

01_transformada_laplace

June 19, 2026

1 Lección 2 - Transformada de Laplace

Ampliación de Matemáticas - GIERM

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Comprender la definición y existencia de la transformada de Laplace
 - Calcular transformadas directas e inversas utilizando las propiedades y la tabla de transformadas
 - Aplicar la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden
 - Dominar la descomposición en fracciones simples para obtener la transformada inversa
 - Conocer la función escalón de Heaviside y su uso para modelar señales discontinuas
 - Entender y aplicar el teorema de convolución
-

1.2 1. Definición de la Transformada de Laplace

La **transformada de Laplace** convierte una función del tiempo $f(t)$ en una función de la variable compleja s , facilitando la resolución de ecuaciones diferenciales lineales al transformarlas en ecuaciones algebraicas.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Condiciones de existencia: $f(t)$ debe ser de orden exponencial, es decir, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para t suficientemente grande. Entonces $F(s)$ existe para $\text{Re}(s) > \alpha$.

1.2.1 1.1 Transformadas fundamentales

Ejemplo 1: $f(t) = 1$ (función constante)

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Ejemplo 2: $f(t) = t^n$

Aplicando integración por partes n veces (o usando la función Gamma):

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Casos particulares: $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$, $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$

Ejemplo 3: $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Ejemplo 4: $f(t) = \sin(\omega t)$

Usando la identidad de Euler $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ o integrando por partes dos veces:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Ejemplo 5: $f(t) = \cos(\omega t)$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

1.3 2. Tabla completa de transformadas de Laplace

$f(t)$ para $t \geq 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Condición
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$

$f(t)$ para $t \geq 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Condición
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$s > 0$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$s > 0$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$s > \omega $
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$s > \omega $
$u(t-a)$ (Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0, a \geq 0$
$\delta(t)$ (Delta de Dirac)	1	todo s
$\delta(t-a)$	e^{-as}	todo s

1.4 3. Función escalón de Heaviside y función pulso

1.4.1 3.1 Función escalón de Heaviside

La **función escalón unitario** (o de Heaviside) se define como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Su transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad a \geq 0$$

1.4.2 3.2 Función pulso rectangular

Un **pulso** de amplitud A entre $t = a$ y $t = b$ se construye como:

$$p(t) = A[u(t-a) - u(t-b)]$$

$$\mathcal{L}\{p(t)\} = A \left(\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s} \right)$$

Utilidad: permite modelar señales que se activan y desactivan en instantes concretos, muy común en circuitos y sistemas de control.

1.5 4. Propiedades de la Transformada de Laplace

Estas propiedades permiten calcular transformadas complejas a partir de las básicas de la tabla.

1.5.1 4.1 Linealidad

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Ejemplo: $\mathcal{L}\{3t^2 + 5e^{-2t}\} = 3 \cdot \frac{2}{s^3} + 5 \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{6}{s^3} + \frac{5}{s+2}$

1.5.2 4.2 Desplazamiento en frecuencia (*First Shifting Theorem*)

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

Ejemplo: $\mathcal{L}\{e^{-3t} \cos(2t)\}$

Sabemos que $\mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{s}{s^2 + 4}$. Sustituyendo $s \rightarrow s + 3$:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \cos(2t)\} = \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 4}$$

1.5.3 4.3 Desplazamiento en el tiempo (*Second Shifting Theorem*)

$$\mathcal{L}\{f(t - a) u(t - a)\} = e^{-as} F(s), \quad a \geq 0$$

Uso: cuando una función “se enciende” en $t = a$.

Ejemplo: $\mathcal{L}\{(t - 2)^3 u(t - 2)\}$

Con $f(t) = t^3$ y $a = 2$: $F(s) = \frac{6}{s^4}$, luego:

$$\mathcal{L}\{(t - 2)^3 u(t - 2)\} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

1.5.4 4.4 Transformada de la derivada

Esta es la propiedad **clave** para resolver EDOs:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

En general, para la derivada n -ésima:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Truco para el examen: cada derivada “sube” una potencia de s y añade una condición inicial con signo negativo.

1.5.5 4.5 Transformada de la integral

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Ejemplo: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2\tau} d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s(s-2)}$

1.5.6 4.6 Transformada de funciones periódicas

Si $f(t)$ es periódica con periodo $T > 0$, es decir, $f(t+T) = f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

Utilidad: solo necesitamos integrar en un periodo.

1.5.7 4.7 Resumen de propiedades

Propiedad	$f(t)$	$F(s)$
Linealidad	$\alpha f + \beta g$	$\alpha F + \beta G$
Despl. frecuencia	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
Despl. tiempo	$f(t-a) u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Derivada 1ª	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
Derivada 2ª	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
Integral	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Mult. por t	$t f(t)$	$-F'(s)$
Div. por t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$
Periódica	$f(t+T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$

1.6 5. Transformada inversa de Laplace

La **transformada inversa** recupera $f(t)$ a partir de $F(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

En la práctica, se usa la **descomposición en fracciones simples** para expresar $F(s)$ como suma de términos que aparecen en la tabla.

1.6.1 5.1 Raíces reales distintas

Si $F(s) = \frac{P(s)}{(s-a)(s-b)}$ con $a \neq b$:

$$F(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

Los coeficientes se calculan por el **método de Heaviside** (cubrir):

$$A = (s-a)F(s)|_{s=a}, \quad B = (s-b)F(s)|_{s=b}$$

Ejemplo: $F(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)}$

$$A = \left. \frac{5s+3}{s+2} \right|_{s=-1} = \frac{-5+3}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$B = \left. \frac{5s+3}{s+1} \right|_{s=-2} = \frac{-10+3}{-2+1} = \frac{-7}{-1} = 7$$

$$F(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{7}{s+2} \implies f(t) = -2e^{-t} + 7e^{-2t}$$

1.6.2 5.2 Raíces reales repetidas

Si $F(s) = \frac{P(s)}{(s-a)^n}$, la descomposición incluye:

$$F(s) = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-a)^n}$$

Ejemplo: $F(s) = \frac{2s+5}{(s+1)^2(s+3)}$

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+3}$$

Calculamos: - $B = (s+1)^2 F(s)|_{s=-1} = \left. \frac{2s+5}{s+3} \right|_{s=-1} = \frac{3}{2}$ - $C = (s+3)F(s)|_{s=-3} = \left. \frac{2s+5}{(s+1)^2} \right|_{s=-3} = \frac{-1}{4}$
 - A : igualando coeficientes o sustituyendo un valor cómodo, por ejemplo $s = 0$:

$$\frac{5}{1 \cdot 3} = \frac{A}{1} + \frac{3/2}{1} + \frac{-1/4}{3} \implies \frac{5}{3} = A + \frac{3}{2} - \frac{1}{12} \implies A = \frac{5}{3} - \frac{17}{12} = \frac{1}{4}$$

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}$$

1.6.3 5.3 Raíces complejas conjugadas

Si el denominador tiene factores cuadráticos irreducibles $s^2 + bs + c$ con $b^2 - 4c < 0$:

$$\frac{As + B}{s^2 + bs + c}$$

Se completa el cuadrado en el denominador para obtener la forma $(s - \alpha)^2 + \omega^2$ y luego se identifica con senos/cosenos amortiguados.

Ejemplo: $F(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 13}$

Completando cuadrado: $s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 9 = (s + 2)^2 + 3^2$

$$F(s) = \frac{3s + 7}{(s + 2)^2 + 9} = \frac{3(s + 2) + 1}{(s + 2)^2 + 9} = 3 \cdot \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s + 2)^2 + 9}$$

$$f(t) = 3e^{-2t} \cos(3t) + \frac{1}{3}e^{-2t} \sin(3t)$$

Truco: siempre reescribir el numerador como $\alpha(s + a) + \beta$ donde a es la parte real de las raíces.

1.7 6. Aplicación a EDOs de segundo orden

1.7.1 6.1 Método general

Para resolver una EDO lineal con coeficientes constantes y condiciones iniciales:

Paso 1: Aplicar $\mathcal{L}$ a ambos lados de la ecuación, usando las propiedades de la derivada.

Paso 2: Sustituir las condiciones iniciales $y(0)$, $y'(0)$.

Paso 3: Despejar $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Paso 4: Descomponer $Y(s)$ en fracciones simples.

Paso 5: Aplicar $\mathcal{L}^{-1}$ término a término para obtener $y(t)$.

1.7.2 6.2 Ejemplo resuelto: $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-t}$

Datos: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Paso 1: Aplicar $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 5\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 5[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = \frac{2}{s + 1}$$

Paso 2: Sustituir $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$:

$$s^2Y - s - 0 + 5sY - 5 + 6Y = \frac{2}{s+1}$$

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = \frac{2}{s+1} + s + 5$$

Paso 3: Despejar $Y(s)$. Notemos que $s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$$

Paso 4: Fracciones simples del primer término:

$$\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

- $A = \frac{2}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1$
- $B = \frac{2}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-2} = \frac{2}{(-1)(1)} = -2$
- $C = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-3} = \frac{2}{(-2)(-1)} = 1$

Segundo término:

$$\frac{s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+3}$$

- $D = \frac{s+5}{s+3} \Big|_{s=-2} = \frac{3}{1} = 3$
- $E = \frac{s+5}{s+2} \Big|_{s=-3} = \frac{2}{-1} = -2$

Total:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-2+3}{s+2} + \frac{1-2}{s+3} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Paso 5: Antitransformar:

$$\boxed{y(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}}$$

Verificación: $y(0) = 1 + 1 - 1 = 1 \checkmark$, $y'(0) = -1 - 2 + 3 = 0 \checkmark$

1.8 7. Convolución y Teorema de Convolución

1.8.1 7.1 Definición de convolución

La **convolución** de dos funciones f y g se define como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Propiedades: - **Conmutativa:** $f * g = g * f$ - **Asociativa:** $(f * g) * h = f * (g * h)$ - **Distributiva:** $f * (g + h) = f * g + f * h$

1.8.2 7.2 Teorema de convolución

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s)$$

Equivalentemente:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Utilidad: cuando $F(s) \cdot G(s)$ es difícil de descomponer en fracciones simples, pero $F(s)$ y $G(s)$ por separado son fáciles de antitransformar.

1.8.3 7.3 Ejemplo resuelto

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$ usando convolución.

Identificamos: $F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1$, $G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow g(t) = e^{-t}$

$$(f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-\tau} d\tau = [-e^{-\tau}]_0^t = 1 - e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = 1 - e^{-t}$$

Verificación por fracciones simples: $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow f(t) = 1 - e^{-t} \checkmark$

1.9 8. Ejercicios resueltos del boletín

1.9.1 Ejercicio 1: Transformada directa con propiedades

Calcular $\mathcal{L}\{t^2 e^{3t} + 4 \sin(2t)\}$

Solución:

Por linealidad:

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} + 4 \mathcal{L}\{\sin(2t)\}$$

Primer término: usamos la tabla $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ con $n = 2$, $a = 3$:

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} = \frac{2!}{(s-3)^3} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

Segundo término:

$$4 \mathcal{L}\{\sin(2t)\} = 4 \cdot \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{8}{s^2 + 4}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^2 e^{3t} + 4 \sin(2t)\} = \frac{2}{(s-3)^3} + \frac{8}{s^2 + 4}}$$

1.9.2 Ejercicio 2: Transformada inversa con raíces distintas

Calcular $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s-1}{s^2-3s+2} \right\}$

Solución:

Factorizamos el denominador: $s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2)$

Fracciones simples:

$$\frac{3s-1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

- $A = \frac{3s-1}{s-2} \Big|_{s=1} = \frac{2}{-1} = -2$
- $B = \frac{3s-1}{s-1} \Big|_{s=2} = \frac{5}{1} = 5$

$$\boxed{f(t) = -2e^t + 5e^{2t}}$$

1.9.3 Ejercicio 3: Transformada inversa con raíces complejas

Calcular $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+10}{s^2+6s+25} \right\}$

Solución:

Completamos cuadrado: $s^2 + 6s + 25 = (s+3)^2 + 16 = (s+3)^2 + 4^2$

Reescribimos el numerador en función de $(s+3)$:

$$2s + 10 = 2(s+3) + 4$$

$$F(s) = 2 \cdot \frac{s+3}{(s+3)^2+16} + \frac{4}{(s+3)^2+16} = 2 \cdot \frac{s+3}{(s+3)^2+16} + 1 \cdot \frac{4}{(s+3)^2+16}$$

$$\boxed{f(t) = 2e^{-3t} \cos(4t) + e^{-3t} \sin(4t)}$$

1.9.4 Ejercicio 4: EDO de primer orden

Resolver $y' + 3y = e^{-t}$, con $y(0) = 2$.

Solución:

Paso 1: Aplicar $\mathcal{L}$:

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$(s+3)Y(s) = \frac{1}{s+1} + 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} + \frac{2}{s+3}$$

Paso 2: Fracciones simples del primer término:

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$\begin{aligned} \bullet A &= \left. \frac{1}{s+3} \right|_{s=-1} = \frac{1}{2} \\ \bullet B &= \left. \frac{1}{s+1} \right|_{s=-3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/2+2}{s+3} = \frac{1/2}{s+1} + \frac{3/2}{s+3}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t}}$$

Verificación: $y(0) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \checkmark$

1.9.5 Ejercicio 5: EDO de segundo orden con raíces complejas

Resolver $y'' + 4y = 0$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

Solución:

Paso 1: Aplicar $\mathcal{L}$:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 4)Y(s) = s + 6$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{6}{s^2 + 4} = \frac{s}{s^2 + 2^2} + 3 \cdot \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

Paso 2: Antitransformar directamente de la tabla:

$$y(t) = \cos(2t) + 3 \sin(2t)$$

Verificación: $y(0) = 1 + 0 = 1 \checkmark$, $y'(0) = 0 + 6 = 6 \checkmark$

1.9.6 Ejercicio 6: Transformada con función escalón

Calcular $\mathcal{L}\{(t-3)^2 u(t-3)\}$

Solución:

Usamos el segundo teorema de desplazamiento: $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

Con $f(t) = t^2$ y $a = 3$: $F(s) = \frac{2}{s^3}$

$$\mathcal{L}\{(t-3)^2 u(t-3)\} = \frac{2e^{-3s}}{s^3}$$

1.9.7 Ejercicio 7: Transformada inversa con raíces repetidas

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)^2}\right\}$

Solución:

$$\frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

De la tabla: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}$

$$f(t) = e^{-t} + 2te^{-t} = (1+2t)e^{-t}$$

1.10 9. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

#	Tipo de ejercicio	Técnica clave	Ecuación clave	Dificultad
1	Transformada directa básica	Tabla	$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	Baja

#	Tipo de ejercicio	Técnica clave	Ecuación clave	Dificultad
2	Transformada con linealidad	Suma de tabla	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	Baja
3	Desplazamiento en frecuencia	Sustitución $s \rightarrow s - a$	$\mathcal{L}\{e^{at}f\} = F(s - a)$	Media
4	Desplazamiento en tiempo	Heaviside	$e^{-as}F(s)$	Media
5	Inversa con raíces reales distintas	Fracciones simples (Heaviside)	Cubrir y evaluar	Media
6	Inversa con raíces repetidas	Fracciones simples + derivada	$\frac{A_k}{(s - a)^k}$	Alta
7	Inversa con raíces complejas	Completar cuadrado	$(s - \alpha)^2 + \omega^2$	Alta
8	EDO de primer orden	Laplace + fracciones simples	$sY - y(0) + aY = G(s)$	Media
9	EDO de segundo orden	Laplace + fracciones simples	$s^2Y - sy(0) - y'(0) + \dots$	Alta
10	Convolución	Integral de convolución	$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$	Media
11	Función periódica	Fórmula de periódicas	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T$	Alta
12	Derivada de $F(s)$ / multiplicar por t	$t f(t) \leftrightarrow -F'(s)$	$\mathcal{L}\{tf\} = -F'(s)$	Media

1.10.1 9.1 Tipo 1: Transformada directa básica

Se aplica directamente la tabla de transformadas.

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 1 Calcular $\mathcal{L}\{5t^3 e^{-2t}\}$

Datos: $n = 3$, $a = -2$

$$\mathcal{L}\{5t^3 e^{-2t}\} = 5 \cdot \frac{3!}{(s + 2)^4} = 5 \cdot \frac{6}{(s + 2)^4}$$

$$= \frac{30}{(s + 2)^4}$$

1.10.2 9.2 Tipo 2: Transformada con linealidad

Se descompone la función en sumandos y se transforma cada uno por separado.

$$\boxed{\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha F(s) + \beta G(s)}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 2 Calcular $\mathcal{L}\{3 \cosh(5t) - 7t^2 + e^{4t}\}$

$$= 3 \cdot \frac{s}{s^2 - 25} - 7 \cdot \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s - 4}$$

$$\boxed{= \frac{3s}{s^2 - 25} - \frac{14}{s^3} + \frac{1}{s - 4}}$$

1.10.3 9.3 Tipo 3: Desplazamiento en frecuencia

Cuando $f(t)$ va multiplicada por e^{at} , se sustituye s por $s - a$ en la transformada.

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 3 Calcular $\mathcal{L}\{e^{2t} \sin(3t)\}$

Paso 1: $\mathcal{L}\{\sin(3t)\} = \frac{3}{s^2 + 9}$

Paso 2: Sustituir $s \rightarrow s - 2$:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{2t} \sin(3t)\} = \frac{3}{(s - 2)^2 + 9}}$$

1.10.4 9.4 Tipo 4: Desplazamiento en tiempo (Heaviside)

Para funciones que “se encienden” en $t = a$.

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t - a) u(t - a)\} = e^{-as} F(s)}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 4 Calcular $\mathcal{L}\{\sin(2(t - \pi)) u(t - \pi)\}$

Paso 1: Identificar $f(t) = \sin(2t)$, $a = \pi$

Paso 2: $F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(2(t - \pi)) u(t - \pi)\} = \frac{2 e^{-\pi s}}{s^2 + 4}}$$

1.10.5 9.5 Tipo 5: Inversa con raíces reales distintas

Se factoriza el denominador y se aplica el **método de Heaviside** (cubrir).

$$\boxed{\frac{P(s)}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}, \quad A = \left. \frac{P(s)}{s-b} \right|_{s=a}}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 5 Calcular $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{7s+2}{s^2+s-6} \right\}$

Paso 1: $s^2 + s - 6 = (s+3)(s-2)$

Paso 2: $\frac{7s+2}{(s+3)(s-2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2}$

$$\bullet A = \left. \frac{7s+2}{s-2} \right|_{s=-3} = \frac{-19}{-5} = \frac{19}{5}$$

$$\bullet B = \left. \frac{7s+2}{s+3} \right|_{s=2} = \frac{16}{5}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{19}{5}e^{-3t} + \frac{16}{5}e^{2t}}$$

1.10.6 9.6 Tipo 6: Inversa con raíces repetidas

La descomposición incluye potencias crecientes del factor repetido.

$$\boxed{\frac{P(s)}{(s-a)^n} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-a)^n}}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 6 Calcular $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s^2+1}{s(s-1)^2} \right\}$

$$\frac{3s^2+1}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$\bullet A = \left. \frac{3s^2+1}{(s-1)^2} \right|_{s=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\bullet C = \left. \frac{3s^2+1}{s} \right|_{s=1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\bullet B: \text{ sustituir } s=2: \frac{13}{2} = \frac{1}{2} + \frac{B}{1} + \frac{4}{1} \implies B = \frac{13}{2} - \frac{1}{2} - 4 = 2$$

$$\boxed{f(t) = 1 + 2e^t + 4te^t}$$

1.10.7 9.7 Tipo 7: Inversa con raíces complejas

Se completa el cuadrado y se reescribe el numerador.

$$\frac{\alpha(s-a) + \beta\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \Rightarrow \alpha e^{at} \cos(\omega t) + \beta e^{at} \sin(\omega t)$$

Ejercicio resuelto: Tipo 7 Calcular $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+5}{s^2+2s+10} \right\}$

Paso 1: Completar cuadrado: $s^2 + 2s + 10 = (s+1)^2 + 9 = (s+1)^2 + 3^2$

Paso 2: Reescribir numerador: $s+5 = (s+1) + 4$

$$\frac{(s+1) + 4}{(s+1)^2 + 9} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{(s+1)^2 + 9}$$

$$f(t) = e^{-t} \cos(3t) + \frac{4}{3} e^{-t} \sin(3t)$$

1.10.8 9.8 Tipo 8: EDO de primer orden

$$y' + ay = g(t) \Rightarrow (s+a)Y(s) = G(s) + y(0)$$

Ejercicio resuelto: Tipo 8 Resolver $y' - 2y = 4$, con $y(0) = 1$.

$$sY - 1 - 2Y = \frac{4}{s} \Rightarrow (s-2)Y = \frac{4}{s} + 1 = \frac{s+4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2}$$

$$\begin{aligned} \bullet A &= \left. \frac{s+4}{s-2} \right|_{s=0} = \frac{4}{-2} = -2 \\ \bullet B &= \left. \frac{s+4}{s} \right|_{s=2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$y(t) = -2 + 3e^{2t}$$

Verificación: $y(0) = -2 + 3 = 1 \checkmark$

1.10.9 9.9 Tipo 9: EDO de segundo orden

$$y'' + ay' + by = g(t) \Rightarrow (s^2 + as + b)Y = G(s) + (s+a)y(0) + y'(0)$$

Ejercicio resuelto: Tipo 9 Resolver $y'' + 2y' + 5y = 0$, con $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$.

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = 2s + 4 + (-4) = 2s$$

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2s}{(s+1)^2 + 4}$$

Reescribimos: $2s = 2(s+1) - 2$

$$Y(s) = 2 \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} - \frac{2}{(s+1)^2 + 4} = 2 \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} - 1 \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

$$\boxed{y(t) = 2e^{-t} \cos(2t) - e^{-t} \sin(2t)}$$

Verificación: $y(0) = 2 \cdot 1 - 0 = 2 \checkmark$

1.10.10 9.10 Tipo 10: Convolución

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 10 Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\}$ usando convolución.

Identificamos: $F(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow f(t) = e^{-t}$, $G(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow g(t) = e^{-2t}$

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cdot e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-2t} [e^{\tau}]_0^t = e^{-2t}(e^t - 1)$$

$$\boxed{f(t) = e^{-t} - e^{-2t}}$$

1.10.11 9.11 Tipo 11: Función periódica

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 11 Calcular la transformada de la onda cuadrada: $f(t) = 1$ para $0 \leq t < 1$, $f(t) = -1$ para $1 \leq t < 2$, con periodo $T = 2$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) e^{-st} dt &= \int_0^1 e^{-st} dt + \int_1^2 (-1) e^{-st} dt \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s} \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})}$$

donde usamos $1 - e^{-2s} = (1 - e^{-s})(1 + e^{-s})$.

1.10.12 9.12 Tipo 12: Multiplicación por t (derivada de $F(s)$)

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s)$$

Ejercicio resuelto: Tipo 12 Calcular $\mathcal{L}\{t \cos(3t)\}$

Paso 1: $F(s) = \mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2 + 9}$

Paso 2: Derivar:

$$F'(s) = \frac{(s^2 + 9) - s \cdot 2s}{(s^2 + 9)^2} = \frac{9 - s^2}{(s^2 + 9)^2}$$

Paso 3: Aplicar el signo negativo:

$$\mathcal{L}\{t \cos(3t)\} = -F'(s) = \frac{s^2 - 9}{(s^2 + 9)^2}$$

1.11 10. Resumen y tabla de fórmulas clave

1.11.1 Transformadas fundamentales

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$u(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t)$	1

1.11.2 Propiedades principales

Propiedad	Fórmula
Linealidad	$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha F + \beta G$
Despl. frecuencia	$\mathcal{L}\{e^{at} f\} = F(s - a)$
Despl. tiempo	$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as} F(s)$
Derivada	$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0)$
Derivada 2ª	$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F - sf(0) - f'(0)$
Integral	$\mathcal{L}\{\int_0^t f d\tau\} = F(s)/s$
Convolución	$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s)$
Mult. por t	$\mathcal{L}\{tf\} = -F'(s)$
Periódica	$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f e^{-st} dt$

1.11.3 Método de resolución de EDOs

Paso	Acción
1	Aplicar $\mathcal{L}$ a toda la ecuación
2	Sustituir condiciones iniciales
3	Despejar $Y(s)$
4	Descomponer en fracciones simples
5	Aplicar $\mathcal{L}^{-1}$ y verificar