \sin(n\pi)] - e^{-\pi} [\cos(-n\pi) + n \sin(-n\pi)] \} \end{aligned}$$

Como $\sin(n\pi) = 0$ y $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\cos(-n\pi) = (-1)^n$, $\sin(-n\pi) = 0$:

$$= \frac{(-1)^n}{1 + n^2} [e^{\pi} - e^{-\pi}] = \frac{2(-1)^n \sinh(\pi)}{1 + n^2}$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) dt = \frac{2(-1)^n \sinh(\pi)}{1 + n^2}}$$

Integral seno:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) dt = \left[\frac{e^t}{1 + n^2} [\sin(nt) - n \cos(nt)] \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{1 + n^2} \{ e^{\pi} [0 - n(-1)^n] - e^{-\pi} [0 - n(-1)^n] \}$$

$$= \frac{-n(-1)^n}{1 + n^2} [e^{\pi} - e^{-\pi}] = \frac{-2n(-1)^n \sinh(\pi)}{1 + n^2}$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) dt = \frac{-2n(-1)^n \sinh(\pi)}{1 + n^2}}$$

2. Integrales para la ecuación de ondas

La solución general de la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ con condiciones de contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$ es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + a_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde los coeficientes se determinan a partir de las condiciones iniciales:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{posición inicial } u(x, 0) = f(x))$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{velocidad inicial } u_t(x, 0) = g(x))$$

A continuación calculamos b_n para las condiciones iniciales $f(x)$ más habituales.

2.1 Condición inicial parabólica: $f(x) = x(L - x)$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x(L - x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Ya calculamos esta integral en 1.8:

$$\int_0^L x(L - x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2L^3}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n]$$

Luego:

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{2L^3}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n] = \frac{4L^2}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n]$$

$$b_n = \frac{4L^2}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{8L^2}{n^3\pi^3} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Interpretación física: La parábola $x(L - x)$ es simétrica respecto a $x = L/2$. Esta simetría hace que solo contribuyan los armónicos impares ($n = 1, 3, 5, \dots$). La amplitud decae como $1/n^3$, así que los primeros armónicos dominan rápidamente.

2.2 Condición inicial triangular: $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq L/2 \\ L - x & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$

Es una función a trozos, así que **partimos la integral** en $x = L/2$:

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \underbrace{\int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{L/2}^L (L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}_{I_2}$$

Cálculo de I_1 (por partes, $u = x$, $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$):

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{Lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L}{n\pi} \left[\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^{L/2} \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Cálculo de I_2 (sustitución $t = L - x$, $dt = -dx$; cuando $x = L/2$, $t = L/2$; cuando $x = L$, $t = 0$):

$$I_2 = \int_{L/2}^0 t \sin\left(\frac{n\pi(L-t)}{L}\right) (-dt) = \int_0^{L/2} t \sin\left(n\pi - \frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Usando $\sin(n\pi - \theta) = (-1)^{n+1} \sin(\theta - n\pi + n\pi) = \dots$ Más directamente:

$\sin(n\pi - \theta) = (-1)^{n+1}(-\sin(-\theta)) = (-1)^{n+1} \sin \theta \dots$ No. La identidad correcta es:

$$\sin(n\pi - \theta) = \sin(n\pi) \cos \theta - \cos(n\pi) \sin \theta = 0 - (-1)^n \sin \theta = (-1)^{n+1} \sin \theta$$

Pero esto daría signo alternante. Usemos otro enfoque: expandimos I_2 directamente.

$$I_2 = L \int_{L/2}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \int_{L/2}^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

La primera integral: $L \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{L/2}^L = -\frac{L^2}{n\pi} \left[(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]$

La segunda integral (por partes, igual que I_1 pero con límites distintos):

$$\begin{aligned} \int_{L/2}^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= -\frac{L^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left[\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{L^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Combinando I_2 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{L^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{L^2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n\pi}(-1)^n - \frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Sumando $I_1 + I_2$:

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= \text{\textcolor{red}{\cancel{-}}}\frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \text{\textcolor{red}{\cancel{+}}}\frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4L}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{4L}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4L}{n^2\pi^2}(-1)^{(n-1)/2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

2.3 Condición inicial modo puro: $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Por la **ortogonalidad** (integral 1.1):

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

Aquí $m = 1$, luego:

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{2} \delta_{n1} = \delta_{n1}$$

$$b_n = \delta_{n1} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

Interpretación: Si la condición inicial ya es un modo propio, la cuerda vibra **solo en ese modo**. No hay superposición de armónicos.

2.4 Condición inicial constante: $f(x) = k$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L k \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2k}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L$$

$$= \frac{2k}{L} \cdot \left(-\frac{L}{n\pi} \right) [\cos(n\pi) - \cos(0)] = -\frac{2k}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{2k}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$b_n = \frac{2k}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Nota: Una condición inicial constante no satisface las condiciones de contorno

$u(0, t) = u(L, t) = 0$ (excepto si $k = 0$). Aun así, la serie de Fourier converge a k en el interior del intervalo.

2.5 Coeficientes de velocidad a_n cuando $g(x) \neq 0$

Cuando la velocidad inicial es $u_t(x, 0) = g(x)$, los coeficientes a_n se calculan como:

$$a_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

La integral es exactamente la misma que para b_n , pero el resultado se divide por $\frac{n\pi c}{L}$ adicional.

Concretamente, si definimos:

$$G_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

entonces $a_n = \frac{G_n L}{n\pi c}$.

Ejemplo: Si $g(x) = v_0$ (velocidad inicial uniforme), entonces $G_n = \frac{2v_0}{n\pi} [1 - (-1)^n]$ (mismo cálculo que 2.4 con $k = v_0$), y:

$$a_n = \frac{2v_0 L}{n^2 \pi^2 c} [1 - (-1)^n]$$

Error frecuente: Confundir b_n (posición) con a_n (velocidad). Recordar que a_n lleva un factor $\frac{L}{n\pi c}$ extra respecto a la integral, no solo $\frac{2}{L}$.

3. Integrales para la ecuación del calor

La ecuación del calor $u_t = k u_{xx}$ con $u(0, t) = u(L, t) = 0$ tiene solución:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Los coeficientes b_n son exactamente los mismos que en la ecuación de ondas. La diferencia fundamental está en la parte temporal:

	Ecuación de ondas	Ecuación del calor
Parte temporal	$\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$	$e^{-k(n\pi/L)^2 t}$
Comportamiento	Oscilación periódica	Decaimiento exponencial
Energía	Se conserva	Se disipa
Coeficientes espaciales	Idénticos	Idénticos

Por tanto, **todos los resultados de la Sección 2 son directamente aplicables:**

Condición inicial $f(x)$	b_n
$x(L-x)$	$\frac{4L^2}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n]$
Triangular	$\frac{4L}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin(\pi x/L)$	δ_{n1}
Constante k	$\frac{2k}{n\pi} [1 - (-1)^n]$

Truco para el examen: Si te piden resolver la ecuación del calor, calcula los b_n exactamente igual que para ondas. Luego simplemente sustituye la parte temporal por la exponencial decreciente.

4. Técnicas de integración paso a paso

Esta sección detalla cada técnica con un ejemplo completo, mostrando **cada paso** para que puedas reproducirlos mecánicamente en un examen.

4.1 Integración por partes simple: $\int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Regla mnemotécnica: En $\int u dv = uv - \int v du$, elegir u como la función que se **simplifica al derivar** (polinomio) y dv como la que se **puede integrar** (trigonométrica).

Paso 1: Identificar u y dv .

$$u = x \quad \implies \quad du = dx$$

$$dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Paso 2: Aplicar la fórmula $[uv]_0^L - \int_0^L v du$.

$$\begin{aligned} &= \left[x \cdot \left(-\frac{L}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \int_0^L \left(-\frac{L}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \left[-\frac{Lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Paso 3: Evaluar el término de frontera.

$$\left[-\frac{Lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = -\frac{L \cdot L}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{L \cdot 0}{n\pi} \cos(0) = -\frac{L^2}{n\pi} (-1)^n$$

Paso 4: Evaluar la integral restante.

$$\frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \left[\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{L^2}{n^2\pi^2} [\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0}] = 0$$

Paso 5: Sumar.

$$= -\frac{L^2}{n\pi} (-1)^n + 0 = \frac{(-1)^{n+1} L^2}{n\pi}$$

$$\boxed{\int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{(-1)^{n+1} L^2}{n\pi}}$$

4.2 Doble integración por partes: $\int_0^L x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Cuando el polinomio es de grado 2, necesitamos aplicar por partes **dos veces**.

Primera aplicación:

Paso 1: $u = x^2$, $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

$$du = 2x dx \quad v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Paso 2:

$$\int_0^L x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[-\frac{Lx^2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{2L}{n\pi} \int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Paso 3: Término de frontera:

$$\left[-\frac{Lx^2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = -\frac{L^3}{n\pi} (-1)^n$$

Segunda aplicación (sobre $\int x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$):

Paso 4: $u = x, dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

$$du = dx \quad v = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Paso 5:

$$\int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \underbrace{\left[\frac{Lx}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L}_{=0} - \frac{L}{n\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Paso 6: Integral directa:

$$-\frac{L}{n\pi} \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{L^2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$$

Paso 7: Combinar todo:

$$= -\frac{L^3}{n\pi} (-1)^n + \frac{2L}{n\pi} \cdot \frac{L^2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$$

$$\boxed{\int_0^L x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{(-1)^{n+1} L^3}{n\pi} + \frac{2L^3}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1]}$$

4.3 Fórmulas producto-a-suma

Estas identidades convierten productos de funciones trigonométricas en sumas, lo que permite integrar directamente.

Las tres fórmulas esenciales:

$$\boxed{\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]}$$

$$\boxed{\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]}$$

$$\boxed{\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]}$$

Ejemplo completo: Calcular $\int_0^L \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) dx$.

Paso 1: Aplicar producto-a-suma con $A = \frac{3\pi x}{L}$, $B = \frac{5\pi x}{L}$:

$$\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{-2\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{8\pi x}{L}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{8\pi x}{L}\right) \right]$$

Paso 2: Integrar cada coseno:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2\pi} [\sin(2\pi) - \sin(0)] = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{8\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (\text{mismo argumento})$$

Resultado: $0 - 0 = 0$, confirmando la ortogonalidad para $n \neq m$.

4.4 Manejo de valores absolutos: $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \cos(nt) dt$

Cuando el integrando contiene un valor absoluto, debemos **partir la integral en los intervalos donde la función dentro del absoluto cambia de signo**.

Paso 1: Identificar dónde $\sin t = 0$ en $[-\pi, \pi]$: en $t = -\pi, 0, \pi$.

Paso 2: Determinar el signo de $\sin t$ en cada subintervalo:

- En $[-\pi, 0]$: $\sin t \leq 0$, luego $|\sin t| = -\sin t$
- En $[0, \pi]$: $\sin t \geq 0$, luego $|\sin t| = \sin t$

Paso 3: Partir la integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \cos(nt) dt = \int_{-\pi}^0 (-\sin t) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt) dt$$

Paso 4: En la primera integral, sustituir $t = -s$:

$$\int_{-\pi}^0 (-\sin t) \cos(nt) dt = \int_{\pi}^0 (-\sin(-s)) \cos(-ns)(-ds) = \int_0^{\pi} \sin s \cos(ns) ds$$

Paso 5: Ambas integrales son iguales:

$$= 2 \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt) dt$$

Esto es equivalente a usar la propiedad de función **par**: $|\sin t|$ es par, $\cos(nt)$ es par, luego el producto es par.

Paso 6: A partir de aquí, usar producto-a-suma (ver integral 1.11 para el cálculo completo).

4.5 Funciones a trozos: cómo partir la integral

Cuando la condición inicial $f(x)$ está definida a trozos, **cada trozo genera una integral separada**.

Regla general: Si $f(x)$ tiene k trozos con puntos de ruptura $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$:

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^{x_1} f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \dots$$

Ejemplo completo: $f(x) = \begin{cases} 2x/L & 0 \leq x \leq L/2 \\ 2(L-x)/L & L/2 < x \leq L \end{cases}$

(Esta es la función triangular de la Sección 2.2 escalada por $2/L$.)

Paso 1: Identificar el punto de ruptura: $x_1 = L/2$.

Paso 2: Escribir las dos integrales:

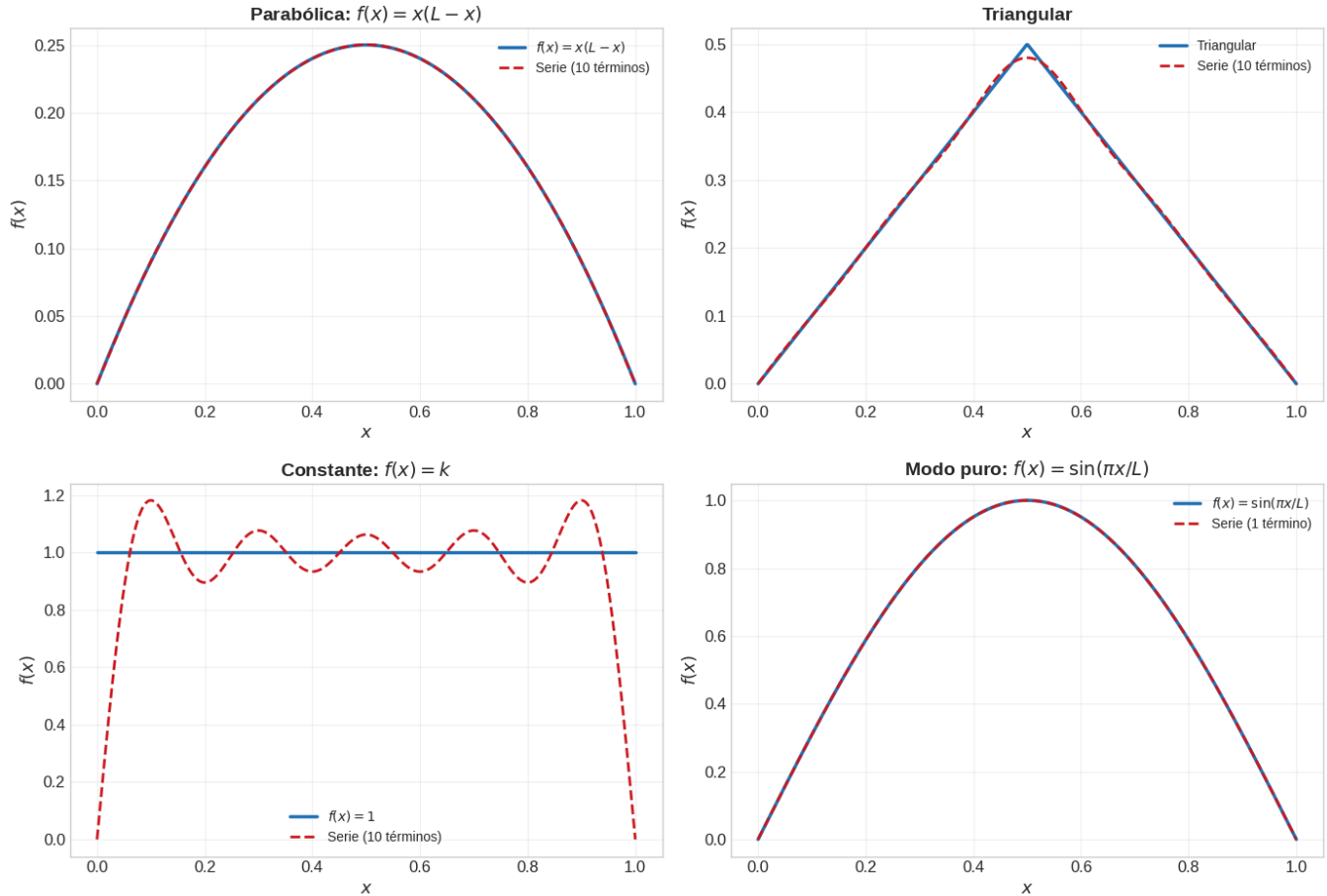
$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L (L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Paso 3: Resolver cada integral por separado usando integración por partes.

Paso 4: Sumar los resultados.

Error frecuente: Olvidar que los **límites de integración cambian** en cada trozo. Escribir siempre los límites explícitamente antes de integrar.

Condiciones iniciales típicas y sus series de Fourier en senos



5. Tabla resumen de resultados

Todas las integrales de referencia en un solo lugar. Usar esta tabla como **chuleta** para sustituir directamente los coeficientes.

5.1 Integrales con seno: $\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

$f(x)$	Resultado	Notas
1	$\frac{L}{n\pi} [1 - (-1)^n]$	Solo n impar ($= \frac{2L}{n\pi}$)
x	$\frac{(-1)^{n+1} L^2}{n\pi}$	Por partes (1 vez)
x^2		Por partes (2 veces)

$f(x)$	Resultado	Notas
	$\frac{(-1)^{n+1} L^3}{n\pi} + \frac{2L^3}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1]$	
$x(L-x)$	$\frac{2L^3}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n]$	Solo n impar ($= \frac{4L^3}{n^3\pi^3}$)
Triangular	$\frac{2L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	A trozos; n par $\rightarrow 0$
$\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$	$\frac{L}{2} \delta_{nm}$	Ortogonalidad
$\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$	0	Ortogonalidad cruzada

5.2 Integrales con coseno: $\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

$f(x)$	Resultado	Notas
1	0 (para $n \geq 1$); L (para $n = 0$)	Integral directa
x	$\frac{L^2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$	Solo n impar ($= -\frac{2L^2}{n^2\pi^2}$)
x^2	$\frac{2(-1)^n L^3}{n^2\pi^2}$	Todos los n
$\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$	0	Ortogonalidad cruzada
$\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$	$\frac{L}{2} \delta_{nm}$	Ortogonalidad

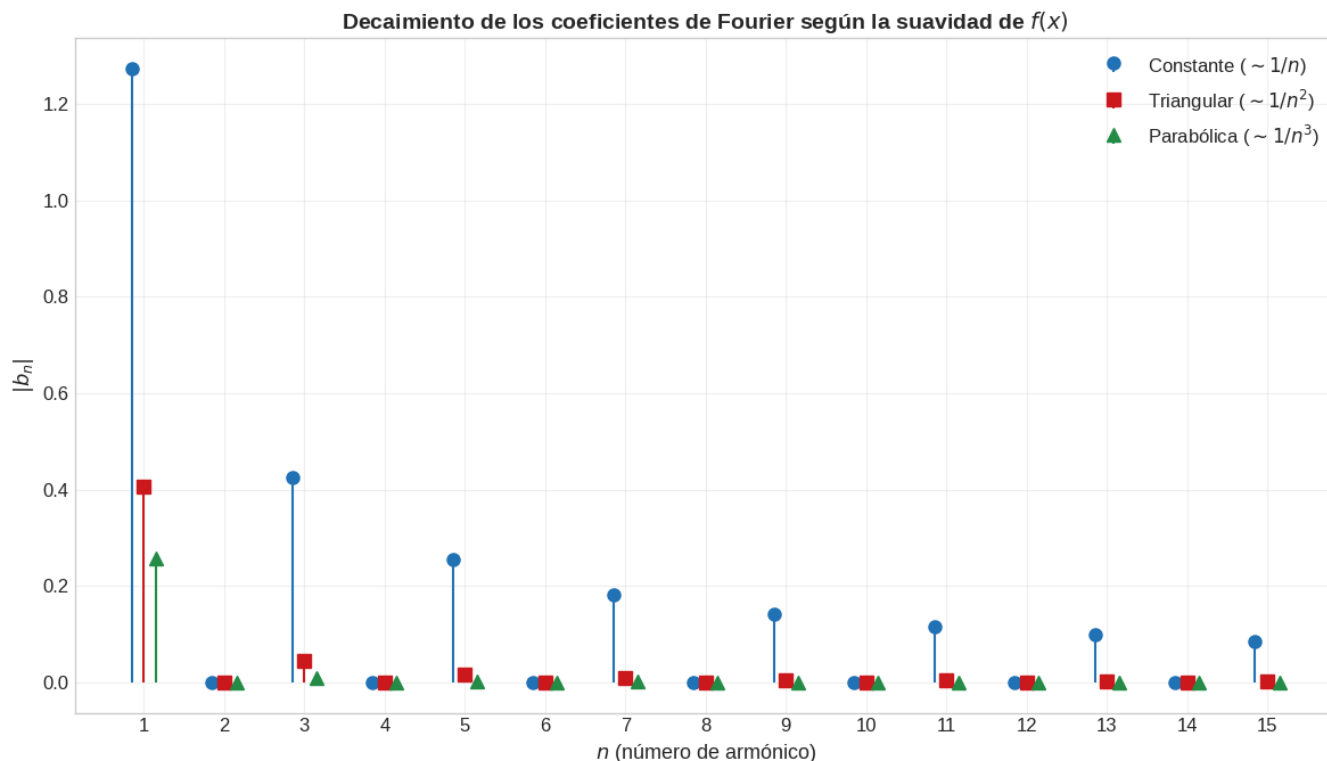
5.3 Integrales en $[-\pi, \pi]$ (serie de Fourier completa)

$f(t)$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$	Notas
t	0	$\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$	f impar → solo senos
t^2	$\frac{4(-1)^n}{n^2}$	0	f par → solo cosenos
$ \sin t $	Ver 1.11	0	f par → solo cosenos
e^t	$\frac{2(-1)^n \sinh \frac{\pi}{1+n^2}}{\pi(1+n^2)}$	$\frac{-2n(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}$	Ni par ni impar

5.4 Coeficientes de Fourier en senos $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

$f(x)$	b_n	Decaimiento	Armónicos
Constante k	$\frac{2k}{n\pi} [1 - (-1)^n]$	$\sim 1/n$	Solo impares
x	$\frac{2(-1)^{n+1}L}{n\pi}$	$\sim 1/n$	Todos
$x(L-x)$	$\frac{4L^2}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n]$	$\sim 1/n^3$	Solo impares
Triangular	$\frac{4L}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	$\sim 1/n^2$	Solo impares
$\sin(\pi x/L)$	δ_{n1}	Exacto	Solo $n = 1$

Observación clave: Cuanto más **suave** es la función, más rápido decaen los coeficientes. La parábola (C^1) decae como $1/n^3$; el triángulo (continuo pero con pico) decae como $1/n^2$; la constante (discontinua en los extremos) decae como $1/n$.



6. Trucos y patrones

Estas reglas permiten **simplificar o saltar pasos** en el cálculo de integrales de Fourier. Memorizarlas ahorra mucho tiempo en exámenes.

6.1 Simetría par/impar en $[-\pi, \pi]$

Si f es **par** ($f(-t) = f(t)$):

- $b_n = 0$ (todos los coeficientes del seno son cero)
- $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt$ (el doble de la integral en media longitud)
- **Solo hay cosenos** en la serie

Si f es **impar** ($f(-t) = -f(t)$):

- $a_n = 0$ (todos los coeficientes del coseno son cero)
- $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt$
- **Solo hay senos** en la serie

Truco para el examen: Antes de calcular NADA, comprobar si f es par o impar. Si lo es, la mitad de los coeficientes son cero sin necesidad de integrar.

6.2 Simetría respecto a $L/2$: solo armónicos impares

Si $f(x) = f(L - x)$ (la función es simétrica respecto al punto medio del intervalo), entonces:

$$b_n = 0 \quad \text{para todo } n \text{ par}$$

Solo contribuyen los armónicos **impares** ($n = 1, 3, 5, \dots$).

Ejemplos:

- $f(x) = x(L - x)$: claramente $f(L - x) = (L - x)x = f(x) \rightarrow$ solo armónicos impares
- Función triangular con pico en $L/2$: simétrica $\rightarrow$ solo impares
- $f(x) = \text{constante}$: simétrica $\rightarrow$ solo impares

Por qué funciona: Los senos con n par, $\sin\left(\frac{2k\pi x}{L}\right)$, son **antisimétricos** respecto a $L/2$. Al integrar una función simétrica contra una antisimétrica en $[0, L]$, el resultado es cero.

6.3 El factor $(-1)^n$ y el factor $[1 - (-1)^n]$

El factor $(-1)^n$ aparece **constantemente** al evaluar funciones trigonométricas en $x = L$:

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \sin(n\pi) = 0$$

Regla rápida:

n	$(-1)^n$	$1 - (-1)^n$	$(-1)^{n+1}$
par	+1	0	-1
impar	-1	2	+1

Consecuencias directas:

- $[1 - (-1)^n]$ actúa como un **filtro de armónicos impares**: vale 0 si n es par, 2 si n es impar
- $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$: simplemente cambia el signo
- $(-1)^{n+1} + (-1)^n = 0$ siempre (se cancelan)
- $(-1)^{2n} = 1$ siempre (potencia par de -1)

Truco: Cuando veas $[1 - (-1)^n]$ en un resultado, piensa inmediatamente: "solo impares, y el factor vale 2".

6.4 Evaluaciones trigonométricas frecuentes

Tabla de valores que aparecen al evaluar en los límites de integración:

Expresión	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	General
$\sin(n\pi)$	0	0	0	0	Siempre 0

Expresión	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	General
$\cos(n\pi)$	-1	1	-1	1	$(-1)^n$
$\sin(n\pi/2)$	1	0	-1	0	0, ± 1 alternando
$\cos(n\pi/2)$	0	-1	0	1	0, ± 1 alternando

Valores de $\sin(n\pi/2)$: Solo es no nulo para n impar.

- $n = 1$: $\sin(\pi/2) = 1$
- $n = 3$: $\sin(3\pi/2) = -1$
- $n = 5$: $\sin(5\pi/2) = 1$
- Patrón: $\sin(n\pi/2) = (-1)^{(n-1)/2}$ para n impar.

6.5 Cómo elegir u y dv en integración por partes

Regla LIATE (prioridad de elección de u , de mayor a menor):

1. Logarítmicas ($\ln x$)
2. Inversas trigonométricas ($\arctan x$)
3. Algebraicas (x , x^2 , polinomios)
4. Trigonómicas ($\sin x$, $\cos x$)
5. Exponenciales (e^x)

En nuestro contexto de EDPs, casi siempre es:

- $u = \text{polinomio}(x, x^2, x(L-x)) \rightarrow$ se simplifica al derivar
- $dv = \text{trigonométrica} \rightarrow$ se integra sin problemas

Número de aplicaciones por partes = grado del polinomio:

- $x \cdot \sin \rightarrow 1 \text{ vez}$
- $x^2 \cdot \sin \rightarrow 2 \text{ veces}$
- $x^3 \cdot \sin \rightarrow 3 \text{ veces}$ (raro en exámenes)

6.6 Primitivas de referencia

Estas primitivas aparecen en **cada** integración por partes. Tenerlas memorizadas evita errores de signo:

$$\boxed{\int \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + C}$$

$$\int \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + C$$

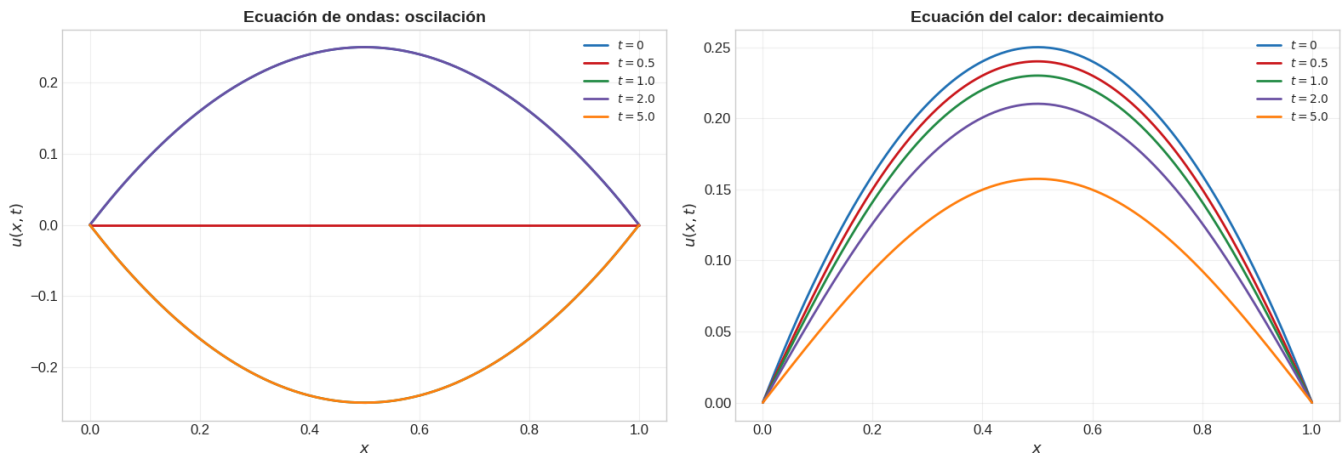
Error frecuente: Olvidar el factor $\frac{L}{n\pi}$ que sale de la regla de la cadena. Si $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, la primitiva de $\sin(\alpha x)$ es $-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x)$, no $-\cos(\alpha x)$.

6.7 Relación entre ecuación de ondas y ecuación del calor

Aspecto	Ondas	Calor
EDP	$u_{tt} = c^2 u_{xx}$	$u_t = k u_{xx}$
Solución espacial	$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Solución temporal	$A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$	$C_n e^{-\lambda_n t}$
Frecuencia/constante	$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$	$\lambda_n = k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$
Condiciones iniciales	$f(x)$ y $g(x)$ (2 funciones)	Solo $f(x)$ (1 función)
Coeficientes de $f(x)$	Idénticos	Idénticos

Conclusión práctica: Aprender a calcular $\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ sirve para **ambas** ecuaciones. La diferencia está solo en qué se hace con esos coeficientes después.

Misma condición inicial $f(x) = x(L-x)$, mismos b_n , distinta evolución



6.8 Integral de $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ (caso base)

Esta es la integral más simple y aparece como **paso intermedio** en casi todos los cálculos:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L = -\frac{L}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{L}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{2L}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Análogamente:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \sin(n\pi) = 0 \quad \forall n \geq 1$$

6.9 Checklist para resolver integrales de Fourier en examen

Seguir estos pasos en orden para no cometer errores:

1. **Comprobar simetría:** Si f es par $\rightarrow b_n = 0$. Si impar $\rightarrow a_n = 0$.
2. **Comprobar simetría respecto a $L/2$:** Si $f(x) = f(L - x) \rightarrow$ solo armónicos impares.
3. **Comprobar si f es un autofunción:** Si $f(x) = \sin(m\pi x/L)$, usar ortogonalidad directamente.
4. **Si f es a trozos:** Partir la integral en cada subintervalo.
5. **Si f es polinómica:** Integración por partes (tantas veces como el grado).
6. **Si hay producto de trigonométricas:** Usar producto-a-suma.
7. **Evaluar en los límites:** Recordar $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
8. **Simplificar $(-1)^n$:** Distinguir n par vs impar si aparece $[1 - (-1)^n]$.
9. **Verificar dimensiones:** Si $\int f(x) \sin dx$ y f tiene unidades de longitud, el resultado debe tener unidades de longitud² (por el dx).

7. Fórmulas de integración de referencia rápida

Integrales indefinidas esenciales

$$\int x \sin(\alpha x) dx = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2} - \frac{x \cos(\alpha x)}{\alpha} + C$$

$$\int x \cos(\alpha x) dx = \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{x \sin(\alpha x)}{\alpha} + C$$

$$\int x^2 \sin(\alpha x) dx = \frac{2x \sin(\alpha x)}{\alpha^2} - \frac{(x^2 \alpha^2 - 2) \cos(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$

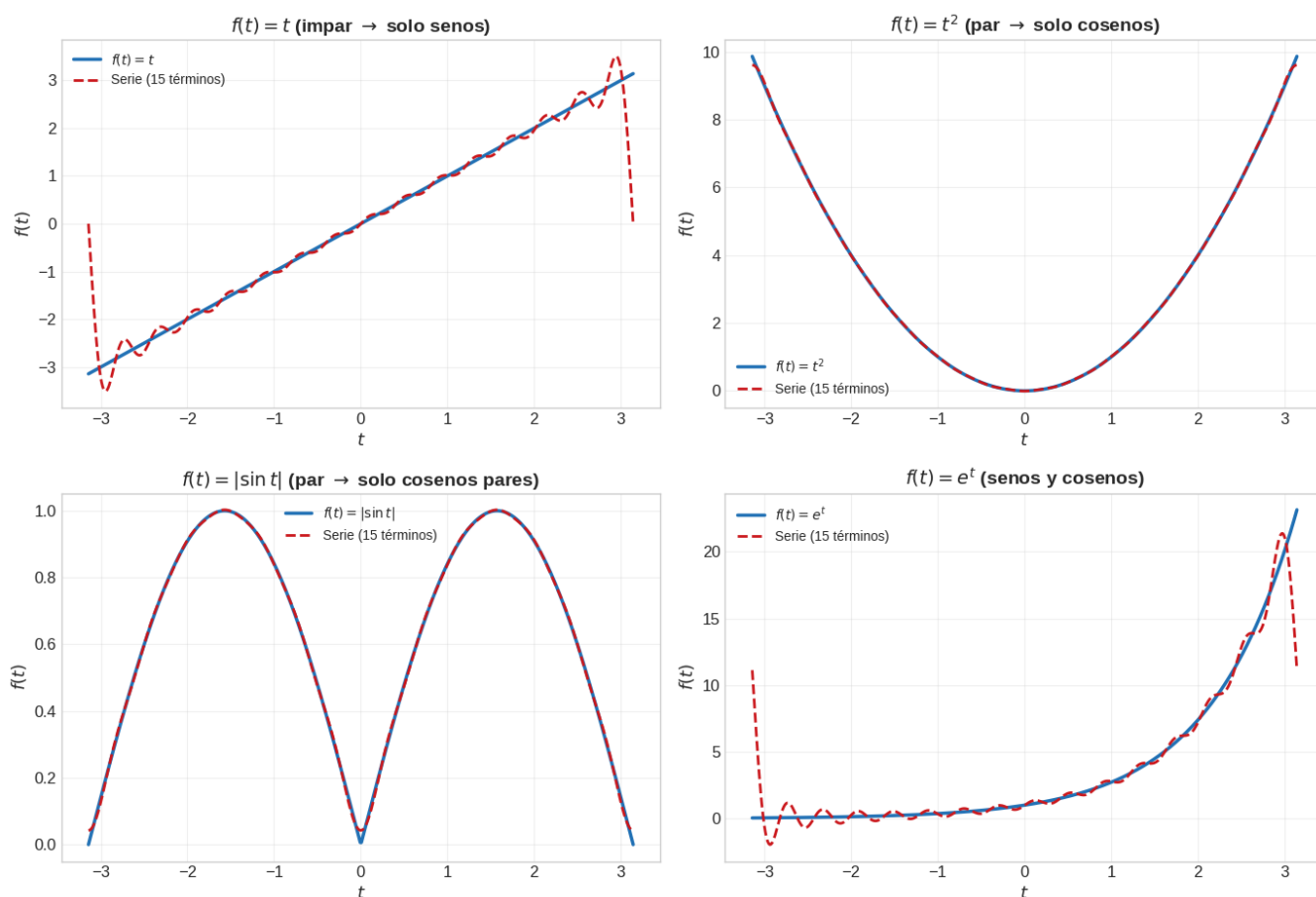
$$\int x^2 \cos(\alpha x) dx = \frac{2x \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{(x^2 \alpha^2 - 2) \sin(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax} [a \cos(bx) + b \sin(bx)]}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax} [a \sin(bx) - b \cos(bx)]}{a^2 + b^2} + C$$

En todos los casos, para las EDPs se tiene $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, $a = 1$, $b = n$.

Series de Fourier en $[-\pi, \pi]$



6.10 Integral complementaria: $\int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$ (coeficientes b_n de $f(t) = t$)

$t \sin(nt)$ es producto de impar $\times$ impar = **par**. Luego:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = 2 \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt$$

Integración por partes:

$$u = t, \quad dv = \sin(nt) dt \implies du = dt, \quad v = -\frac{1}{n} \cos(nt)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \sin(nt) dt &= \left[-\frac{t}{n} \cos(nt) \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt \\ &= -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi = -\frac{\pi}{n} (-1)^n + 0 = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n} \\ \int_{-\pi}^\pi t \sin(nt) dt &= 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n} = \frac{2(-1)^{n+1} \pi}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^\pi t \sin(nt) dt = \frac{2(-1)^{n+1} \pi}{n}}$$

Esto da los coeficientes de la serie de Fourier de $f(t) = t$: $b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2(-1)^{n+1} \pi}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$.

6.11 Errores frecuentes y cómo evitarlos

Error	Consecuencia	Cómo evitarlo
Olvidar $\frac{L}{n\pi}$ al integrar $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	Resultado sin el factor $L/(n\pi)$	Escribir siempre $\alpha = n\pi/L$ y usar $1/\alpha$
Confundir $\cos(n\pi) = (-1)^n$ con $\cos(n\pi) = 1$	Resultado incorrecto para n impar	Verificar con $n = 1$: $\cos \pi = -1$
Olvidar que $\sin(n\pi) = 0$	Términos fantasma que no se anulan	Memorizar: $\sin(n\pi) = 0$ siempre
Poner $b_n = \frac{1}{L} \int$ en vez de $\frac{2}{L} \int$	Resultado con factor 2 de error	El factor es $\frac{2}{L}$, no $\frac{1}{L}$
No partir integral de función a trozos	Integral incorrecta	Si hay $\boxed{\backslash begin{cases}}$, partir en subintervalos
Confundir a_n (ondas) con b_n (ondas)	Coeficientes intercambiados	b_n para posición, a_n para velocidad
Signo incorrecto en $(-1)^{n+1}$	Error de signo global	Verificar: $n = 1 \rightarrow (-1)^2 = +1$