

Lección 3 - Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Ampliación de Matemáticas - GIERM

Objetivos de aprendizaje

- Reducir una EDO de orden superior a un sistema de primer orden
- Resolver sistemas homogéneos $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ mediante autovalores y autovectores
- Clasificar retratos de fase: nodo, silla, espiral, centro
- Tratar el caso no diagonalizable con cadenas de Jordan
- Resolver sistemas no homogéneos por variación de parámetros, coeficientes indeterminados y Laplace
- Verificar soluciones numéricamente con `scipy.integrate.solve_ivp`

Configuración lista.

1. Reducción de orden: de EDO de orden n a sistema de primer orden

Toda EDO de orden n se puede reescribir como un **sistema de n ecuaciones de primer orden**. Esto unifica el tratamiento de todas las EDO lineales.

1.1 Método general

Dada la EDO de orden 2:

$$x'' = f(x', x, t)$$

Definimos las variables de estado $y_1 = x, y_2 = x'$. Entonces:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(y_2, y_1, t) \end{cases}$$

Ejemplo

La EDO $x'' + 3x' + 2x = \cos(t)$ se convierte en:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 3y_2 + \cos(t) \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Generalización a orden n

Para $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = g(t)$, definimos $y_k = x^{(k-1)}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Esta es la **matriz compañera** de la EDO.

2. Sistema lineal $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$

2.1 Teorema de existencia y unicidad

Si A es una matriz $n \times n$ de coeficientes constantes y $\mathbf{f}(t)$ es continua en un intervalo I , entonces para cada condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ existe una **única** solución definida en todo I .

2.2 Estructura de la solución general

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + Y(t)\mathbf{c}}$$

donde:

- $\mathbf{y}_p(t)$ es una **solución particular** del sistema completo
- $Y(t)$ es la **matriz fundamental** (columnas = n soluciones linealmente independientes del homogéneo)
- $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de constantes arbitrarias

2.3 Matriz fundamental y Wronskiano

La matriz fundamental $Y(t)$ satisface $Y'(t) = AY(t)$, y su determinante $W(t) = \det(Y(t)) \neq 0$ para todo t (Wronskiano).

Propiedad clave: $W(t) = W(t_0) \cdot e^{\text{tr}(A)(t-t_0)}$ (fórmula de Abel-Liouville).

3. Sistema homogéneo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ con A diagonalizable

3.1 Autovalores reales distintos

Si A tiene autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ todos distintos con autovectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, la solución general es:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{u}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{u}_n$$

¿Por qué funciona? Si $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, entonces $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$ satisface $\mathbf{y}' = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{u} = A(e^{\lambda t}\mathbf{u}) = A\mathbf{y}$.

3.2 Autovalores complejos conjugados

Si $\lambda = \alpha \pm i\beta$ con autovector $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, las dos soluciones reales linealmente independientes son:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= e^{\alpha t} [\mathbf{v} \cos(\beta t) - \mathbf{w} \sin(\beta t)] \\ \mathbf{y}_2(t) &= e^{\alpha t} [\mathbf{v} \sin(\beta t) + \mathbf{w} \cos(\beta t)] \end{aligned}$$

- Si $\alpha < 0$: **espiral estable** (atractora)
- Si $\alpha > 0$: **espiral inestable** (repulsora)
- Si $\alpha = 0$: **centro** (órbitas cerradas)

3.3 Ejemplo: sistema 3×3 diagonalizable

Resolver $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)[(-1 - \lambda)^2 + 4] = 0$$

Paso 2: Autovalores:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm 2i$$

Paso 3: Autovector para $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \implies \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

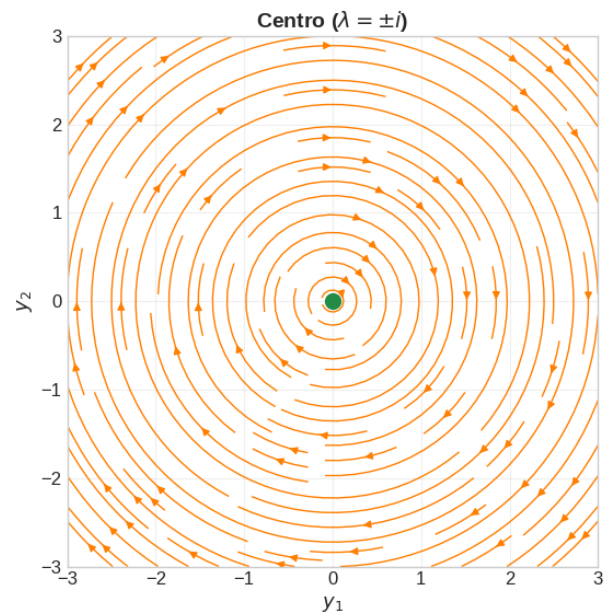
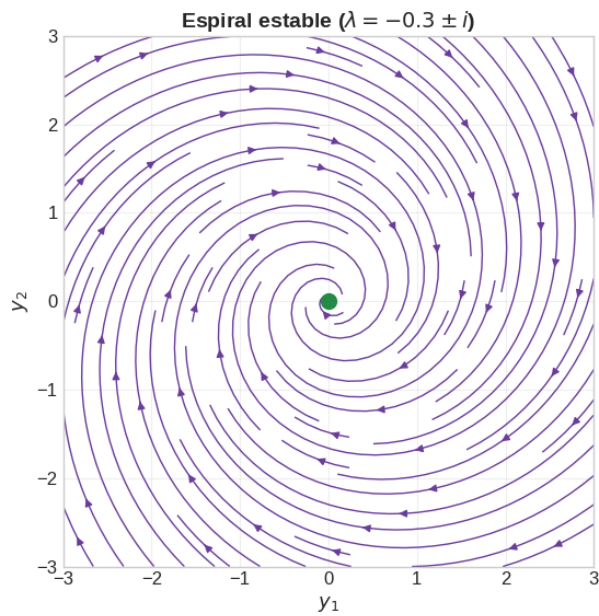
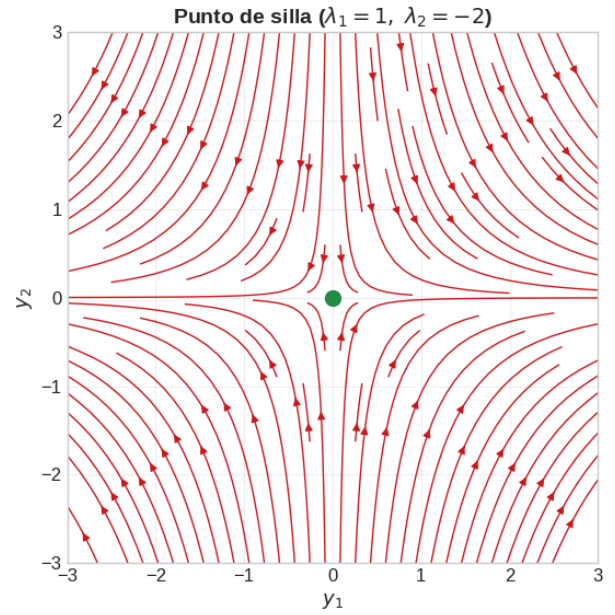
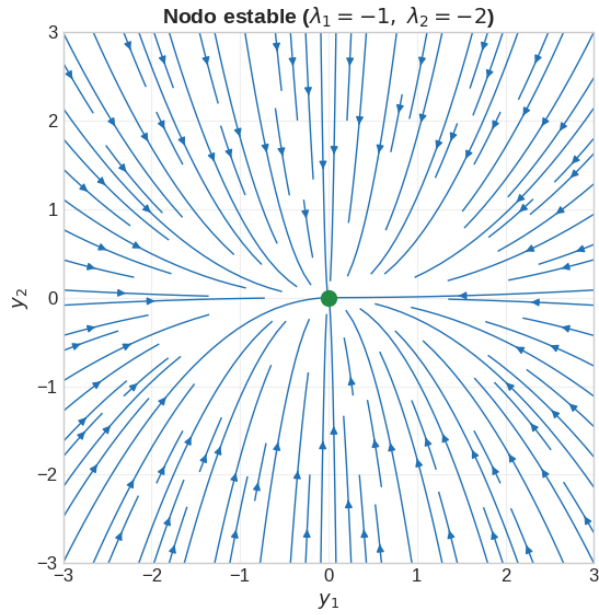
Paso 4: Para $\lambda = -1 + 2i$, resolvemos $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

Paso 5: Solución general ($\alpha = -1, \beta = 2$):

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

Retratos de fase: clasificación de equilibrios 2D



3.4 Clasificación de puntos de equilibrio en $\mathbb{R}^2$

Autovalores	Tipo	Estabilidad
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo estable	Asintóticamente estable
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$	Nodo inestable	Inestable
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Punto de silla	Inestable
$\alpha \pm i\beta, \alpha < 0$	Espiral estable	Asintóticamente estable
$\alpha \pm i\beta, \alpha > 0$	Espiral inestable	Inestable

Autovalores	Tipo	Estabilidad
$\pm i\beta$ (puros imaginarios)	Centro	Estable (no asint.)
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, diag.	Nodo estrella estable	Asintóticamente estable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, no diag.	Nodo impropio estable	Asintóticamente estable

Truco para el examen: La traza $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ y el determinante $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ determinan completamente el tipo:

- $\det(A) < 0 \implies$ silla
- $\det(A) > 0$ y $\text{tr}(A) < 0 \implies$ estable
- $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0 \implies$ espiral/centro

4. Sistema homogéneo con A no diagonalizable

4.1 Autovectores generalizados y cadenas de Jordan

Cuando A tiene un autovalor λ de multiplicidad algebraica m pero multiplicidad geométrica $p < m$, no hay suficientes autovectores. Se necesitan **autovectores generalizados**.

Cadena de Jordan de longitud k para λ :

$$(A - \lambda I)\mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \quad (A - \lambda I)\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}_k, \quad \dots, \quad (A - \lambda I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$$

4.2 Soluciones asociadas a un bloque de Jordan 2×2

Para un bloque de Jordan $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ con autovector $\mathbf{u}$ y autovector generalizado $\mathbf{w}$ ($(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{u}$):

$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_2(t) &= e^{\lambda t} (t\mathbf{u} + \mathbf{w}) \end{aligned}$
--

4.3 Fórmula general con exponencial matricial

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{y}_0$$

donde para un bloque de Jordan $J_k(\lambda)$ de tamaño k :

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 1 & t & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Ejemplo 2×2 no diagonalizable

Resolver $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Paso 1: $\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 = 0 \implies \lambda = 3$ (doble).

Paso 2: Autovector: $(A - 3I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solo un autovector $\implies A$ **no es diagonalizable**.

Paso 3: Autovector generalizado: $(A - 3I)\mathbf{w} = \mathbf{u}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies w_2 = 1 \implies \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Solución general:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Paso 5: Condición inicial $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2$$

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2 \end{pmatrix}}$$

4.5 Ejemplo 3×3 no diagonalizable

Resolver $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 3, multiplicidad geométrica 1.

Cadena de Jordan: $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (A - 2I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \implies \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

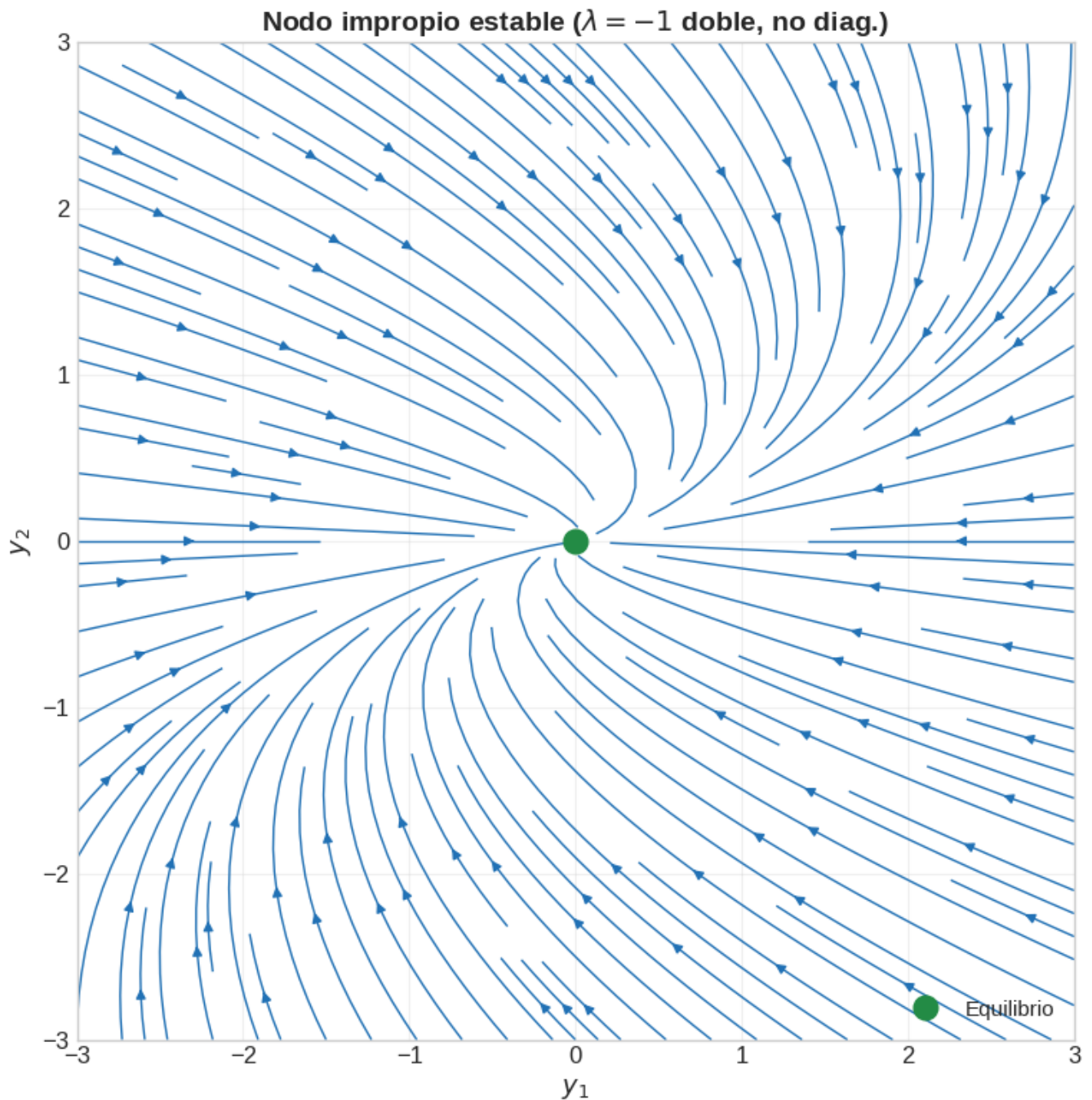
$(A - 2I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Solución general:

$$\mathbf{y}(t) = e^{2t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + c_3 \left(\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right]$$

Equivalentemente:

$$\mathbf{y}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} \\ c_2 + c_3 t \\ c_3 \end{pmatrix}$$



5. No homogéneo: variación de parámetros

5.1 Fórmula general

Para $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$, si $Y(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo:

$$\mathbf{y}_p(t) = Y(t) \int Y(t)^{-1} \mathbf{f}(t) dt$$

Con condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$:

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0 + Y(t) \int_{t_0}^t Y(s)^{-1}\mathbf{f}(s) ds$$

5.2 Pasos del método

1. Resolver el sistema homogéneo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (obtener $Y(t)$)
2. Calcular $Y(t)^{-1}$
3. Calcular el producto $Y(t)^{-1}\mathbf{f}(t)$
4. Integrar componente a componente
5. Multiplicar por $Y(t)$

5.3 Ejemplo resuelto: variación de parámetros

Resolver $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sec(t) \end{pmatrix}$

Paso 1: Homogéneo. $\lambda = \pm i$, autovectores complejos $\rightarrow$ soluciones reales:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Paso 2: Como $Y(t)$ es la matriz de rotación, $Y(t)^{-1} = Y(t)^T$:

$$Y(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Paso 3:

$$Y(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tan t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Integrar:

$$\int \begin{pmatrix} -\tan t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \ln |\cos t| \\ t \end{pmatrix}$$

Paso 5: Solución particular:

$$\mathbf{y}_p(t) = Y(t) \begin{pmatrix} \ln |\cos t| \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cdot \ln |\cos t| + t \sin t \\ -\sin t \cdot \ln |\cos t| + t \cos t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \ln |\cos t| + t \sin t \\ -\sin t \ln |\cos t| + t \cos t \end{pmatrix}$$

6. No homogéneo: coeficientes indeterminados

6.1 Idea del método

Para $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$, se propone una solución particular $\mathbf{y}_p(t)$ con la **misma forma** que $\mathbf{f}(t)$, y se determinan los coeficientes sustituyendo en la EDO.

6.2 Tabla de soluciones tentativas

$\mathbf{f}(t)$	$\mathbf{y}_p(t)$ propuesta
$\mathbf{a}$ (constante)	$\mathbf{c}$ (constante)
$\mathbf{a}e^{\mu t}$ (μ no autovalor)	$\mathbf{c}e^{\mu t}$
$\mathbf{a}e^{\mu t}$ (μ autovalor simple)	$(\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t)e^{\mu t}$
$\mathbf{a} \cos(\omega t)$ + $\mathbf{b} \sin(\omega t)$	$\mathbf{c} \cos(\omega t)$ + $\mathbf{d} \sin(\omega t)$
$\mathbf{a}t^n$	$\mathbf{c}_n t^n$ + $\mathbf{c}_{n-1} t^{n-1}$ + $\dots$ + $\mathbf{c}_0$

6.3 Ejemplo: $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

Con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (autovalores 1, -1, ninguno es 2).

Proponemos $\mathbf{y}_p = \mathbf{c}e^{2t}$. Sustituyendo: $2\mathbf{c}e^{2t} = A\mathbf{c}e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$.

$$(2I - A)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}}$$

Error frecuente: Si μ coincide con un autovalor, la propuesta $\mathbf{c}e^{\mu t}$ **no funciona**. Hay que multiplicar por t .

7. No homogéneo: método de Laplace para sistemas

7.1 Procedimiento

Aplicando $\mathcal{L}$ a $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$ con $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$:

$$s\mathbf{Y}(s) - \mathbf{y}_0 = A\mathbf{Y}(s) + \mathbf{F}(s)$$

$$(sI - A)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{F}(s)$$

$$\boxed{\mathbf{Y}(s) = (sI - A)^{-1}[\mathbf{y}_0 + \mathbf{F}(s)]}$$

Luego se aplica $\mathcal{L}^{-1}$ componente a componente.

7.2 Ejemplo

Resolver $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}, \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 1:

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}, \quad \det = (s-1)^2 + 1$$

Paso 2:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2 + 1} \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}$$

Paso 3:

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{1}{(s-1)^2 + 1} \begin{pmatrix} s-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Transformada inversa:

$$X(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} \implies x(t) = e^t \cos t$$

$$Y(s) = \frac{-1}{(s-1)^2 + 1} \implies y(t) = -e^t \sin t$$

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}}$$

8. Ejercicios resueltos con verificación numérica

Ejercicio resuelto 1: Sistema 2×2 con autovalores reales distintos

Datos: $x' = 4x - 3y$, $y' = 6x - 7y$, con $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Paso 1: Escribir la matriz del sistema.

Identificamos los coeficientes del sistema:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Calcular los autovalores — escribir $\det(A - \lambda I) = 0$ explícitamente.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 6 & -7 - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(-7 - \lambda) - (-3)(6)$$

Expandimos el primer producto paso a paso:

$$\begin{aligned} (4 - \lambda)(-7 - \lambda) &= 4 \cdot (-7) + 4 \cdot (-\lambda) + (-\lambda)(-7) + (-\lambda)(-\lambda) = -28 - 4\lambda + 7\lambda + \lambda^2 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 28 \end{aligned}$$

El segundo término: $(-3)(6) = -18$, así que $-(-3)(6) = +18$.

Juntando todo:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda - 28 + 18 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

Resolvemos con la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{-3 + 7}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{-3 - 7}{2} = -5}$$

Paso 3: Calcular el autovector para $\lambda_1 = 2$.

Planteamos $(A - 2I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4-2 & -3 \\ 6 & -7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

Sistema aumentado:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \end{array} \right)$$

Reducción por filas: $F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De la primera fila: $2u_1 - 3u_2 = 0 \implies u_1 = \frac{3}{2}u_2$.

Tomamos $u_2 = 2$ para evitar fracciones:

$$\boxed{\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Paso 4: Calcular el autovector para $\lambda_2 = -5$.

Planteamos $(A - (-5)I)\mathbf{u}_2 = (A + 5I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$:

$$A + 5I = \begin{pmatrix} 4+5 & -3 \\ 6 & -7+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Sistema aumentado:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Reducción: $F_2 \leftarrow F_2 - \frac{2}{3}F_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De la primera fila: $9u_1 - 3u_2 = 0 \implies u_1 = \frac{1}{3}u_2$.

Tomamos $u_2 = 3$:

$$\boxed{\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Paso 5: Escribir la solución general.

Con autovalores reales distintos, la solución general es:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{u}_2 = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Paso 6: Aplicar la condición inicial $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En $t = 0$: $e^0 = 1$, así que:

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esto da el sistema:

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $c_2 = 1 - 3c_1$. Sustituyendo en la segunda:

$$2c_1 + 3(1 - 3c_1) = 2 \implies 2c_1 + 3 - 9c_1 = 2 \implies -7c_1 = -1 \implies c_1 = \frac{1}{7}$$

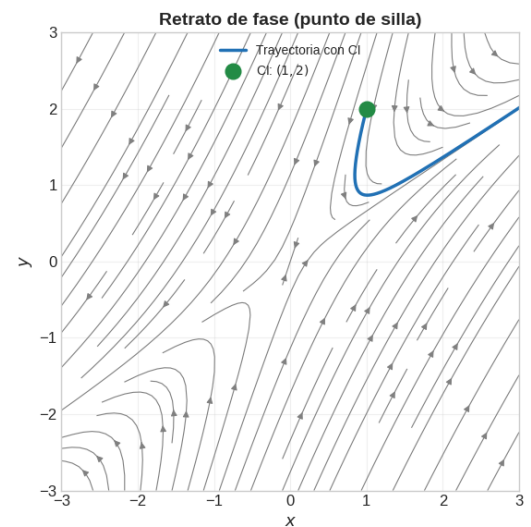
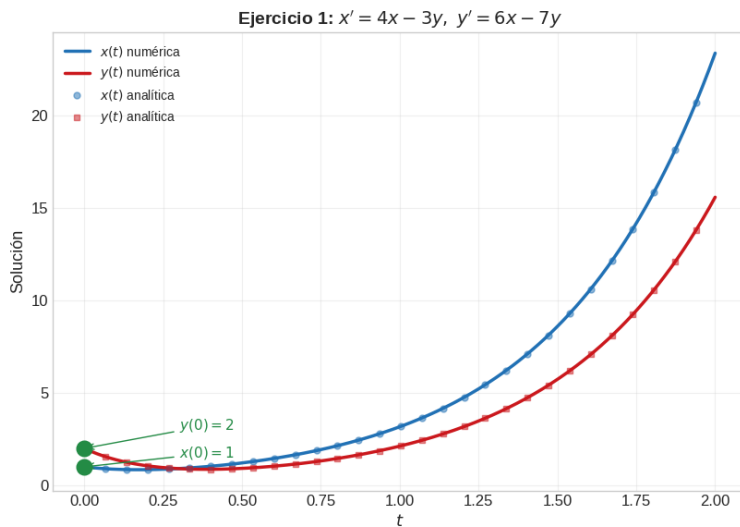
$$c_2 = 1 - 3 \cdot \frac{1}{7} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

Verificación rápida: $3 \cdot \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{3+4}{7} = 1 \checkmark$ y $2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{2+12}{7} = 2 \checkmark$

Solución final:

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{7} e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} e^{2t} + \frac{4}{7} e^{-5t} \\ \frac{2}{7} e^{2t} + \frac{12}{7} e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Interpretación: Como $\lambda_1 = 2 > 0$ y $\lambda_2 = -5 < 0$, el punto de equilibrio es un **punto de silla** (inestable). A largo plazo domina el término e^{2t} y la solución crece en la dirección de $\mathbf{u}_1 = (3, 2)^T$.



Ejercicio resuelto 2: Sistema 3×3 diagonalizable

Datos: $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Paso 1: Calcular los autovalores — escribir $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \\ 0 & -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Como la primera fila tiene dos ceros, desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante 2×2 :

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (-1 - \lambda)(-1 - \lambda) - (2)(-2) = (-1 - \lambda)^2 + 4$$

Expandimos $(-1 - \lambda)^2$:

$$(-1 - \lambda)^2 = 1 + 2\lambda + \lambda^2$$

Entonces:

$$(-1 - \lambda)^2 + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

El polinomio característico completo es:

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

Raíz real: $1 - \lambda = 0 \implies \lambda_1 = 1$.

Raíces complejas: Aplicamos la fórmula cuadrática a $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm 2i}$$

Paso 2: Autovector para $\lambda_1 = 1$ (autovalor real).

Planteamos $(A - I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

De la segunda fila: $-2u_2 + 2u_3 = 0 \implies u_2 = u_3$.

De la tercera fila: $-2u_2 - 2u_3 = 0 \implies u_2 = -u_3$.

Combinando: $u_2 = u_3$ y $u_2 = -u_3$, lo que implica $u_2 = u_3 = 0$, y u_1 es libre.

Tomando $u_1 = 1$:

$$\boxed{\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Paso 3: Autovector complejo para $\lambda_2 = -1 + 2i$.

Planteamos $(A - (-1 + 2i)I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} A - (-1 + 2i)I &= \begin{pmatrix} 1 - (-1 + 2i) & 0 & 0 \\ 0 & -1 - (-1 + 2i) & 2 \\ 0 & -2 & -1 - (-1 + 2i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 2 \\ 0 & -2 & -2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De la primera fila: $(2 - 2i)u_1 = 0 \implies u_1 = 0$.

De la segunda fila: $-2i \cdot u_2 + 2u_3 = 0 \implies u_3 = i \cdot u_2$.

Tomamos $u_2 = 1, u_3 = i$:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Verificación con la tercera fila: $-2(1) + (-2i)(i) = -2 + (-2i^2) = -2 + 2 = 0 \checkmark$

Paso 4: Separar el autovector complejo en partes real e imaginaria.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v} \text{ (parte real)}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w} \text{ (parte imaginaria)}}$$

Paso 5: Construir las dos soluciones reales a partir del par complejo.

Con $\alpha = -1$, $\beta = 2$, las dos soluciones reales linealmente independientes son:

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{v} \cos(\beta t) - \mathbf{w} \sin(\beta t)] = e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t \right] = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{v} \sin(\beta t) + \mathbf{w} \cos(\beta t)] = e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t \right] = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

Paso 6: Escribir la solución general.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

Paso 7: Aplicar la condición inicial $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 1)^T$.

En $t = 0$: $e^0 = 1$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

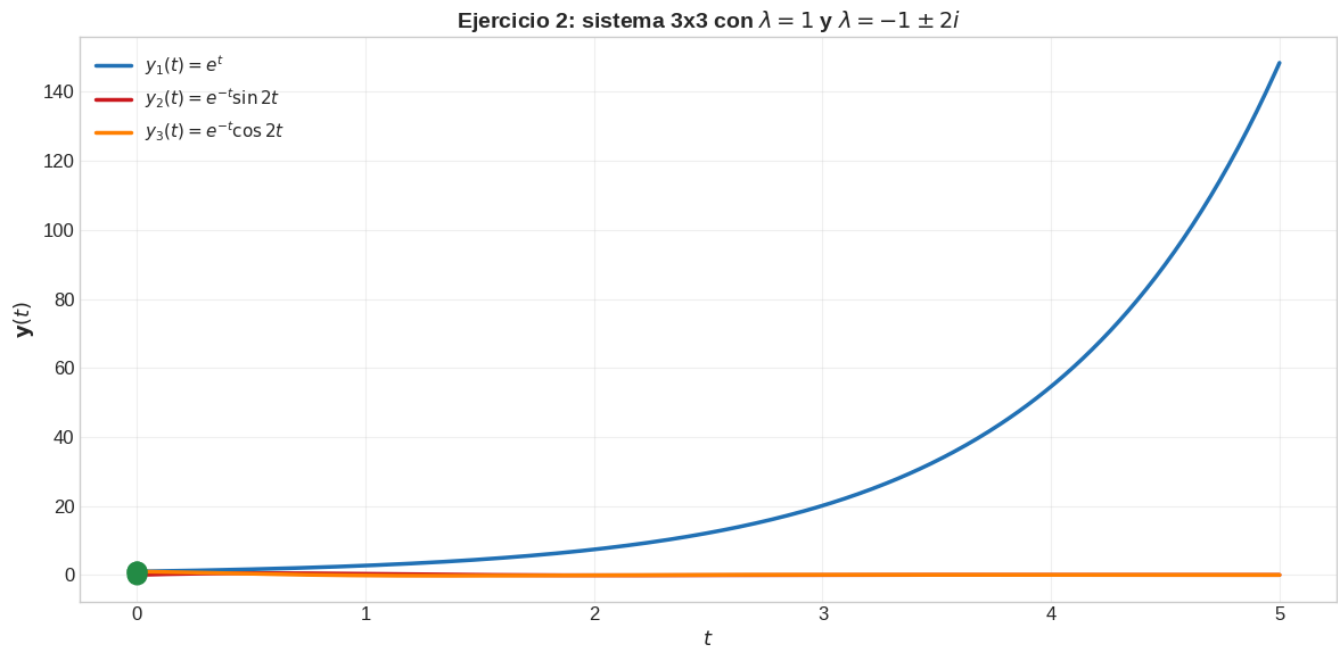
Esto da directamente:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1$$

Solución final:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \sin 2t \\ e^{-t} \cos 2t \end{pmatrix}$$

Interpretación: La primera componente crece exponencialmente ($\lambda_1 = 1 > 0$), mientras que las componentes 2 y 3 oscilan con amplitud decreciente ($\alpha = -1 < 0$). El equilibrio es **inestable** porque existe al menos un autovalor con parte real positiva.



Ejercicio resuelto 3: Sistema 2×2 no diagonalizable

Datos: $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Paso 1: Calcular los autovalores.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(3 - \lambda) - (1)(0) = (3 - \lambda)^2 = 0$$

$$\boxed{\lambda = 3 \text{ (doble)}}$$

Paso 2: Verificar si es diagonalizable o no.

Calculamos $A - 3I$:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $A - 3I \neq 0$ (la matriz no es la matriz cero), **no es diagonalizable** (si fuera diagonalizable con λ doble, necesitaríamos $A - \lambda I = 0$, es decir $A = \lambda I$).

El rango de $(A - 3I)$ es 1, así que el espacio propio tiene dimensión $2 - 1 = 1$ (solo un autovector linealmente independiente). Confirmado: **tipo 3 (nodo impropio)**.

Paso 3: Encontrar el autovector $\mathbf{u}$.

Resolvemos $(A - 3I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila: $u_2 = 0$. La variable u_1 es libre.

Tomando $u_1 = 1$:

$$\boxed{\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Paso 4: Encontrar el vector generalizado $\mathbf{w}$.

Resolvemos $(A - 3I)\mathbf{w} = \mathbf{u}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila: $w_2 = 1$.

De la segunda fila: $0 = 0$ (se cumple automáticamente).

La variable w_1 es libre. Tomamos $w_1 = 0$ (la elección más simple):

$$\boxed{\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Paso 5: Escribir las dos soluciones linealmente independientes.

Para un autovalor doble no diagonalizable, las dos soluciones son:

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{\lambda t} (t\mathbf{u} + \mathbf{w}) = e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 6: Escribir la solución general.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Paso 7: Aplicar la condición inicial $\mathbf{y}(0) = (1, 2)^T$.

En $t = 0$:

$$e^0 \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \cdot 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.

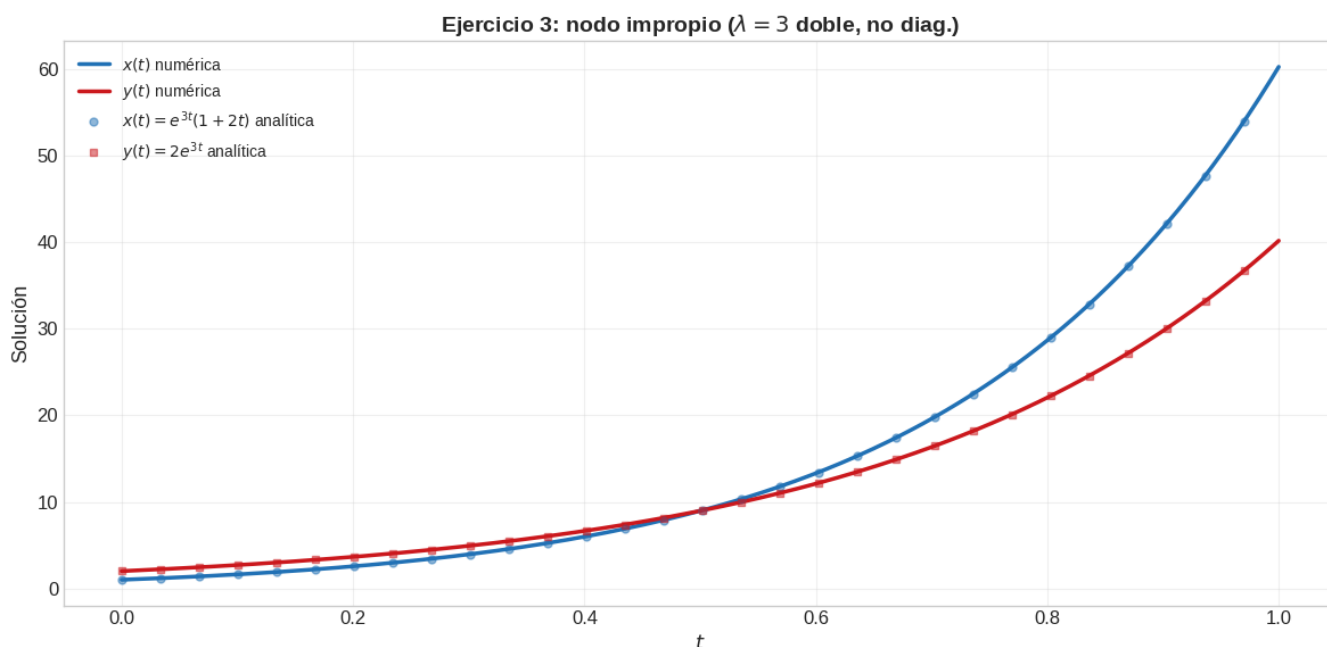
Solución final:

$$\mathbf{y}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comprobando componente a componente: $x(t) = e^{3t}(1 + 2t)$, $y(t) = 2e^{3t}$.

Verificación: $x' = 3e^{3t}(1 + 2t) + 2e^{3t} = e^{3t}(3 + 6t + 2) = e^{3t}(5 + 6t)$. Por otro lado, $3x + y = 3e^{3t}(1 + 2t) + 2e^{3t} = e^{3t}(3 + 6t + 2) = e^{3t}(5 + 6t) \checkmark$

Interpretación: Como $\lambda = 3 > 0$, el equilibrio es un **nodo impropio inestable**. Todas las trayectorias se alejan del origen tangentes a la dirección del autovector $\mathbf{u} = (1, 0)^T$.



Ejercicio resuelto 4: Sistema no homogéneo (variación de parámetros)

Datos: $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Paso 1: Resolver el sistema homogéneo — calcular autovalores de A .

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)(-3 - \lambda) - (1)(-2) = 3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Factorizamos: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0.$

$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$
--

Paso 2: Calcular los autovectores.

Para $\lambda_1 = -1$: $(A + I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila: $u_1 + u_2 = 0 \implies u_1 = -u_2$. Tomando $u_2 = -1$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -2$: $(A + 2I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftarrow F_2 + F_1: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila: $2u_1 + u_2 = 0 \implies u_2 = -2u_1$. Tomando $u_1 = 1$:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Construir la matriz fundamental $Y(t)$.

$$Y(t) = (e^{-t}\mathbf{u}_1 \quad e^{-2t}\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Paso 4: Calcular $Y(t)^{-1}$ usando la fórmula para matrices 2×2 .

Recordemos: si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Primero, el determinante de $Y(t)$:

$$\det Y(t) = (e^{-t})(-2e^{-2t}) - (e^{-2t})(-e^{-t}) = -2e^{-3t} + e^{-3t} = -e^{-3t}$$

Aplicamos la fórmula:

$$Y(t)^{-1} = \frac{1}{-e^{-3t}} \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -(-e^{-t}) & e^{-t} \end{pmatrix} = -e^{3t} \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos $-e^{3t}$ por cada entrada:

$$Y(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \cdot e^{-2t} & e^{3t} \cdot e^{-2t} \\ -e^{3t} \cdot e^{-t} & -e^{3t} \cdot e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$$

Paso 5: Calcular $Y(t)^{-1}\mathbf{f}(t)$.

$$Y(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Primera componente: $2e^t \cdot 0 + e^t \cdot e^{-t} = 0 + e^0 = 1$.

Segunda componente: $-e^{2t} \cdot 0 + (-e^{2t}) \cdot e^{-t} = 0 - e^t = -e^t$.

$$Y(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Paso 6: Integrar cada componente de 0 a t .

$$\int_0^t Y(s)^{-1}\mathbf{f}(s) ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ -e^s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \int_0^t 1 ds \\ \int_0^t -e^s ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -(e^t - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -e^t + 1 \end{pmatrix}$$

Paso 7: Calcular la solución particular $\mathbf{y}_p(t) = Y(t) \cdot \int_0^t Y(s)^{-1}\mathbf{f}(s) ds$.

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -e^t + 1 \end{pmatrix}$$

Primera componente:

$$e^{-t} \cdot t + e^{-2t} \cdot (-e^t + 1) = te^{-t} - e^{-2t} \cdot e^t + e^{-2t} \cdot 1 = te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$$

Segunda componente:

$$(-e^{-t}) \cdot t + (-2e^{-2t}) \cdot (-e^t + 1) = -te^{-t} + 2e^{-2t} \cdot e^t - 2e^{-2t} = -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Paso 8: Verificar la condición inicial.

Como usamos la integral definida de 0 a t , la condición inicial ya está incorporada. Verifiquemos:

$$\mathbf{y}_p(0) = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 + 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}_0 \quad \checkmark$$

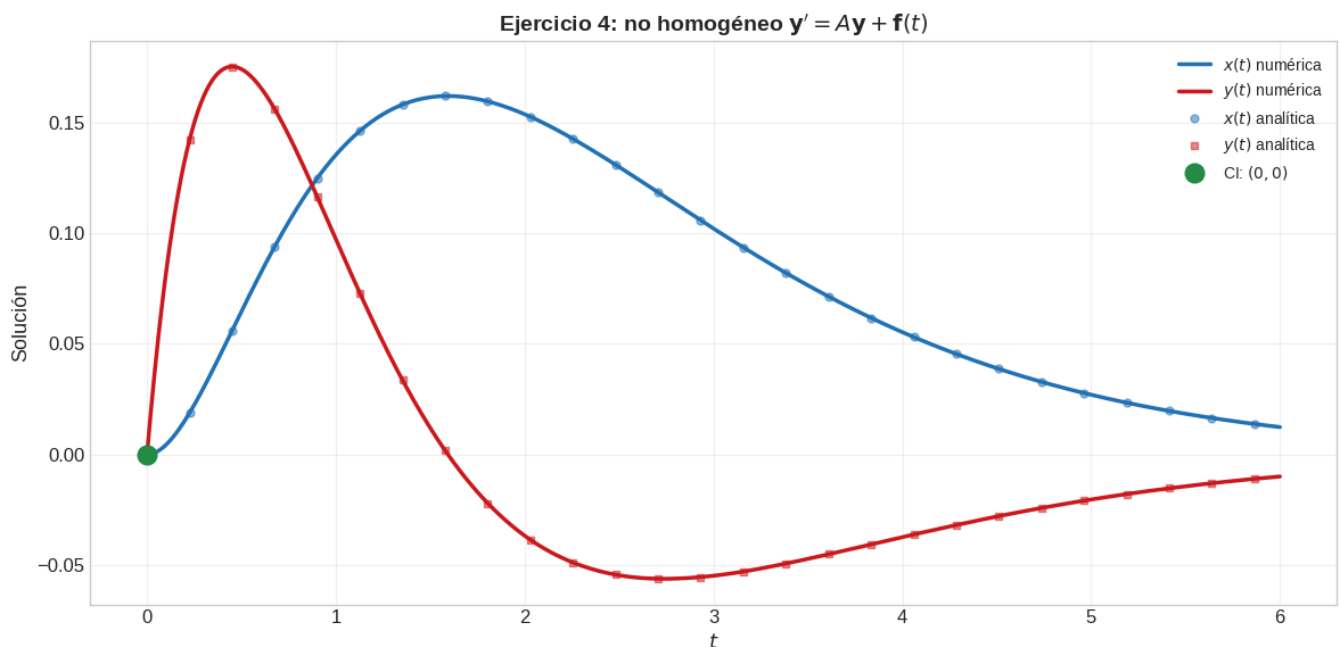
No necesitamos sumar la solución homogénea con constantes adicionales porque la CI ya se satisface.

Solución final:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Verificación rápida de $x(0)$ y $y(0)$: ambos dan 0 $\checkmark$

Interpretación: Los autovalores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ son ambos negativos, por lo que el sistema homogéneo tiene un nodo estable. La solución del sistema no homogéneo tiende a **0** cuando $t \rightarrow \infty$ porque tanto la homogénea como la particular decaen (el forzamiento e^{-t} también decae).



9. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

#	Tipo	Método	Ecuación clave	Dificultad
1	2×2 autovalores reales distintos	Diagonalización	$\mathbf{y} = \sum c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i$	Media
2	2×2 autovalor repetido diagonalizable	Nodo estrella	$\mathbf{y} = e^{\lambda t} (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2)$	Baja
3	2×2 autovalor repetido NO diagonalizable	Jordan / cadena	$\mathbf{y}_2 = e^{\lambda t} (t\mathbf{u} + \mathbf{w})$	Alta
4	2×2 autovalores complejos conjugados	Euler	$e^{\alpha t} [\mathbf{v} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t]$	Media
5	3×3 diagonalizable (mixto real/complejo)	Diagonalización	Combinar tipos 1 y 4	Alta
6	No homogéneo: variación de parámetros	$Y(t) \int Y^{-1} \mathbf{f} dt$	Inversión de $Y(t)$	Alta
7	No homogéneo: coeficientes indeterminados	Propuesta + sustitución	$(\mu I - A)\mathbf{c} = \mathbf{b}$	Media
8	No homogéneo: Laplace	$(sI - A)^{-1}$	Fracciones parciales	Alta
9	Clasificar punto de equilibrio	Traza + determinante	$\text{tr}(A), \det(A), \Delta$	Baja
10	Reducción de orden n a sistema	Variables de estado	Matriz compañera	Baja

9.1 Tipo 1: 2×2 con autovalores reales distintos

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{u}_2$$

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Escribir la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$.

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

Expandir: $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$, es decir $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$.

Resolver con la fórmula cuadrática: $\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}$.

Este tipo corresponde al caso $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) > 0$ (discriminante positivo, dos raíces reales distintas).

Paso 2: Para cada autovalor λ_i , plantear $(A - \lambda_i I)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ y reducir.

Ejemplo concreto: si $\lambda_1 = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila: $2u_1 = 3u_2$. Elegir u_2 para evitar fracciones: $u_2 = 2 \implies u_1 = 3$, dando $\mathbf{u}_1 = (3, 2)^T$.

Paso 3: Escribir la solución general con las dos soluciones linealmente independientes $e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1$ y $e^{\lambda_2 t} \mathbf{u}_2$.

Paso 4: Aplicar CI. En $t = 0$ las exponenciales valen 1, obteniendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{y}_0$$

Resolver por sustitución, Cramer o eliminación gaussiana.

Clasificación del equilibrio:

- $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \rightarrow$ **nodo estable** (todas las trayectorias convergen al origen)
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \rightarrow$ **nodo inestable** (todas divergen)
- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \rightarrow$ **punto de silla** (inestable; las trayectorias se acercan por una dirección y se alejan por otra)

Errores frecuentes:

- Olvidar el signo al calcular $-bc$ en el determinante
- No simplificar el autovector (cualquier múltiplo escalar no nulo es válido)
- Al aplicar CI, resolver mal el sistema 2×2

9.2 Tipo 2: 2×2 con autovalor repetido diagonalizable (nodo estrella)

Ocurre cuando $A = \lambda I$ (caso raro pero posible en examen).

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2) = e^{\lambda t} \mathbf{y}_0}$$

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Calcular $\det(A - \lambda I) = 0$.

Se obtiene $(\lambda_0)^2 = 0$, es decir un autovalor doble $\lambda = \lambda_0$.

Paso 2: Verificar que es diagonalizable. Calcular $A - \lambda_0 I$:

- Si $A - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (la matriz cero), entonces **sí es diagonalizable** (tipo 2, nodo estrella).
- Si $A - \lambda_0 I \neq 0$, es **no diagonalizable** (tipo 3, nodo impropio). Ir a la sección 9.3.

Paso 3: Cuando $A = \lambda_0 I$, **cualquier vector no nulo es autovector**. Podemos usar la base canónica:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Solución general:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Paso 5: Aplicar CI. En $t = 0$: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{y}_0$, así que la solución es simplemente:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda_0 t} \mathbf{y}_0$$

Ejemplo concreto: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda I) = (-3 - \lambda)^2 = 0 \implies \lambda = -3$ (doble).

$A - (-3)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Es tipo 2.

$$\mathbf{y}(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Truco: La exponencial matricial es simplemente $e^{At} = e^{\lambda_0 t} I$, así que $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda_0 t} I \cdot \mathbf{y}_0 = e^{\lambda_0 t} \mathbf{y}_0$.

Geometría: Todas las trayectorias son **rectas** que pasan por el origen (de ahí el nombre "nodo estrella"). Si $\lambda_0 < 0$, convergen al origen; si $\lambda_0 > 0$, divergen.

9.3 Tipo 3: 2x2 con autovalor repetido NO diagonalizable

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_2(t) = e^{\lambda t} (t\mathbf{u} + \mathbf{w}) \end{cases}$$

donde $\mathbf{u}$ es el autovector y $\mathbf{w}$ es el vector generalizado que satisface $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{u}$.

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Calcular el autovalor doble λ .

$\det(A - \lambda I) = 0$ da λ con multiplicidad algebraica 2.

Paso 2: Verificar que NO es diagonalizable.

Calcular $A - \lambda I$. Si el resultado es **distinto de la matriz cero** (tiene rango 1), entonces es tipo 3.

El espacio propio tiene dimensión $2 - \text{rango}(A - \lambda I) = 2 - 1 = 1$: solo un autovector independiente.

Paso 3: Encontrar el autovector $\mathbf{u}$.

Resolver $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Como el rango es 1, una fila es proporcional a la otra. De cualquier fila no nula se obtiene la relación entre u_1 y u_2 .

Ejemplo: Si $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de la primera fila: $u_2 = 0$, u_1 libre $\implies \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Paso 4: Encontrar el vector generalizado $\mathbf{w}$.

Resolver $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{u}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Como el rango es 1, una ecuación es redundante. Hay una variable libre; elegir el valor más simple (generalmente 0).

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De la primera fila: $w_2 = 1$. w_1 es libre, tomamos $w_1 = 0$:
 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Paso 5: Escribir las dos soluciones linealmente independientes:

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y}_2(t) = e^{\lambda t} (t\mathbf{u} + \mathbf{w})$$

Paso 6: Solución general:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{y}_1(t) + c_2 \mathbf{y}_2(t) = e^{\lambda t} [(c_1 + c_2 t) \mathbf{u} + c_2 \mathbf{w}]$$

Paso 7: Aplicar CI. En $t = 0$: $c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{w} = \mathbf{y}_0$. Resolver el sistema 2×2 para c_1, c_2 .

Error frecuente: Confundir con tipo 2. **Siempre verificar** si $(A - \lambda I) = 0$ (tipo 2, nodo estrella) o $(A - \lambda I) \neq 0$ (tipo 3, nodo impropio).

Otro error: Intentar buscar dos autovectores independientes cuando solo hay uno. Si el espacio propio tiene dimensión 1, se necesita el vector generalizado $\mathbf{w}$.

Geometría: Nodo impropio. Todas las trayectorias son tangentes a la dirección del autovector $\mathbf{u}$ en el origen.

9.4 Tipo 4: 2×2 con autovalores complejos conjugados

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{v} \cos(\beta t) - \mathbf{w} \sin(\beta t)] \\ \mathbf{y}_2(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{v} \sin(\beta t) + \mathbf{w} \cos(\beta t)] \end{cases}$$

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Calcular el polinomio característico y obtener $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

Si el discriminante $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$, los autovalores son complejos:

$$\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

donde $\alpha = \frac{\text{tr}(A)}{2}$ y $\beta = \frac{\sqrt{4 \det(A) - \text{tr}(A)^2}}{2}$.

Paso 2: Tomar UN solo autovalor, digamos $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, y resolver $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Las entradas de $A - \lambda_1 I$ serán números complejos. Resolver el sistema como de costumbre, pero con aritmética compleja.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Autovalores: $\lambda = -1 \pm 2i$.

Para $\lambda_1 = -1 + 2i$: $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix}$.

De la segunda fila: $-u_1 - 2i \cdot u_2 = 0 \implies u_1 = -2i \cdot u_2$.

Tomando $u_2 = 1$: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Paso 3: Separar $\mathbf{u}$ en partes real e imaginaria: $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

Paso 4: Escribir las dos soluciones reales usando la fórmula boxed de arriba.

Con $\alpha = -1, \beta = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right] = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_2(t) &= e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t \right] = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Paso 5: Solución general $\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{y}_1(t) + c_2 \mathbf{y}_2(t)$.

Paso 6: Aplicar CI. En $t = 0$: evaluar $\mathbf{y}_1(0)$ y $\mathbf{y}_2(0)$, y resolver $c_1 \mathbf{y}_1(0) + c_2 \mathbf{y}_2(0) = \mathbf{y}_0$.

Clasificación del equilibrio:

- $\alpha < 0$: **espiral estable** (trayectorias espiralan hacia el origen)
- $\alpha > 0$: **espiral inestable** (espiralan alejándose)
- $\alpha = 0$: **centro** (órbitas cerradas, periódicas, **no** asintóticamente estable)

Error frecuente: Olvidar que $\mathbf{w}$ lleva signo negativo en $\mathbf{y}_1$ (el $-\mathbf{w} \sin \beta t$) y positivo en $\mathbf{y}_2$ (el $+\mathbf{w} \cos \beta t$).

Truco de verificación: La solución real no debe contener i en ningún lugar. Si aparece i , hay un error en la separación real/imaginaria.

9.5 Tipo 5: 3×3 diagonalizable (mezcla real/complejo)

Se combinan los tipos anteriores. Típicamente: un autovalor real + par complejo conjugado.

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Calcular $\det(A - \lambda I) = 0$ (**polinomio cúbico**).

Para una matriz 3×3 , el polinomio característico es de grado 3:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \text{tr}(A)\lambda^2 - \dots + \det(A) = 0$$

En la práctica, si la matriz tiene estructura (ceros, bloques), desarrollar el determinante por la fila/columna con más ceros.

Ejemplo: Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, la primera fila tiene dos ceros:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)[(1 + \lambda)^2 + 4]$$

Paso 2: Encontrar la raíz real λ_1 .

Técnicas: inspección directa, teorema de raíces racionales, o Ruffini. En el ejemplo: $\lambda_1 = 1$.

Paso 3: Factorizar y obtener el par complejo.

Dividir el polinomio cúbico por $(\lambda - \lambda_1)$ para obtener un factor cuadrático. Aplicar fórmula cuadrática al cuadrático.

En el ejemplo: $(1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$. Para $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$: $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$.

Paso 4: Autovector real $\mathbf{u}_1$ para λ_1 .

Resolver $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ reduciendo a forma escalonada. Para la matriz del ejemplo:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \implies u_2 = u_3 = 0, u_1 \text{ libre} \implies \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 5: Autovector complejo para $\alpha + i\beta$, separar en $\mathbf{v} + i\mathbf{w}$.

Resolver $(A - (\alpha + i\beta)I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ con aritmética compleja. El autovector tendrá componentes complejas.

Separar: $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$ donde $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

En el ejemplo: $\mathbf{u} = (0, 1, i)^T$, dando $\mathbf{v} = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1)^T$.

Paso 6: Escribir las tres soluciones reales linealmente independientes.

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{v} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t]$$

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{v} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t]$$

Paso 7: Solución general y CI. $\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2 + c_3 \mathbf{y}_3$. Evaluar en $t = 0$ y resolver sistema 3×3 .

Truco: En 3×3 , si la traza $\text{tr}(A) = \lambda_1 + 2\alpha$ y el determinante dan pistas sobre los autovalores. También: la suma de autovalores = traza, el producto = determinante.

Estabilidad del equilibrio 3D:

- Estable si **todos** los autovalores tienen parte real negativa ($\lambda_1 < 0$ y $\alpha < 0$)
- Inestable si **algún** autovalor tiene parte real positiva

9.6 Tipo 6: No homogéneo por variación de parámetros

$$\mathbf{y}_p(t) = Y(t) \int_{t_0}^t Y(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds$$

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Resolver el sistema homogéneo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Encontrar autovalores y autovectores de A (usando tipos 1-5 según corresponda). Construir la solución general homogénea.

Paso 2: Construir la matriz fundamental $Y(t)$.

Las columnas de $Y(t)$ son las soluciones linealmente independientes del homogéneo:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) \\ | & | \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Si $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u}_1 = (1, -1)^T$, $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{u}_2 = (1, -2)^T$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Calcular $Y(t)^{-1}$ usando la fórmula para matrices 2×2 .

Para $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Paso 3a: Calcular el determinante:

$$\det Y(t) = (e^{-t})(-2e^{-2t}) - (e^{-2t})(-e^{-t}) = -2e^{-3t} + e^{-3t} = -e^{-3t}$$

Paso 3b: Aplicar la fórmula:

$$Y(t)^{-1} = \frac{1}{-e^{-3t}} \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Paso 3c: Simplificar multiplicando $-e^{3t}$ por cada entrada, combinando exponenciales:

$$Y(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$$

Paso 4: Calcular el producto $Y(s)^{-1}\mathbf{f}(s)$.

Multiplicar la matriz $Y(s)^{-1}$ por el vector de forzamiento $\mathbf{f}(s)$. Simplificar cada componente (combinar exponenciales, etc.).

Paso 5: Integrar cada componente de t_0 a t :

$$\int_{t_0}^t Y(s)^{-1}\mathbf{f}(s) ds = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t [\text{componente 1}] ds \\ \int_{t_0}^t [\text{componente 2}] ds \end{pmatrix}$$

Cada integral es una integral escalar estándar (exponenciales, polinomios, trigonométricas...).

Paso 6: Multiplicar por $Y(t)$ para obtener la solución particular:

$$\mathbf{y}_p(t) = Y(t) \cdot \begin{pmatrix} \text{resultado integral 1} \\ \text{resultado integral 2} \end{pmatrix}$$

Expandir el producto matricial componente a componente y simplificar.

Paso 7: Solución completa = homogénea + particular:

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}_1(t) + c_2\mathbf{y}_2(t) + \mathbf{y}_p(t)$$

Si se usa la integral definida desde t_0 (el punto de la CI), las constantes c_1, c_2 se determinan directamente de la CI. Si se usa integral indefinida, aplicar CI al final.

Cuándo usar: Siempre funciona. Es el método más general. Preferirlo cuando $\mathbf{f}(t)$ no es polinomio, exponencial o sinusoidal (ej: $\sec t, \tan t, \ln t, 1/t$).

Errores frecuentes:

- Invertir mal la matriz (confundir posiciones en la fórmula 2×2)
- Olvidar simplificar las exponenciales al multiplicar $e^{3t} \cdot e^{-2t} = e^t$
- No integrar correctamente (especialmente productos tipo te^{at} que requieren integración por partes)

9.7 Tipo 7: No homogéneo por coeficientes indeterminados

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Identificar la forma de $\mathbf{f}(t)$ y proponer la solución particular $\mathbf{y}_p$ según la tabla:

$\mathbf{f}(t)$ tiene la forma...	Proponer $\mathbf{y}_p(t) =$
$\mathbf{a}$ (constante)	$\mathbf{c}$ (vector constante)
$\mathbf{a}e^{\mu t}$	$\mathbf{c}e^{\mu t}$
$\mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t$	$\mathbf{c} \cos \omega t + \mathbf{d} \sin \omega t$
$\mathbf{a}t^n + \dots$ (polinomio grado n)	$\mathbf{c}_n t^n + \mathbf{c}_{n-1} t^{n-1} + \dots + \mathbf{c}_0$

Paso 2: Verificar resonancia. Si μ (de la exponencial propuesta) coincide con un autovalor de A , multiplicar toda la propuesta por t . Si es autovalor doble, multiplicar por t^2 .

Ejemplo: Si $\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}e^{-t}$ y $\lambda_1 = -1$ es autovalor de A , proponer $\mathbf{y}_p = t\mathbf{c}e^{-t}$ en vez de $\mathbf{c}e^{-t}$.

Paso 3: Calcular $\mathbf{y}'_p(t)$.

Derivar la propuesta. Por ejemplo, si $\mathbf{y}_p = \mathbf{c}e^{\mu t}$:

$$\mathbf{y}'_p = \mu \mathbf{c}e^{\mu t}$$

Si $\mathbf{y}_p = \mathbf{c} \cos \omega t + \mathbf{d} \sin \omega t$:

$$\mathbf{y}'_p = -\omega \mathbf{c} \sin \omega t + \omega \mathbf{d} \cos \omega t$$

Paso 4: Sustituir en la ecuación $\mathbf{y}'_p = A\mathbf{y}_p + \mathbf{f}(t)$.

Reemplazar y agrupar los términos según las funciones ($e^{\mu t}$, $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, t^k , etc.).

Paso 5: Igualar coeficientes.

Como las funciones son linealmente independientes, los coeficientes de cada función deben coincidir en ambos lados. Esto genera un sistema algebraico para los vectores incógnita ($\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, etc.).

Ejemplo con exponencial: De $\mu \mathbf{c}e^{\mu t} = A\mathbf{c}e^{\mu t} + \mathbf{a}e^{\mu t}$, simplificando $e^{\mu t}$:

$$\mu \mathbf{c} = A\mathbf{c} + \mathbf{a} \implies (\mu I - A)\mathbf{c} = \mathbf{a} \implies \mathbf{c} = (\mu I - A)^{-1} \mathbf{a}$$

(Esto funciona siempre que μ no sea autovalor de A ; de ahí la regla de resonancia del paso 2.)

Ejemplo con trigonométrica: Igualar coeficientes de $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ por separado, obteniendo un sistema $2n \times 2n$ (donde n es el tamaño de la matriz).

Paso 6: Solución completa = homogénea + particular. Aplicar CI.

Cuándo usar: Cuando $\mathbf{f}(t)$ es combinación de polinomios, exponenciales y/o funciones trigonométricas.

Ventaja sobre variación de parámetros: No requiere calcular $Y(t)^{-1}$ ni integrar.

Desventaja: No funciona para $\mathbf{f}(t)$ arbitrarios (ej: $\sec t, \ln t$).

Error frecuente: Olvidar la regla de resonancia. Si μ es autovalor y no se multiplica por t , el sistema para $\mathbf{c}$ será singular (sin solución).

9.8 Tipo 8: No homogéneo por transformada de Laplace

$$\boxed{\mathbf{Y}(s) = (sI - A)^{-1}[\mathbf{y}_0 + \mathbf{F}(s)]}$$

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Aplicar $\mathcal{L}$ a ambos lados de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{y}'\} = A\mathcal{L}\{\mathbf{y}\} + \mathcal{L}\{\mathbf{f}\}$$

Usando la propiedad $\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$:

$$s\mathbf{Y}(s) - \mathbf{y}_0 = A\mathbf{Y}(s) + \mathbf{F}(s)$$

Paso 2: Despejar $\mathbf{Y}(s)$.

$$(sI - A)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{F}(s) \implies \mathbf{Y}(s) = (sI - A)^{-1}[\mathbf{y}_0 + \mathbf{F}(s)]$$

Paso 3: Calcular $(sI - A)^{-1}$ explícitamente.

Para 2×2 : $sI - A = \begin{pmatrix} s - a & -b \\ -c & s - d \end{pmatrix}$.

$$\det(sI - A) = (s - a)(s - d) - (-b)(-c) = s^2 - (a + d)s + (ad - bc)$$

Notar: $\det(sI - A)$ es el **polinomio característico** evaluado en s (mismo que $\det(A - \lambda I)$ con $\lambda = s$).

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{pmatrix} s - d & b \\ c & s - a \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$:

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s + 3 \end{pmatrix}, \quad \det = s(s + 3) + 2 = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \begin{pmatrix} s + 3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}$$

Paso 4: Multiplicar por $[\mathbf{y}_0 + \mathbf{F}(s)]$.

Cada componente de $\mathbf{Y}(s)$ será una fracción racional en s (cociente de polinomios).

Ejemplo: Con $\mathbf{y}_0 = (0, 0)^T$ y $\mathbf{f}(t) = (0, e^{-t})^T$, $\mathbf{F}(s) = (0, \frac{1}{s+1})^T$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{s}{s+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{s}{(s+1)^2(s+2)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Paso 5: Descomponer en fracciones parciales cada componente.

Para $\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$: proponer $\frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}$.

Multiplicar por el denominador, sustituir valores convenientes ($s = -1$, $s = -2$) y resolver.

Paso 6: Aplicar $\mathcal{L}^{-1}$ a cada término usando la tabla:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} = e^{-at}, \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+a)^2} \right\} = te^{-at}, \quad \text{etc.}$$

Cuándo usar: Cuando hay condiciones iniciales incorporadas directamente (el método ya las incluye desde el principio). Especialmente útil con funciones discontinuas (escalón de Heaviside, impulso delta de Dirac).

Ventaja: Las CI se incorporan automáticamente, no hay que sumar homogénea + particular por separado.

Desventaja: La descomposición en fracciones parciales puede ser laboriosa para sistemas grandes.

Error frecuente: Confundir $sI - A$ con $A - sI$ (el signo importa para la inversa).

9.9 Tipo 9: Clasificar punto de equilibrio sin resolver

Dado $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ con A una matriz 2×2 , clasificar el equilibrio usando solo $\tau = \text{tr}(A)$ y $\delta = \det(A)$.

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Calcular la traza y el determinante.

$$\tau = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}, \quad \delta = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Paso 2: Calcular el discriminante.

$$\Delta = \tau^2 - 4\delta$$

Recordar que Δ es el discriminante del polinomio característico $\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$, así que:

- $\Delta > 0$: dos autovalores reales distintos
- $\Delta = 0$: autovalor real doble
- $\Delta < 0$: par complejo conjugado

Paso 3: Clasificar según la tabla:

Condición	Tipo	Estabilidad
$\delta < 0$	Silla	Inestable
$\delta > 0, \Delta > 0, \tau < 0$	Nodo estable	Asintóticamente estable
$\delta > 0, \Delta > 0, \tau > 0$	Nodo inestable	Inestable
$\delta > 0, \Delta < 0, \tau < 0$	Espiral estable	Asintóticamente estable
$\delta > 0, \Delta < 0, \tau > 0$	Espiral inestable	Inestable
$\delta > 0, \tau = 0$	Centro	Estable (no asintóticamente)
$\delta > 0, \Delta = 0, \tau \neq 0$	Nodo (impropio o estrella)	Depende del signo de τ
$\delta = 0$	Caso degenerado	Recta de equilibrios

Lógica de la clasificación:

- $\delta < 0$ significa que los autovalores tienen signos opuestos (uno positivo, uno negativo) $\rightarrow$ silla.
- $\delta > 0$ y $\tau < 0$ significa ambos autovalores tienen parte real negativa $\rightarrow$ estable.
- $\delta > 0$ y $\tau > 0$ significa ambos autovalores tienen parte real positiva $\rightarrow$ inestable.
- $\Delta < 0$ significa autovalores complejos $\rightarrow$ espiral o centro.
- $\tau = 0$ con $\delta > 0$ significa parte real cero ($\alpha = 0$) $\rightarrow$ centro.

Ejercicio resuelto: clasificar $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Paso 1: Calcular τ y δ :

$$\tau = (-1) + (-1) = -2$$

$$\delta = (-1)(-1) - (4)(-1) = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$$

Paso 2: Calcular Δ :

$$\Delta = (-2)^2 - 4(5) = 4 - 20 = -16$$

Paso 3: Clasificar:

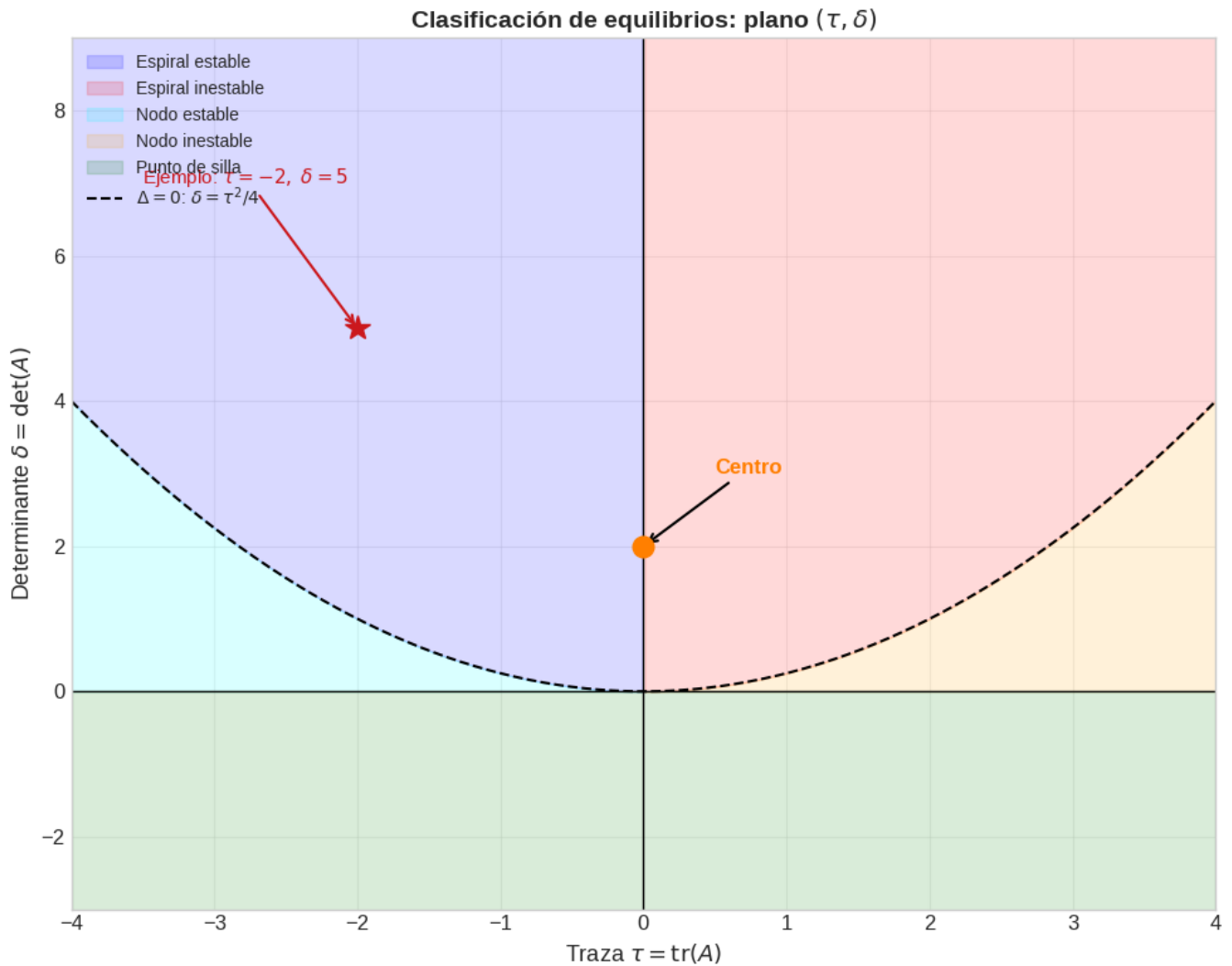
- $\delta = 5 > 0$ (no es silla, no es degenerado)

- $\Delta = -16 < 0$ (autovalores complejos conjugados)
- $\tau = -2 < 0$ (parte real negativa)

Según la tabla: $\delta > 0, \Delta < 0, \tau < 0 \implies$ **Espiral estable**

Verificación: Los autovalores son $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$. Parte real $\alpha = -1 < 0$. Confirmado: espiral estable.

Error frecuente: Calcular mal el determinante, especialmente cuando hay signos negativos en la posición (1, 2) o (2, 1). Recordar: $\det = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, donde $a_{12}a_{21}$ incluye los signos de las entradas.



9.10 Tipo 10: Reducción de EDO de orden n a sistema

Procedimiento detallado paso a paso:

Paso 1: Partir de la EDO de orden n :

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = g(t)$$

Paso 2: Definir las nuevas variables (una por cada derivada hasta orden $n - 1$):

$$y_1 = x, \quad y_2 = x', \quad y_3 = x'', \quad \dots, \quad y_n = x^{(n-1)}$$

Paso 3: Escribir las ecuaciones del sistema. Las primeras $n - 1$ ecuaciones son triviales:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad \dots, \quad y_{n-1}' = y_n$$

La última ecuación viene de despejar $x^{(n)}$ de la EDO original:

$$y_n' = x^{(n)} = -a_0y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-1}y_n + g(t)$$

Paso 4: Identificar la matriz compañera A y el vector de forzamiento:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Propiedad clave: Los autovalores de A son exactamente las raíces del polinomio característico de la EDO:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Ejercicio resuelto: reducir $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = \sin t$

Paso 1: Identificamos $n = 3$, $a_0 = 6$, $a_1 = 11$, $a_2 = 6$, $g(t) = \sin t$.

Paso 2: Definimos las variables:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x', \quad y_3 = x''$$

Paso 3: Escribimos el sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -6y_1 - 11y_2 - 6y_3 + \sin t \end{cases}$$

La última ecuación viene de: $x''' = -6x - 11x' - 6x'' + \sin t = -6y_1 - 11y_2 - 6y_3 + \sin t$.

Paso 4: La forma matricial es $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Paso 5: Verificamos los autovalores. El polinomio característico de la EDO es:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

Probamos $\lambda = -1$: $(-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = 0 \checkmark$

Dividimos por $(\lambda + 1)$ usando Ruffini:

	1	6	11	6
−1	−1		−5	−6
	1	5	6	0

Resultado: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$.

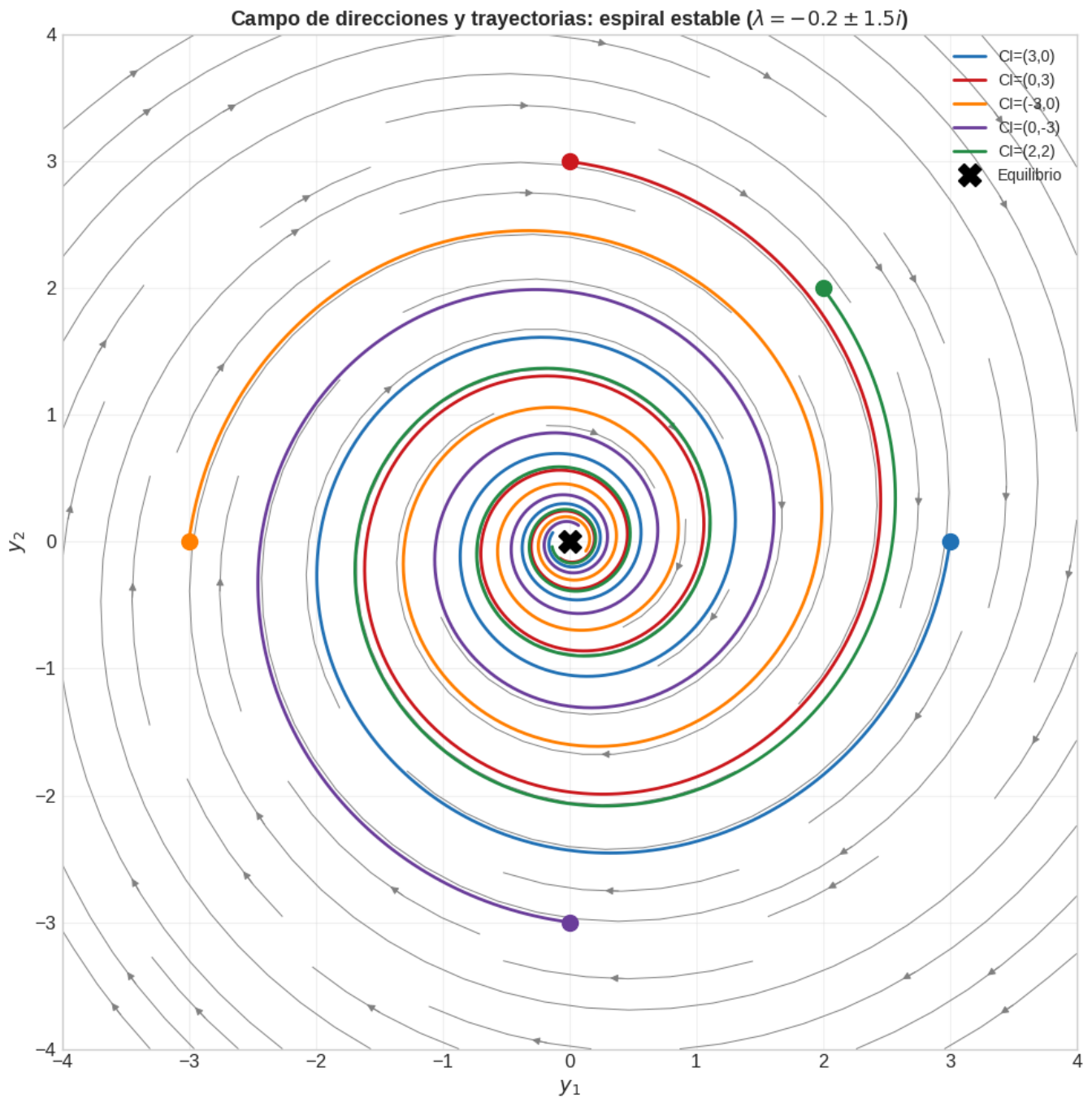
$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$

Todos negativos: el sistema homogéneo es **asintóticamente estable**. La solución particular (forzada por $\sin t$) será una oscilación sostenida.

Condiciones iniciales: Si la EDO original tiene $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$, $x''(0) = a_0$, entonces para el sistema:

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Error frecuente: Poner los coeficientes a_i con el signo incorrecto en la última fila de A . Recordar que van con signo **negativo** $(-a_0, -a_1, \dots)$.



10. Resumen y tabla de fórmulas clave

Fórmula	Uso
$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{u}_2$	Homogéneo con autovalores reales distintos
$e^{\alpha t} [\mathbf{v} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t]$	Solución real a partir de autovalor

Fórmula	Uso
	complejo $\alpha + i\beta$
$\mathbf{y}_2 = e^{\lambda t}(\mathbf{t}\mathbf{u} + \mathbf{w})$	Autovalor repetido no diagonalizable (2a solución)
$\mathbf{y}_p = Y(t) \int Y^{-1} \mathbf{f} dt$	Variación de parámetros
$(\mu I - A)\mathbf{c} = \mathbf{b}$	Coeficientes indeterminados (μ no autovalor)
$\mathbf{Y}(s) = (sI - A)^{-1}[\mathbf{y}_0 + \mathbf{F}(s)]$	Método de Laplace
$\det(A) < 0$ $\implies$ silla	Clasificación rápida
$\text{tr}(A) < 0,$ $\det(A) > 0$ $\implies$ estable	Clasificación rápida
$\Delta = \tau^2$ $-4\delta < 0$ $\implies$ espiral/centro	Discriminante del plano (τ, δ)
$W(t)$ $= W(t_0)$ $)e^{\text{tr}(A)(t-t_0)}$	Fórmula de Abel-Liouville

Regla mnemotécnica para la estabilidad: "Traza negativa = amortiguamiento = estable".