

03_series_fourier

June 19, 2026

1 Lecciones 3-4: Series de Fourier

Ampliación de Matemáticas - GIERM

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Calcular los coeficientes de Fourier (trigonométricos y complejos) de funciones periódicas
- Distinguir cuándo usar series completas, de senos o de cosenos (extensiones pares/impares)
- Reconocer patrones de simetría para predecir qué coeficientes se anulan **antes** de calcular
- Representar gráficamente aproximaciones parciales y espectros de amplitud
- Aplicar la identidad de Parseval para sumar series numéricas
- Dominar los 12 tipos de ejercicios del catálogo final

Configuración lista.

1.2 1. Serie trigonométrica de Fourier

Sea $f(t)$ una función periódica de periodo T y frecuencia angular $\omega = 2\pi/T$. Su **serie de Fourier trigonométrica** es:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

donde los **coeficientes de Fourier** son:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n \geq 1$$

Interpretación física: - $a_0/2$ es el **valor medio** de la función - a_n mide la “cantidad de $\cos(n\omega t)$ ” presente en f - b_n mide la “cantidad de $\sin(n\omega t)$ ” presente en f - A mayor n , mayor frecuencia $\rightarrow$ captura detalles más finos

Nota: La integral se puede tomar sobre cualquier intervalo de longitud T , por ejemplo $[0, T]$ o $[-T/2, T/2]$.

1.3 2. Serie de Fourier en forma compleja

Usando la fórmula de Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$, la serie se escribe de forma compacta:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

con coeficientes complejos:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

1.3.1 Relaciones entre coeficientes

Relación	Fórmula
c_0	$c_0 = \frac{a_0}{2}$
$c_n \ (n > 0)$	$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$
$c_{-n} \ (n > 0)$	$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$
a_n desde c_n	$a_n = c_n + c_{-n} = 2 \operatorname{Re}(c_n)$
b_n desde c_n	$b_n = j(c_n - c_{-n}) = -2 \operatorname{Im}(c_n)$
Amplitud	$ c_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Ventaja de la forma compleja: una sola integral en lugar de tres. Además, el **espectro de amplitud** $|c_n|$ vs n es la herramienta clave para analizar señales.

1.4 3. Series de medio rango (extensiones par e impar)

Cuando f está definida solo en $[0, L]$, podemos extenderla a $[-L, L]$ de dos formas:

1.4.1 3.1 Serie de senos (extensión impar)

Se extiende como función **impar**: $f(-t) = -f(t)$. Resultado:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

1.4.2 3.2 Serie de cosenos (extensión par)

Se extiende como función **par**: $f(-t) = f(t)$. Resultado:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Truco para el examen: si el enunciado dice “desarrolle en serie de senos/cosenos en $[0, L]$ ”, no hay que extender explícitamente la función; basta con calcular los coeficientes con la integral en $[0, L]$. La extensión determina qué tipo de serie usar.

1.5 4. Tabla de reconocimiento de patrones (FUNDAMENTAL)

Esta es la herramienta más poderosa para series de Fourier. **Antes de calcular nada**, examina las propiedades de f y deduce qué coeficientes se anulan:

Propiedad de f	Efecto en coeficientes	Qué esperar
f par ($f(-t) = f(t)$)	$b_n = 0$ para todo n	Solo cosenos
f impar ($f(-t) = -f(t)$)	$a_n = 0, a_0 = 0$	Solo senos
Simetría de media onda $f(t + T/2) = -f(t)$	Armónicos pares = 0	Solo n impar
f continua	$ c_n \sim 1/n^2$	Decaimiento rápido
f con discontinuidades de salto	$ c_n \sim 1/n$	Decaimiento lento, Gibbs
f real	$c_{-n} = \overline{c_n}$	Simetría conjugada
f real y par	c_n real	Sin espectro de fase
f real e impar	c_n puramente imaginario	Fase $\pm 90^\circ$
f con valor medio cero	$a_0 = 0, c_0 = 0$	Sin componente DC

1.5.1 Cómo usar esta tabla en un examen

1. **Paso 0 (antes de calcular):** examinar simetrías de f
2. Si f es par $\rightarrow$ no pierdas tiempo calculando b_n
3. Si f es impar $\rightarrow$ no pierdas tiempo calculando a_n ni a_0
4. Si tiene simetría de media onda $\rightarrow$ solo calcula armónicos impares
5. Si es combinación (par + media onda) $\rightarrow$ solo cosenos con n impar

Error frecuente: calcular todos los coeficientes sin explotar simetrías. Esto triplica el trabajo innecesariamente.

1.6 5. Propiedades de la serie de Fourier

1.6.1 5.1 Desplazamiento temporal

Si $f(t)$ tiene coeficientes c_n , entonces:

$$f(t - t_0) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega t_0} e^{jn\omega t}$$

Efecto: cambia las **fases** pero NO las amplitudes $|c_n|$. El espectro de amplitud es invariante ante desplazamientos.

1.6.2 5.2 Escalado temporal

Si $f(t)$ tiene periodo T , entonces $f(at)$ tiene periodo $T/|a|$ y:

$$c_n^{\text{nueva}} = c_n^{\text{original}}$$

Los coeficientes son los mismos, pero las frecuencias cambian.

1.6.3 5.3 Derivación

Si $f(t) \sim \sum c_n e^{jn\omega t}$, entonces:

$$f'(t) \sim \sum (jn\omega) c_n e^{jn\omega t}$$

La derivación multiplica por $jn\omega \rightarrow$ amplifica armónicos altos $\rightarrow$ derivar “aguza” la señal.

1.6.4 5.4 Integración

$$\int f(t) dt \sim C + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{jn\omega} e^{jn\omega t}$$

La integración divide por $jn\omega \rightarrow$ atenúa armónicos altos $\rightarrow$ integrar “suaviza” la señal.

1.7 6. Identidad de Parseval

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$

Interpretación: la **potencia media** de la señal es igual a la suma de las potencias de cada armónico.

1.7.1 Aplicación: sumar series numéricas

La identidad de Parseval permite calcular sumas de series que de otro modo serían muy difíciles. Estrategia:

1. Buscar una función f cuya serie de Fourier contenga la serie que nos piden
2. Calcular $\frac{1}{T} \int |f|^2 dt$ directamente
3. Igualar con $\sum |c_n|^2$
4. Despejar la suma buscada

Ejemplo clásico: Para $f(t) = t$ en $[-\pi, \pi]$ (función impar), se obtiene $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$. Aplicando Parseval:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} = 2 \sum \frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

1.8 7. Convergencia

1.8.1 Condiciones de Dirichlet

Si f satisface en cada periodo: 1. Un número finito de discontinuidades 2. Un número finito de máximos y mínimos 3. $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty$

entonces la serie de Fourier **converge** a: - $f(t)$ en puntos de continuidad - $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ en puntos de discontinuidad (promedio de límites laterales)

1.8.2 Fenómeno de Gibbs

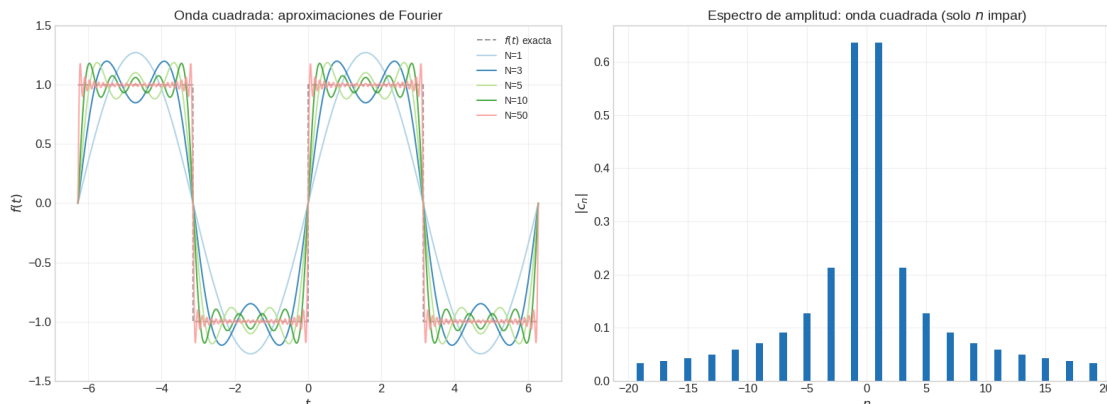
En las discontinuidades de salto, las sumas parciales de Fourier presentan un **sobreimpulso** de aproximadamente el **9%** del salto, que **no desaparece** al aumentar N (solo se hace más estrecho).

Truco para el examen: si preguntan “¿a qué converge la serie en t_0 ?” donde hay una discontinuidad, la respuesta es siempre el promedio de los límites laterales:

$$S(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

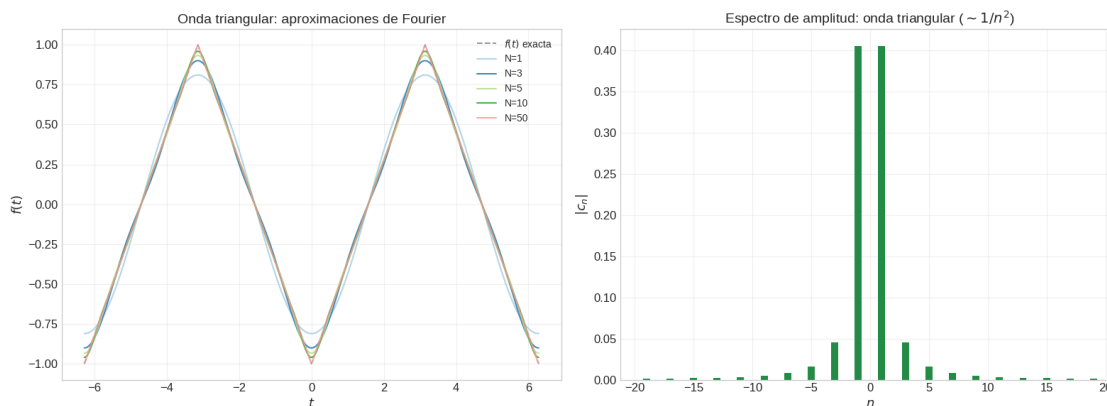
1.9 8. Gráficas: Ondas fundamentales y sus series de Fourier

1.9.1 8.1 Onda cuadrada



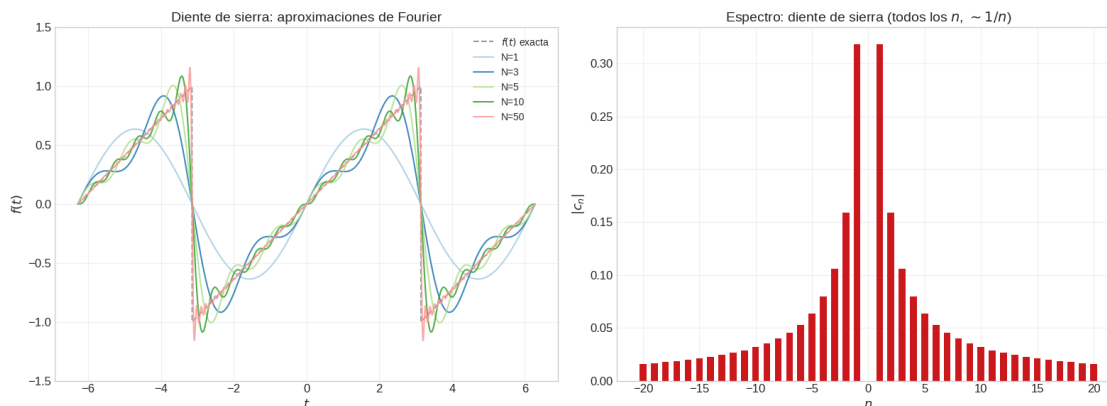
Observaciones de la onda cuadrada: - Función **impar** $\rightarrow$ solo senos ($a_n = 0$) - Simetría de media onda $f(t + \pi) = -f(t) \rightarrow$ solo armónicos **impares** - $b_n = \frac{4}{n\pi}$ para n impar, $b_n = 0$ para n par - Decaimiento $\sim 1/n$ (función con saltos) $\rightarrow$ convergencia lenta - Se observa el **fenómeno de Gibbs** en los saltos incluso con $N = 50$

1.9.2 8.2 Onda triangular



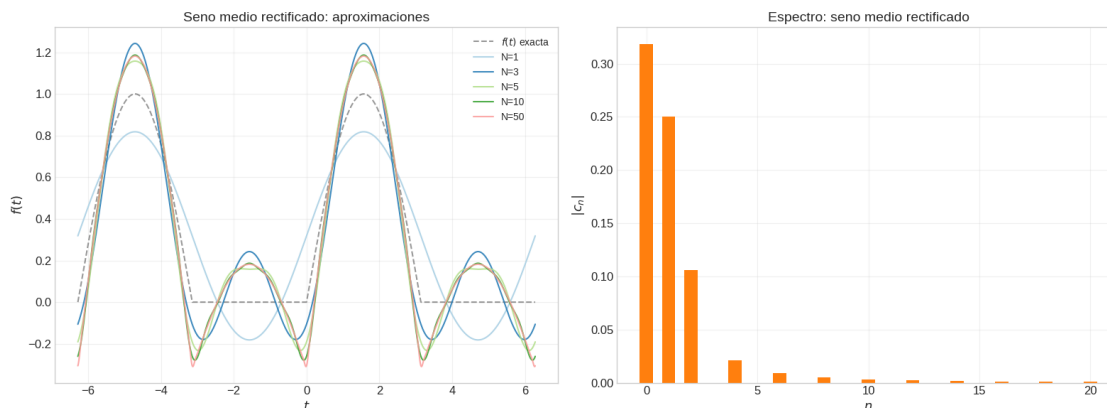
Observaciones de la onda triangular: - Función **par** (versión centrada) $\rightarrow$ solo cosenos ($b_n = 0$) - Simetría de media onda $\rightarrow$ solo armónicos **impares** - $a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}$ para n impar - Decaimiento $\sim 1/n^2$ (función **continua**) $\rightarrow$ convergencia **rápida** - Con solo $N = 5$ la aproximación es visualmente excelente (comparar con la cuadrada)

1.9.3 8.3 Onda diente de sierra



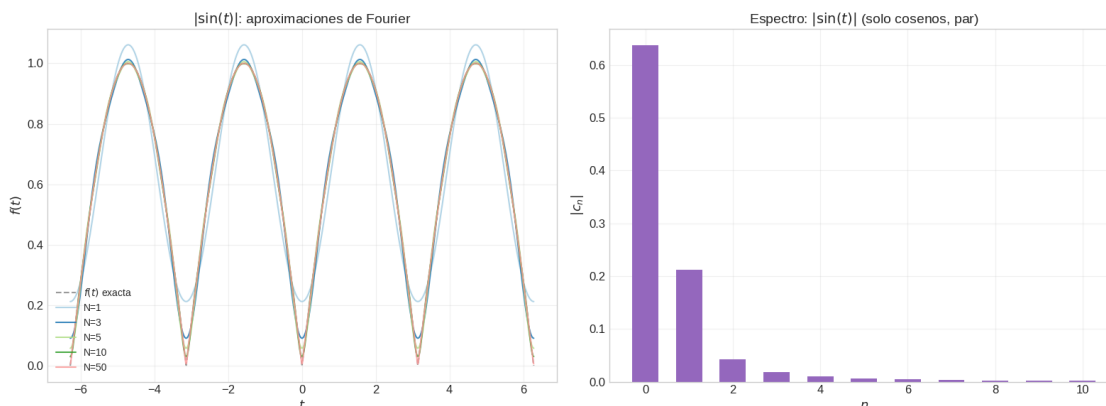
Observaciones del diente de sierra: - Función **impar** → solo senos - **NO** tiene simetría de media onda → aparecen **todos** los armónicos - $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$ para todo n - Decaimiento $\sim 1/n$ (tiene saltos) - Fenómeno de Gibbs visible en los saltos

1.9.4 8.4 Seno medio rectificado



Observaciones del seno medio rectificado: - Función **ni par ni impar** en general → tiene **ambos** a_n y b_n - $b_1 = 1/2$ (componente fundamental del seno), $a_n \neq 0$ solo para n par - La función es **continua** → decaimiento rápido ($\sim 1/n^2$ para los a_n no nulos) - Convergencia rápida: con $N = 5$ ya es muy buena aproximación

1.9.5 8.5 Seno completamente rectificado



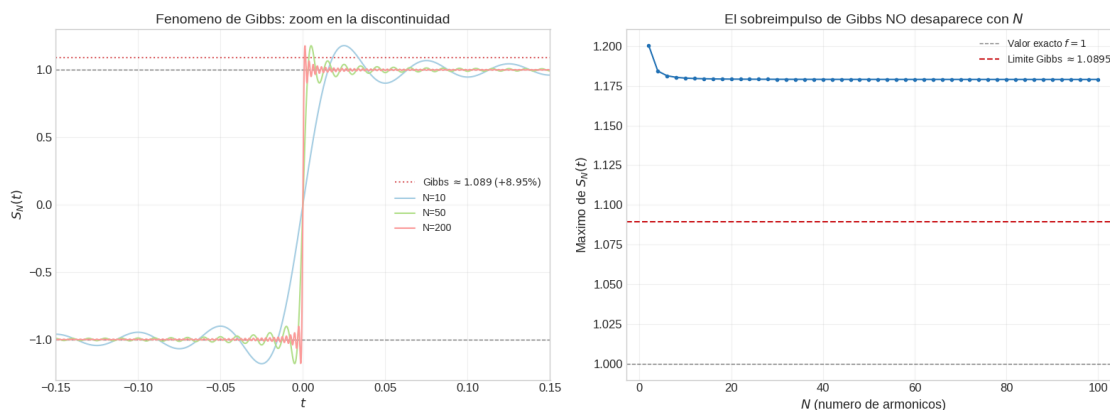
Observaciones de $|\sin(t)|$: - Función **par** $\rightarrow$ solo cosenos ($b_n = 0$) - Periodo π (la mitad de 2π) $\rightarrow$ las frecuencias son $2n$, no n - Función **continua** $\rightarrow$ decaimiento $\sim 1/n^2$ $\rightarrow$ convergencia muy rápida - Con $N = 3$ ya es casi indistinguible de la función exacta

1.9.6 8.6 Comparación: tasas de decaimiento



Conclusión clave: - Funciones con **saltos**: $|c_n| \sim 1/n$ $\rightarrow$ muchos armónicos necesarios - Funciones **continuas**: $|c_n| \sim 1/n^2$ $\rightarrow$ pocos armónicos bastan - En general: cuanto más **suave** es f , más rápido decaen los $|c_n|$ - Regla: si f tiene k derivadas continuas, $|c_n| \sim 1/n^{k+1}$

1.9.7 8.7 Detalle del fenómeno de Gibbs



1.10 9. Ejercicios resueltos del boletín

1.10.1 9.1 Ejercicio: $f(t) = t^2$ en $[-\pi, \pi]$

Datos: $f(t) = t^2$, periodo 2π , $T = 2\pi$, $\omega = 1$.

Paso 0: Análisis de simetría. $f(-t) = (-t)^2 = t^2 = f(t) \rightarrow$ **función par** $\rightarrow b_n = 0$ para todo n .

Paso 1: Calcular a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt$$

Como t^2 es par, la integral en $[-\pi, \pi]$ vale el doble de la integral en $[0, \pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi}$$

Evaluando en los límites:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

Como f es par, usamos la fórmula simplificada:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt$$

Primera integración por partes. Elegimos:

$$\begin{aligned} u &= t^2, & dv &= \cos(nt) dt \\ du &= 2t dt, & v &= \frac{\sin(nt)}{n} \end{aligned}$$

Aplicando $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt = \left[\frac{t^2 \sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi t \sin(nt) dt$$

Evaluable el primer término: $\frac{\pi^2 \sin(n\pi)}{n} - 0 = 0$ (porque $\sin(n\pi) = 0$ para todo entero n).

Queda:

$$\int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt = -\frac{2}{n} \int_0^\pi t \sin(nt) dt$$

Segunda integración por partes. Para $\int_0^\pi t \sin(nt) dt$, elegimos:

$$\begin{aligned} u &= t, & dv &= \sin(nt) dt \\ du &= dt, & v &= -\frac{\cos(nt)}{n} \end{aligned}$$

Aplicando $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int_0^\pi t \sin(nt) dt = \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt$$

Evaluable el primer término:

$$-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} - \left(-\frac{0 \cdot \cos(0)}{n} \right) = -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

(usando que $\cos(n\pi) = (-1)^n$).

Evaluable el segundo término:

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(n\pi) - \sin(0)}{n} = \frac{0}{n^2} = 0$$

(porque $\sin(n\pi) = 0$ para todo entero n).

Así:

$$\int_0^\pi t \sin(nt) dt = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

Sustituyendo en la expresión original:

$$\int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt = -\frac{2}{n} \cdot \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} \right) = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$$

Por tanto:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Resultado final:

$$f(t) = t^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

Aplicación: deducción de series numéricas

Evaluando en $t = 0$ (punto de continuidad, $f(0) = 0$):

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Cambiando signo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Evaluando en $t = \pi$ (punto de continuidad, $f(\pi) = \pi^2$):

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi)}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

1.10.2 9.2 Ejercicio: $f(t) = |\sin t|$ en $[-\pi, \pi]$

Datos: $f(t) = |\sin t|$, periodo π (pero la pedimos como serie de periodo 2π).

Paso 0: Simetría. $f(-t) = |\sin(-t)| = |\sin t| = f(t) \rightarrow$ **función par** $\rightarrow b_n = 0$.

Paso 1: Calcular a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt$$

Como $|\sin t|$ es par, doblamos la integral en $[0, \pi]$, donde $|\sin t| = \sin t \geq 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi}$$

Evalutando en los límites:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} [-\cos(\pi) - (-\cos(0))] = \frac{2}{\pi} [-(-1) + 1] = \frac{2}{\pi} (1 + 1) = \frac{4}{\pi}$$

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt) dt$$

Aplicamos la identidad producto-a-suma:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

Con $A = t$, $B = nt$:

$$\sin t \cos(nt) = \frac{1}{2} [\sin((1 + n)t) + \sin((1 - n)t)]$$

Sustituyendo:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin((1 + n)t) + \sin((1 - n)t)] dt$$

Caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\sin(2t) + \sin(0)] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(2\pi)}{2} + \frac{\cos(0)}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Caso $n \neq 1, n \geq 2$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((1+n)t)}{1+n} - \frac{\cos((1-n)t)}{1-n} \right]_0^\pi$$

Evaluable en $t = \pi$:

$$-\frac{\cos((1+n)\pi)}{1+n} - \frac{\cos((1-n)\pi)}{1-n}$$

Evaluable en $t = 0$:

$$-\frac{\cos(0)}{1+n} - \frac{\cos(0)}{1-n} = -\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}$$

Restando (valor en π menos valor en 0):

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos((1+n)\pi)}{1+n} + \frac{1 - \cos((1-n)\pi)}{1-n} \right]$$

Simplificando $\cos((1+n)\pi)$ y $\cos((1-n)\pi)$:

$$\cos((1+n)\pi) = (-1)^{1+n} = (-1)^{n+1}$$

$$\cos((1-n)\pi) = (-1)^{1-n} = (-1)^{1-n}$$

Observamos que $(-1)^{1-n} = (-1)^1 \cdot (-1)^{-n} = -(-1)^{-n} = -\frac{1}{(-1)^n} = -(-1)^{-n}$, pero es mas facil notar que $(-1)^{1-n} = (-1)^{1+n}$ (porque $(-1)^{-2n} = 1$). Entonces:

$$\cos((1+n)\pi) = \cos((1-n)\pi) = (-1)^{n+1}$$

Sustituyendo:

$$a_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{\pi} \left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right]$$

Para la suma de fracciones:

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} = \frac{(1-n) + (1+n)}{(1+n)(1-n)} = \frac{2}{1-n^2} = \frac{-2}{n^2-1}$$

Además, $1 - (-1)^{n+1} = 1 + (-1)^n$, entonces:

$$a_n = \frac{(1 + (-1)^n)}{\pi} \cdot \frac{-2}{n^2 - 1}$$

Para n impar: $(-1)^n = -1$, luego $1 + (-1)^n = 0$, así que $a_n = 0$.

Para n par ($n = 2k$): $(-1)^n = 1$, luego $1 + (-1)^n = 2$:

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-2}{(2k)^2 - 1} = \frac{-4}{\pi(4k^2 - 1)}$$

Resultado final:

Usando $a_0/2 = 2/\pi$:

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$$

Escribiendo los primeros terminos: $|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{3} + \frac{\cos 4t}{15} + \frac{\cos 6t}{35} + \dots \right)$

1.10.3 9.3 Ejercicio: $f(t) = t \cos t$ en $[-\pi, \pi]$

Datos: $f(t) = t \cos t$, periodo 2π .

Paso 0: Simetría. $f(-t) = (-t) \cos(-t) = -t \cos t = -f(t) \rightarrow$ **función impar** $\rightarrow a_n = 0$, $a_0 = 0$.

Paso 1: Calcular b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \sin(nt) dt$$

Como $t \cos t$ es impar y $\sin(nt)$ es impar, su producto es par. Entonces:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \sin(nt) dt$$

Aplicamos la identidad producto-a-suma:

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)]$$

Con $A = t$, $B = nt$:

$$\cos t \sin(nt) = \frac{1}{2} [\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)]$$

Sustituyendo:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t [\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)] dt$$

Lema auxiliar: $\int_0^\pi t \sin(mt) dt$ para entero $m \neq 0$

Integramos por partes con $u = t$, $dv = \sin(mt) dt$:

$$du = dt, \quad v = -\frac{\cos(mt)}{m}$$

$$\int_0^\pi t \sin(mt) dt = \left[-\frac{t \cos(mt)}{m} \right]_0^\pi + \frac{1}{m} \int_0^\pi \cos(mt) dt$$

$$\text{Primer termino: } -\frac{\pi \cos(m\pi)}{m} - 0 = -\frac{\pi(-1)^m}{m}$$

$$\text{Segundo termino: } \frac{1}{m} \left[\frac{\sin(mt)}{m} \right]_0^\pi = \frac{\sin(m\pi) - 0}{m^2} = 0$$

$$\boxed{\int_0^\pi t \sin(mt) dt = -\frac{\pi(-1)^m}{m}}$$

Caso $n = 1$:

Para $n = 1$: $\sin((n+1)t) = \sin(2t)$ y $\sin((n-1)t) = \sin(0) = 0$:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin(2t) dt$$

Aplicando el lema con $m = 2$:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi(-1)^2}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

Caso $n \geq 2$ ($n \neq 1$):

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi t \sin((n+1)t) dt - \int_0^\pi t \sin((n-1)t) dt \right]$$

Aplicando el lema con $m = n+1$ y $m = n-1$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n+1} - \left(-\frac{\pi(-1)^{n-1}}{n-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{\pi(-1)^{n-1}}{n-1} \right]
\end{aligned}$$

Factorizando π :

$$= -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$$

Observamos que $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{-2} = (-1)^{n+1}$ (pues $(-1)^{-2} = 1$). Entonces:

$$b_n = (-1)^{n+1} \left[-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right]$$

Calculando la diferencia de fracciones:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2 - 1}$$

Por tanto:

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2 - 1}, \quad n \geq 2$$

Resultado final:

$$t \cos t \sim -\frac{1}{2} \sin t + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \sin(nt)$$

Primeros terminos: $t \cos t \sim -\frac{1}{2} \sin t + \frac{2}{3} \sin(2t) - \frac{2}{8} \sin(3t) + \frac{2}{15} \sin(4t) - \dots$

1.10.4 9.4 Ejercicio: Pulso rectangular y deducción de serie

Datos: $f(t) = 1$ para $|t| < d$ y $f(t) = 0$ para $d < |t| < \pi$, con $0 < d < \pi$. Periodo 2π .

Paso 0: Simetría. $f(-t) = f(t)$ (la condicion solo depende de $|t|$) $\rightarrow$ **función par** $\rightarrow b_n = 0$.

Paso 1: Calcular a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

Como $f(t) = 0$ fuera de $[-d, d]$ y $f(t) = 1$ dentro:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-d}^d 1 \, dt = \frac{1}{\pi} [t]_{-d}^d = \frac{1}{\pi} (d - (-d)) = \frac{2d}{\pi}$$

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

Como f es par:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) \, dt$$

Pero $f(t) = 1$ solo en $[0, d]$ y $f(t) = 0$ en $(d, \pi]$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^d 1 \cdot \cos(nt) \, dt$$

Integrando directamente:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^d$$

Evaluyendo en los límites:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nd)}{n} - \frac{\sin(0)}{n} \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(nd)}{n}$$

$$a_n = \frac{2 \sin(nd)}{n\pi}$$

Resultado final:

Usando $a_0/2 = d/\pi$:

$$f(t) = \frac{d}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nd)}{n} \cos(nt)$$

Deducción de una serie numérica

Evalúamos la serie en $t = 0$. En $t = 0$, $f(0) = 1$ (punto de continuidad, ya que $0 < d$), y $\cos(n \cdot 0) = 1$:

$$f(0) = 1 = \frac{d}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nd)}{n}$$

Despejando la suma:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nd)}{n} = 1 - \frac{d}{\pi} = \frac{\pi - d}{\pi}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nd)}{n} = \frac{\pi - d}{2}}$$

Esta identidad es valida para $0 < d < \pi$. Para $d = \pi/2$ da $\sum \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = \frac{\pi}{4}$, que se reduce a $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$ (serie de Leibniz).

1.10.5 9.5 Ejercicio: $f(t) = t^2$ en distintos intervalos y como serie de senos/cosenos

Caso A: Serie de cosenos de $f(t) = t^2$ en $[0, \pi]$

La extensión par de t^2 en $[0, \pi]$ es $f(-t) = (-t)^2 = t^2 = f(t)$, es decir, la misma función t^2 en $[-\pi, \pi]$. Por tanto coincide con la serie completa ya calculada en el Ejercicio 9.1:

$$t^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt), \quad t \in [0, \pi]$$

Caso B: Serie de senos de $f(t) = t^2$ en $[0, \pi]$

Ahora realizamos la extensión impar: definimos $g(t) = t^2$ en $(0, \pi)$ y $g(-t) = -g(t)$. Calculamos:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin(nt) dt$$

Primera integración por partes. Elegimos:

$$\begin{aligned} u &= t^2, & dv &= \sin(nt) dt \\ du &= 2t dt, & v &= -\frac{\cos(nt)}{n} \end{aligned}$$

Aplicando $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int_0^{\pi} t^2 \sin(nt) dt = \left[-\frac{t^2 \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt$$

Evaluando el primer término:

$$-\frac{\pi^2 \cos(n\pi)}{n} - \left(-\frac{0}{n} \right) = -\frac{\pi^2 (-1)^n}{n}$$

Segunda integración por partes. Para $\int_0^\pi t \cos(nt) dt$, elegimos:

$$u = t, \quad dv = \cos(nt) dt$$

$$du = dt, \quad v = \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$\int_0^\pi t \cos(nt) dt = \left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nt) dt$$

Primer termino: $\frac{\pi \sin(n\pi)}{n} - 0 = 0$ (ya que $\sin(n\pi) = 0$).

Segundo termino:

$$-\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n^2} [\cos(nt)]_0^\pi = \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - \cos(0)] = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Así:

$$\int_0^\pi t \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Sustituyendo en la expresión de la primera integración por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2 \sin(nt) dt &= -\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \\ &= -\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^3} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^3} \right]$$

Separando los terminos:

$$\boxed{b_n = -\frac{2\pi(-1)^n}{n} + \frac{4[(-1)^n - 1]}{\pi n^3}}$$

Para n par ($(-1)^n = 1$): $b_n = -\frac{2\pi}{n} + 0 = -\frac{2\pi}{n}$

Para n impar ($(-1)^n = -1$): $b_n = \frac{2\pi}{n} + \frac{4(-2)}{\pi n^3} = \frac{2\pi}{n} - \frac{8}{\pi n^3}$

Resultado final:

$$t^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad t \in (0, \pi)$$

Nota importante sobre la convergencia: En $t = 0$ y $t = \pi$, la serie converge a 0 (promedio de los límites laterales de la extensión impar), NO a $f(0) = 0$ ni a $f(\pi) = \pi^2$. En $t = 0$ coincide por casualidad ($f(0) = 0$), pero en $t = \pi$ la serie da 0 mientras que $f(\pi) = \pi^2$.

1.10.6 9.6 Ejercicio: $f(t) = 0$ para $t < 0$, $f(t) = \sin t$ para $t \geq 0$, en $[-\pi, \pi]$

Datos: Función a trozos, periodo 2π .

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq t < 0 \\ \sin t & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Paso 0: Análisis de simetría. $f(-\pi/2) = 0$ pero $f(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$, así que $f(-t) \neq f(t)$ y $f(-t) \neq -f(t) \rightarrow$ **NO es ni par ni impar** $\rightarrow$ calcular a_n y b_n .

Paso 1: Calcular a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dt + \int_0^{\pi} \sin t dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} \end{aligned}$$

Evaluando en los límites:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} [-\cos(\pi) - (-\cos(0))] = \frac{1}{\pi} [1 + 1] = \frac{2}{\pi}$$

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt) dt$$

Aplicamos la identidad producto-a-suma:

$$\sin t \cos(nt) = \frac{1}{2} [\sin((1+n)t) + \sin((1-n)t)]$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin((1+n)t) + \sin((1-n)t)] dt$$

Caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\sin(2t) + \sin(0)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(2t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(2\pi)}{2} + \frac{\cos(0)}{2} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Caso $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((1+n)t)}{1+n} + \frac{\cos((n-1)t)}{n-1} \right]_0^\pi$$

Nota: usamos $\sin((1-n)t) = -\sin((n-1)t)$, cuya primitiva es $\frac{\cos((n-1)t)}{n-1}$.

Evaluable en $t = \pi$:

$$-\frac{\cos((1+n)\pi)}{1+n} + \frac{\cos((n-1)\pi)}{n-1} = -\frac{(-1)^{n+1}}{1+n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$$

Como $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ (difieren en exponente 2), llamemos $\alpha = (-1)^{n+1}$:

Valor en π : $-\frac{\alpha}{1+n} + \frac{\alpha}{n-1} = \alpha \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \alpha \cdot \frac{2}{n^2-1}$

Evaluable en $t = 0$:

$$-\frac{1}{1+n} + \frac{1}{n-1} = \frac{2}{n^2-1}$$

Restando:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left[\alpha \cdot \frac{2}{n^2-1} - \frac{2}{n^2-1} \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{n^2-1} (\alpha - 1) = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2-1)}$$

Reescribiendo: $(-1)^{n+1} - 1 = -(1 + (-1)^n)$ (verificar: si n par, $(-1)^{n+1} - 1 = -1 - 1 = -2$ y $-(1+1) = -2$; si n impar, $1 - 1 = 0$ y $-(1-1) = 0$).

$$a_n = \frac{-(1 + (-1)^n)}{\pi(n^2-1)}$$

Para n impar: $1 + (-1)^n = 0 \rightarrow a_n = 0$.

Para n par: $1 + (-1)^n = 2 \rightarrow a_n = \frac{-2}{\pi(n^2-1)}$.

Paso 3: Calcular b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin(nt) dt$$

Aplicamos la identidad:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\cos((1-n)t) - \cos((1+n)t)] dt$$

Caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(0) - \cos(2t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [1 - \cos(2t)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi} [\pi - 0 - 0 + 0] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Caso $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin((1-n)t)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)t)}{1+n} \right]_0^\pi$$

En $t = \pi$: $\frac{\sin((1-n)\pi)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)\pi)}{1+n}$. Ambos senos son $\sin(m\pi) = 0$ para entero m .

En $t = 0$: ambos senos son 0.

$$b_n = \frac{1}{2\pi} (0 - 0) = 0 \quad \text{para } n \geq 2$$

Resultado final:

Recopilando: $a_0 = 2/\pi$, $a_1 = 0$, $a_n = -2/[\pi(n^2 - 1)]$ para n par ≥ 2 (cero para impar), $b_1 = 1/2$, $b_n = 0$ para $n \geq 2$.

Reindexando los terminos pares $n = 2k$:

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$$

Primeros terminos: $f(t) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{3\pi} \cos(2t) - \frac{2}{15\pi} \cos(4t) - \dots$

Convergencia en $t = 0$: la serie converge a $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\sin(0) + 0}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ (coincide con $f(0) = 0$ pues f es continua en 0, aunque la funcion tiene definiciones distintas a cada lado).

1.10.7 9.7 Ejercicio: $f(t) = 1 - \cos^2 t$

Datos: $f(t) = 1 - \cos^2 t$.

Paso 0: Simplificar primero usando identidades trigonométricas.

Recordamos la identidad del angulo doble:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

Sustituyendo en $f(t)$:

$$f(t) = 1 - \frac{1 + \cos(2t)}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}$$

Paso 1: Reconocer que ya es una serie de Fourier.

La expresión $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$ ya tiene la forma de una serie de Fourier finita:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

Comparando termino a termino:

- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, luego $a_0 = 1$
- $a_1 = 0$ (no hay termino $\cos(t)$)
- $a_2 = -\frac{1}{2}$ (el coeficiente de $\cos(2t)$)
- $a_n = 0$ para $n \geq 3$
- $b_n = 0$ para todo n (no hay senos)

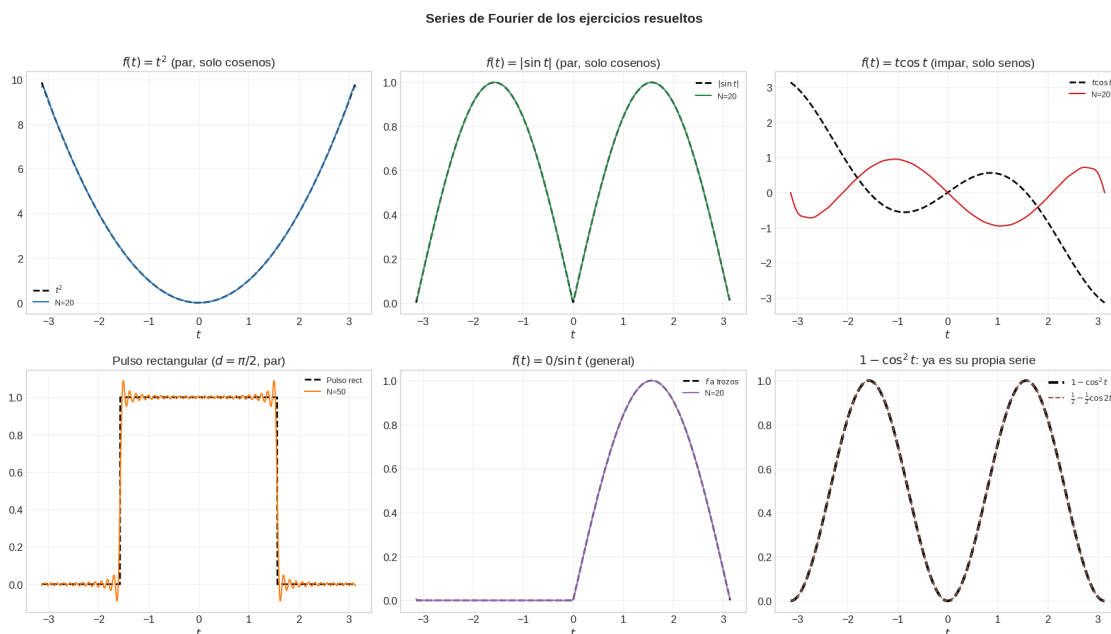
$$f(t) = 1 - \cos^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$

No hay que calcular ninguna integral. La serie de Fourier es exacta con un numero finito de terminos.

Leccion clave: Antes de lanzarse a calcular integrales, **siempre** intentar simplificar con identidades trigonometricas. Si la funcion ya es un polinomio trigonometrico finito (combinacion lineal de $\cos(nt)$ y $\sin(nt)$), la serie de Fourier coincide con esa expresion y no hay nada que integrar.

Otras identidades utiles en este contexto: $-\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$ - $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ - $\sin^3 t = \frac{3 \sin t - \sin(3t)}{4}$ - $\cos^3 t = \frac{3 \cos t + \cos(3t)}{4}$

Cualquier funcion que se pueda reducir a estas formas tiene su serie de Fourier de manera inmediata.



1.11 10. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

Esta sección clasifica los **12 tipos** de problemas de series de Fourier. Para cada tipo: fórmula clave, qué buscar primero, y un ejercicio resuelto.

1.11.1 Tabla resumen

#	Tipo	Qué buscar primero	Ecuación clave	Dificultad
1	Serie completa de f par en $[-\pi, \pi]$	$f(-t) = f(t)$	$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f \cos(nt) dt$	Media
2	Serie completa de f impar en $[-\pi, \pi]$	$f(-t) = -f(t)$	$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f \sin(nt) dt$	Media
3	Serie completa general (ambos a_n, b_n)	Ni par ni impar	Tres integrales	Alta

#	Tipo	Qué buscar primero	Ecuación clave	Dificultad
4	Serie de senos en $[0, \pi]$	“Desarrolle en senos”	$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f \sin(nt) dt$	Media
5	Serie de cosenos en $[0, \pi]$	“Desarrolle en cosenos”	$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f \cos(nt) dt$	Media
6	Serie compleja	Piden c_n	$c_n = \frac{1}{2\pi} \int f e^{-jnt} dt$	Media-Alta
7	Serie en intervalo general $[0, L]$ o $[-L, L]$	$\omega = \pi/L$	Sustituir ω en fórmulas	Media
8	Parseval para sumar series	“Deduzca la suma...”	$\frac{1}{T} \int f ^2 = \sum c_n ^2$	Alta
9	Predecir coeficientes por simetría	Simetrías de f	Tabla de patrones	Baja
10	Serie de función a trozos	Función con “si...”	Partir integral	Media-Alta
11	Función en $[0, 2\pi]$	Cambiar a $[-\pi, \pi]$	Sustitución $u = t - \pi$	Media
12	Convergencia en discontinuidad	¿A qué converge en t_0 ?”	$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$	Baja

1.11.2 10.1 Tipo 1: Serie completa de función PAR en $[-\pi, \pi]$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt$$

Qué buscar PRIMERO: verificar $f(-t) = f(t)$. Si es así, $b_n = 0$ automáticamente.

Clave: al ser par, la integral en $[-\pi, \pi]$ se reduce a $2 \int_0^\pi$.

Ejercicio resuelto: $f(t) = \pi - |t|$ en $[-\pi, \pi]$ **Paso 0: Simetría.** $f(-t) = \pi - |-t| = \pi - |t| = f(t)$
 $\rightarrow$ par $\rightarrow b_n = 0$.

Paso 1: Calcular a_0

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) dt$$

(En $[0, \pi]$, $|t| = t$.)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\pi t - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi$$

Evalutando en $t = \pi$: $\pi \cdot \pi - \frac{\pi^2}{2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

Evalutando en $t = 0$: 0

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) \cos(nt) dt$$

Separamos en dos integrales:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^\pi \cos(nt) dt - \int_0^\pi t \cos(nt) dt \right]$$

Primera integral:

$$\pi \int_0^\pi \cos(nt) dt = \pi \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi = \pi \cdot \frac{\sin(n\pi) - 0}{n} = 0$$

(porque $\sin(n\pi) = 0$ para todo entero n).

Segunda integral (por partes). Elegimos $u = t$, $dv = \cos(nt) dt$:

$$du = dt, \quad v = \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$\int_0^\pi t \cos(nt) dt = \left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nt) dt$$

Primer termino: $\frac{\pi \sin(n\pi)}{n} - 0 = 0$

Segundo termino: $-\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n^2} [\cos(nt)]_0^\pi = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2} = \frac{(-1)^n-1}{n^2}$

Así: $\int_0^\pi t \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n-1}{n^2}$

Sustituyendo:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[0 - \frac{(-1)^n-1}{n^2} \right] = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}$$

Para n par: $(-1)^n = 1 \rightarrow 1-1=0 \rightarrow a_n = 0$.

Para n impar: $(-1)^n = -1 \rightarrow 1-(-1)=2 \rightarrow a_n = \frac{4}{\pi n^2}$.

Resultado final:

Reindexando con $n = 2k + 1$ (impares):

$$\pi - |t| \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$$

Primeros terminos: $\pi - |t| \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \dots \right)$

1.11.3 10.2 Tipo 2: Serie completa de función IMPAR en $[-\pi, \pi]$

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt$$

Qué buscar PRIMERO: verificar $f(-t) = -f(t)$. Si es así, $a_n = 0$ y $a_0 = 0$.

Ejercicio resuelto: $f(t) = t$ en $[-\pi, \pi]$ **Paso 0: Simetría.** $f(-t) = -t = -f(t) \rightarrow$ impar $\rightarrow a_n = 0$ para todo n , $a_0 = 0$.

Paso 1: Calcular b_n

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(nt) dt$$

Integración por partes. Elegimos:

$$\begin{aligned} u &= t, & dv &= \sin(nt) dt \\ du &= dt, & v &= -\frac{\cos(nt)}{n} \end{aligned}$$

Aplicando $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int_0^\pi t \sin(nt) dt = \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt$$

Evaluando el primer termino:

$$-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} - \left(-\frac{0 \cdot \cos(0)}{n} \right) = -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

(Recordando que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.)

Evaluando el segundo termino:

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n^2} [\sin(n\pi) - \sin(0)] = \frac{0-0}{n^2} = 0$$

(Porque $\sin(n\pi) = 0$ para todo entero n .)

Sustituyendo:

$$\int_0^\pi t \sin(nt) dt = -\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0 = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

Por tanto:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} \right) = \frac{-2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}}$$

Resultado final:

$$\boxed{t \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) = 2 \left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \dots \right)}$$

Convergencia en $t = \pi$: En el extremo del intervalo, $f(\pi^-) = \pi$ y $f(-\pi^+) = -\pi$ (por periodicidad, el limite por la derecha en π coincide con el limite por la izquierda en $-\pi$).

$$S(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 \neq \pi$$

La serie NO converge a $f(\pi)$ en el punto de discontinuidad de la extension periodica.

1.11.4 10.3 Tipo 3: Serie completa general (ni par ni impar)

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

Qué buscar PRIMERO: comprobar que f no tiene simetría explotable. Si no la tiene, hay que calcular las tres integrales (a_0, a_n, b_n) .

Ejercicio resuelto: $f(t) = e^t$ en $[-\pi, \pi]$ **Paso 0: Simetría.** $f(-t) = e^{-t} \neq \pm e^t \rightarrow$ función general, no hay simplificación.

Paso 1: Calcular a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{1}{\pi} [e^t]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi}$$

(Usando la definición $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.)

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) dt$$

Metodo: integración por partes doble (o formula directa).

Calculamos $I = \int e^t \cos(nt) dt$. Integramos por partes dos veces:

Primera vez: $u = \cos(nt)$, $dv = e^t dt \rightarrow du = -n \sin(nt) dt$, $v = e^t$:

$$I = e^t \cos(nt) + n \int e^t \sin(nt) dt$$

Segunda vez: para $J = \int e^t \sin(nt) dt$, tomamos $u = \sin(nt)$, $dv = e^t dt$:

$$J = e^t \sin(nt) - n \int e^t \cos(nt) dt = e^t \sin(nt) - nI$$

Sustituyendo en la primera:

$$I = e^t \cos(nt) + n[e^t \sin(nt) - nI] = e^t \cos(nt) + ne^t \sin(nt) - n^2 I$$

$$I + n^2 I = e^t [\cos(nt) + n \sin(nt)]$$

$$I = \int e^t \cos(nt) dt = \frac{e^t(\cos(nt) + n \sin(nt))}{1 + n^2}$$

Evaluable en los límites $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) dt = \frac{1}{1 + n^2} [e^t(\cos(nt) + n \sin(nt))]_{-\pi}^{\pi}$$

En $t = \pi$: $e^{\pi}(\cos(n\pi) + n \sin(n\pi)) = e^{\pi} \cdot (-1)^n$ (pues $\sin(n\pi) = 0$)

En $t = -\pi$: $e^{-\pi}(\cos(-n\pi) + n \sin(-n\pi)) = e^{-\pi} \cdot (-1)^n$ (pues $\cos(-n\pi) = (-1)^n$, $\sin(-n\pi) = 0$)

$$= \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{1 + n^2} = \frac{2(-1)^n \sinh(\pi)}{1 + n^2}$$

Por tanto:

$$a_n = \frac{2(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1 + n^2)}$$

Paso 3: Calcular b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) dt$$

Análogamente, usando $J = \frac{e^t(\sin(nt) - n \cos(nt))}{1 + n^2}$:

En $t = \pi$: $e^{\pi}(\sin(n\pi) - n \cos(n\pi)) = e^{\pi} \cdot (-n)(-1)^n$

En $t = -\pi$: $e^{-\pi}(\sin(-n\pi) - n \cos(-n\pi)) = e^{-\pi} \cdot (-n)(-1)^n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) dt = \frac{-n(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{1 + n^2} = \frac{-2n(-1)^n \sinh(\pi)}{1 + n^2}$$

$$b_n = \frac{-2n(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1 + n^2)}$$

Resultado final:

Factorizando el término común $\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1 + n^2}$:

$$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1 + n^2)} [\cos(nt) - n \sin(nt)]$$

$$e^t \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} [\cos(nt) - n \sin(nt)]$$

1.11.5 10.4 Tipo 4: Serie de senos en $[0, \pi]$ (extensión impar)

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Qué buscar PRIMERO: el enunciado dice “serie de senos” o “extensión impar”. La función solo está definida en $[0, \pi]$ (o $[0, L]$).

Clave: la serie converge a 0 en $t = 0$ y $t = \pi$ (la extensión impar es 0 en los extremos).

Ejercicio resuelto: Serie de senos de $f(t) = 1$ en $[0, \pi]$ Paso 1: Plantear la integral

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt$$

Paso 2: Integrar

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi}$$

Paso 3: Evaluar en los límites

$$\text{En } t = \pi: -\frac{\cos(n\pi)}{n} = -\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\text{En } t = 0: -\frac{\cos(0)}{n} = -\frac{1}{n}$$

Restando:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(-1)^n}{n} - \left(-\frac{1}{n} \right) \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n}$$

Paso 4: Analizar según la paridad de n

Para n par: $(-1)^n = 1 \rightarrow 1 - 1 = 0 \rightarrow b_n = 0$.

Para n impar: $(-1)^n = -1 \rightarrow 1 - (-1) = 2 \rightarrow b_n = \frac{4}{n\pi}$.

Resultado final:

Reindexando con $n = 2k + 1$:

$$1 \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right), \quad t \in (0, \pi)$$

Nota sobre convergencia: En $t = 0$ la serie vale 0 (todos los senos son 0), no 1. Esto es coherente: la extensión impar tiene un salto de -1 a $+1$ en $t = 0$, y el promedio $\frac{-1+1}{2} = 0$. Igualmente en $t = \pi$: la serie da 0, no 1.

1.11.6 10.5 Tipo 5: Serie de cosenos en $[0, \pi]$ (extensión par)

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

Qué buscar PRIMERO: el enunciado dice “serie de cosenos” o “extensión par”.

Clave: la serie converge a $f(0)$ y $f(\pi)$ en los extremos (la extensión par es continua ahí si f lo es).

Ejercicio resuelto: Serie de cosenos de $f(t) = t$ en $[0, \pi]$ Paso 1: Calcular a_0

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt$$

Integración por partes. Elegimos:

$$\begin{aligned} u &= t, & dv &= \cos(nt) dt \\ du &= dt, & v &= \frac{\sin(nt)}{n} \end{aligned}$$

Aplicando $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt$$

Evaluando el primer termino:

$$\frac{\pi \sin(n\pi)}{n} - \frac{0 \cdot \sin(0)}{n} = 0 - 0 = 0$$

(Porque $\sin(n\pi) = 0$ para todo entero n .)

Evaluando el segundo termino:

$$-\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} [\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - \cos(0)] = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Resultado:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

Para n par: $(-1)^n = 1 \rightarrow a_n = 0$.

Para n impar: $(-1)^n = -1 \rightarrow a_n = \frac{2(-2)}{\pi n^2} = \frac{-4}{\pi n^2}$.

Resultado final:

Reindexando con $n = 2k + 1$:

$$t \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}, \quad t \in [0, \pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \dots \right)$$

Verificacion en $t = 0$: $S(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Como $f(0) = 0$, se deduce $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

1.11.7 10.6 Tipo 6: Serie de Fourier compleja

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jnt} dt, \quad f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt}$$

Qué buscar PRIMERO: si f es real, verificar simetría conjugada $c_{-n} = \overline{c_n}$ para reducir trabajo a la mitad.

Ejercicio resuelto: c_n de $f(t) = e^{at}$ en $[-\pi, \pi]$, $a \neq jn$ **Paso 1: Plantear la integral**

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{at} e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-jn)t} dt$$

Paso 2: Integrar la exponencial

La primitiva de $e^{(a-jn)t}$ es $\frac{e^{(a-jn)t}}{a-jn}$ (valido porque $a - jn \neq 0$):

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(a-jn)t}}{a-jn} \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

Paso 3: Evaluar en los limites

$$c_n = \frac{1}{2\pi(a-jn)} [e^{(a-jn)\pi} - e^{-(a-jn)\pi}]$$

Paso 4: Reconocer el seno hiperbolico

Recordando que $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$:

$$e^{(a-jn)\pi} - e^{-(a-jn)\pi} = 2 \sinh((a-jn)\pi)$$

$$c_n = \frac{2 \sinh((a - jn)\pi)}{2\pi(a - jn)} = \frac{\sinh((a - jn)\pi)}{\pi(a - jn)}$$

Paso 5: Simplificar para a real

Expandimos $\sinh((a - jn)\pi)$ usando $\sinh(x + jy) = \sinh(x) \cosh(jy) + j \cosh(x) \sinh(jy)$:

$$\sinh((a - jn)\pi) = \sinh(a\pi - jn\pi) = \sinh(a\pi) \cosh(n\pi) + j \cosh(a\pi) \sinh(-n\pi)$$

Como $\cosh(n\pi) = (-1)^n$ y $\sinh(n\pi) = 0$:

$$\sinh((a - jn)\pi) = (-1)^n \sinh(a\pi)$$

Por tanto:

$$c_n = \frac{(-1)^n \sinh(a\pi)}{\pi(a - jn)}$$

Verificación de consistencia con la serie real (Tipo 3):

Para $a = 1$ (caso e^t), tenemos $c_n = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1 - jn)}$. Multiplicando por el conjugado:

$$c_n = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{1 + jn}{1 + n^2}$$

Las relaciones $a_n = c_n + c_{-n}$ y $b_n = j(c_n - c_{-n})$ dan exactamente los coeficientes del Tipo 3.

1.11.8 10.7 Tipo 7: Serie en intervalo general $[-L, L]$ o $[0, L]$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right]$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Qué buscar PRIMERO: identificar L (semilongitud del intervalo). La frecuencia fundamental es $\omega = \pi/L$, **no** $2\pi/T$.

Ejercicio resuelto: $f(t) = t$ en $[-2, 2]$ ($L = 2$) **Paso 0: Simetría.** $f(-t) = -t = -f(t) \rightarrow$ impar $\rightarrow a_n = 0$ para todo n , $a_0 = 0$.

Paso 1: Calcular b_n

Con $L = 2$ y la formula para funcion impar:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{2}{2} \int_0^2 t \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \int_0^2 t \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt$$

Integración por partes. Elegimos:

$$\begin{aligned} u &= t, & dv &= \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt \\ du &= dt, & v &= -\frac{2 \cos(n\pi t/2)}{n\pi} \end{aligned}$$

(La primitiva de $\sin(\alpha t)$ es $-\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha}$ con $\alpha = n\pi/2$.)

Aplicando $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int_0^2 t \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \left[-\frac{2t \cos(n\pi t/2)}{n\pi} \right]_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt$$

Evaluando el primer termino:

$$\text{En } t = 2: -\frac{2 \cdot 2 \cdot \cos(n\pi \cdot 2/2)}{n\pi} = -\frac{4 \cos(n\pi)}{n\pi} = -\frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

$$\text{En } t = 0: -\frac{0}{n\pi} = 0$$

$$\text{Primer termino: } -\frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

Evaluando el segundo termino:

$$\frac{2}{n\pi} \left[\frac{2 \sin(n\pi t/2)}{n\pi} \right]_0^2 = \frac{4}{n^2 \pi^2} [\sin(n\pi) - \sin(0)] = \frac{4}{n^2 \pi^2} \cdot 0 = 0$$

(Porque $\sin(n\pi) = 0$ para todo entero n .)

Resultado:

$$b_n = -\frac{4(-1)^n}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\boxed{b_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}}$$

Resultado final:

$$\boxed{t \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right), \quad t \in (-2, 2)}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{2} \sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{2} - \dots \right)$$

Notar la similitud con la serie de $f(t) = t$ en $[-\pi, \pi]$: la estructura es idéntica, solo cambia la frecuencia fundamental de 1 a $\pi/2$.

1.11.9 10.8 Tipo 8: Parseval para sumar series numéricas

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$

Qué buscar PRIMERO: identificar qué serie nos piden sumar, luego encontrar una función f cuya serie de Fourier la contenga.

Estrategia inversa: si ya tenemos la serie de Fourier de alguna f , Parseval nos da “gratis” la suma de los cuadrados de los coeficientes.

Ejercicio resuelto: Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ Paso 0: Elegir la función adecuada.

Necesitamos coeficientes con $1/n^2$ para que sus cuadrados den $1/n^4$. La serie de $f(t) = t^2$ tiene $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$, así que $a_n^2 = \frac{16}{n^4}$. Perfecto.

Datos de $f(t) = t^2$ en $[-\pi, \pi]$ (del Ejercicio 9.1): - $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ - $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ - $b_n = 0$ (función par)

Paso 1: Calcular el lado izquierdo de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt$$

Como t^4 es par:

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5}$$

Paso 2: Calcular el lado derecho de Parseval

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Término a_0 :

$$\frac{a_0^2}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi^4}{9} = \frac{\pi^4}{9}$$

Términos a_n :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Paso 3: Igualar ambos lados

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Despejando:

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \pi^4 \left(\frac{9-5}{45} \right) = \frac{4\pi^4}{45}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{4\pi^4}{45 \cdot 8} = \frac{4\pi^4}{360} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

Este resultado es $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, donde ζ es la función zeta de Riemann.

1.11.10 10.9 Tipo 9: Predecir coeficientes por simetría

No requiere calcular integrales. Solo análisis de propiedades.

Qué buscar PRIMERO: todas las simetrías posibles (par, impar, media onda, combinaciones).

Tabla de reglas de simetría:

Propiedad de f	Consecuencia
$f(-t) = f(t)$ (par)	$b_n = 0$, solo cosenos
$f(-t) = -f(t)$ (impar)	$a_n = 0$, solo senos
$f(t + T/2) = -f(t)$ (media onda)	Solo armónicos impares (n impar)
f real	$c_{-n} = \overline{c_n}$
f real y par	c_n real
f real e impar	c_n puramente imaginario

Ejercicio resuelto: Predecir la forma de la serie de $f(t) = t^3$ en $[-\pi, \pi]$ Análisis paso a paso:

1. Paridad: $f(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -f(t) \rightarrow$ **impar** $\rightarrow a_0 = a_n = 0$, solo senos.

2. Simetría de media onda: $f(t + \pi) = (t + \pi)^3$. Para que haya simetría de media onda, necesitaríamos $(t + \pi)^3 = -t^3$, lo cual NO se cumple (basta probar $t = 0$: $\pi^3 \neq 0$). $\rightarrow$ **no** tiene simetría de media onda $\rightarrow$ aparecen todos los n (pares e impares).

3. Regularidad: f es un polinomio, infinitamente diferenciable. La teoría dice que si f es k veces diferenciable, $|c_n| \sim 1/n^{k+1}$. Como t^3 es C^∞ en el interior, pero la extensión periódica tiene salto en $\pm\pi$ (pues $f(\pi) = \pi^3 \neq f(-\pi) = -\pi^3$ como límites laterales). Entonces el decaimiento es $|b_n| \sim 1/n^{\text{algo}}$. Al tener la primera derivada continua pero discontinuidad de la función en la extensión, $|b_n| \sim 1/n$ (como en $f(t) = t$), pero de hecho t^3 tiene un decaimiento más rápido tipo $\sim 1/n$.

4. Coeficientes complejos: f real e impar $\rightarrow c_n$ puramente imaginario.

Predicción sin calcular nada:

$$t^3 \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad \text{con todos los } n \text{ (pares e impares)}$$

Ejercicio resuelto: $f(t) = |t|$ en $[-\pi, \pi]$ **Análisis paso a paso:**

1. Paridad: $f(-t) = |-t| = |t| = f(t) \rightarrow$ **par** $\rightarrow$ solo cosenos, $b_n = 0$.

2. Simetría de media onda: $f(t + \pi) = |t + \pi|$. Para $t = 0$: $|\pi| = \pi \neq -|0| = 0$. $\rightarrow$ **no** hay simetría de media onda $\rightarrow$ todos los n .

3. Regularidad: f es continua pero con “pico” en $t = 0$ (derivada no existe). La extensión periódica es continua pero no derivable en $t = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$. Para funciones continuas con derivada a trozos: $|c_n| \sim 1/n^2$.

Predicción:

$$|t| \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt), \quad \text{con todos los } n, \quad |a_n| \sim \frac{C}{n^2}$$

1.11.11 10.10 Tipo 10: Serie de función a trozos

Qué buscar PRIMERO: los puntos donde cambia la definición. La integral se parte en subintervalos.

Estrategia general: 1. Identificar los trozos y sus intervalos 2. Comprobar simetría (a veces la función a trozos es par o impar) 3. Partir cada integral $\int_{-\pi}^{\pi}$ en la suma de las integrales sobre cada trozo

Ejercicio resuelto: $f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$ **Paso 0: Simetría.** $f(-\pi/2) = -1$ y $f(\pi/2) = \pi/2$. Comprobamos: $f(-\pi/2) = -1 \neq f(\pi/2) = \pi/2$, así que f no es par. También $f(-\pi/2) = -1 \neq -f(\pi/2) = -\pi/2$, así que no es impar. $\rightarrow$ **función general**, calcular a_0 , a_n y b_n .

Paso 1: Calcular a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) dt + \int_0^{\pi} t dt \right]$$

Primera integral: $\int_{-\pi}^0 (-1) dt = [-t]_{-\pi}^0 = 0 - \pi = -\pi$

Segunda integral: $\int_0^{\pi} t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[-\pi + \frac{\pi^2}{2} \right] = -1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 2}{2}$$

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \right]$$

Primera integral:

$$\int_{-\pi}^0 (-1) \cos(nt) dt = - \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_{-\pi}^0 = - \left[\frac{\sin(0)}{n} - \frac{\sin(-n\pi)}{n} \right] = -[0 - 0] = 0$$

(Porque $\sin(0) = 0$ y $\sin(-n\pi) = 0$.)

Segunda integral (por partes). Elegimos $u = t$, $dv = \cos(nt) dt$:

$$du = dt, \quad v = \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$\int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt$$

Primer termino: $\frac{\pi \sin(n\pi)}{n} - 0 = 0$

Segundo termino: $-\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$

Así: $\int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$

Resultado:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[0 + \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right] = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

Para n par: $(-1)^n = 1 \rightarrow a_n = 0$.

Para n impar: $(-1)^n = -1 \rightarrow a_n = \frac{-2}{\pi n^2}$.

Paso 3: Calcular b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \right]$$

Primera integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nt) dt &= - \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^0 = \frac{1}{n} [\cos(nt)]_{-\pi}^0 = \frac{1}{n} [\cos(0) - \cos(-n\pi)] \\ &= \frac{1}{n} [1 - (-1)^n] = \frac{1 - (-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Segunda integral (por partes). Elegimos $u = t$, $dv = \sin(nt) dt$:

$$du = dt, \quad v = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$\int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt$$

Primer termino: $-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} - 0 = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$

Segundo termino: $\frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = 0$

Así: $\int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$

Resultado:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} + \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} \right) \right] = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} - \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} - \frac{(-1)^n}{n}}$$

Simplificando para valores concretos:

Para n par ($(-1)^n = 1$): $b_n = 0 - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$

Para n impar ($(-1)^n = -1$): $b_n = \frac{2}{\pi n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right) = \frac{\pi+2}{\pi n}$

Convergencia en $t = 0$ (punto de discontinuidad):

$$S(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0 + (-1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

La serie converge al promedio de los límites laterales, no a $f(0) = 0$.

1.11.12 10.11 Tipo 11: Función definida en $[0, 2\pi]$

Qué buscar PRIMERO: el intervalo es $[0, 2\pi]$ en vez de $[-\pi, \pi]$. Se puede: - (a) Integrar directamente en $[0, 2\pi]$ (las fórmulas son válidas en cualquier intervalo de longitud T) - (b) Hacer el cambio $u = t - \pi$ para trasladar a $[-\pi, \pi]$

Clave: la serie de Fourier NO cambia, solo cambian los límites de integración.

Ejercicio resuelto: $f(t) = t$ en $[0, 2\pi]$ **Paso 1: Calcular a_0**

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi^2 = 2\pi$$

Paso 2: Calcular a_n ($n \geq 1$)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos(nt) \, dt$$

Integración por partes. Elegimos $u = t$, $dv = \cos(nt) \, dt$:

$$du = dt, \quad v = \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$\int_0^{2\pi} t \cos(nt) \, dt = \left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \, dt$$

Primer termino: $\frac{2\pi \sin(2n\pi)}{n} - 0 = 0$ (porque $\sin(2n\pi) = 0$ para todo entero n).

Segundo termino:

$$-\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n^2} [\cos(2n\pi) - \cos(0)] = \frac{1}{n^2} [1 - 1] = 0$$

(Porque $\cos(2n\pi) = 1$ para todo entero n .)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0$$

Todos los a_n son cero (para $n \geq 1$). Esto tiene sentido: al no haber simetría par en $[0, 2\pi]$, los cosenos no contribuyen.

Paso 3: Calcular b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin(nt) dt$$

Integración por partes. Elegimos $u = t$, $dv = \sin(nt) dt$:

$$du = dt, \quad v = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$\int_0^{2\pi} t \sin(nt) dt = \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt$$

Primer termino:

$$-\frac{2\pi \cos(2n\pi)}{n} - \left(-\frac{0}{n} \right) = -\frac{2\pi \cdot 1}{n} = -\frac{2\pi}{n}$$

(Porque $\cos(2n\pi) = 1$.)

Segundo termino:

$$\frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n^2} [\sin(2n\pi) - \sin(0)] = 0$$

Así: $\int_0^{2\pi} t \sin(nt) dt = -\frac{2\pi}{n}$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{2\pi}{n} \right) = -\frac{2}{n}$$

$$\boxed{b_n = -\frac{2}{n}}$$

Resultado final:

$$\boxed{t \sim \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}, \quad t \in (0, 2\pi)}$$
$$= \pi - 2 \left(\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots \right)$$

Nota sobre convergencia en los extremos: En $t = 0$ (y $t = 2\pi$, que es el mismo punto por periodicidad):

$$S(0) = \frac{f(0^+) + f(2\pi^-)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi$$

La serie converge a π , no a $f(0) = 0$. Coherente: el termino constante es π y todos los senos valen 0 en $t = 0$.

1.11.13 10.12 Tipo 12: Convergencia en puntos de discontinuidad

Qué buscar PRIMERO: localizar los puntos donde f tiene saltos y calcular los límites laterales.

Fórmula clave:

$$S(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

donde $f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$ y $f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$.

Truco: si t_0 es un extremo del intervalo de definición, hay que usar la **periodicidad** para encontrar los límites laterales. Si f esta definida en $[-\pi, \pi]$, entonces $f(\pi^+) = f(-\pi^+)$ (el limite por la derecha en π es el mismo que el limite por la derecha en $-\pi$, por periodicidad).

Ejercicio resuelto: Onda cuadrada $f(t) = 1$ para $0 < t < \pi$, $f(t) = -1$ para $-\pi < t < 0$. Periodo 2π .

Paso 0: Simetría. $f(-t) = -f(t) \rightarrow$ **impar** $\rightarrow$ solo senos, $a_n = 0$.

Paso 1: Calcular b_n

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi$$

Evalutando:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right] = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

Para n par: $b_n = 0$. Para n impar: $b_n = \frac{4}{n\pi}$.

Serie:

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right)$$

Analisis de convergencia en distintos puntos:

En $t = 0$ (discontinuidad):

Limites laterales: $f(0^+) = 1$, $f(0^-) = -1$

$$S(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

Verificacion directa: todos los terminos $\sin(n \cdot 0) = 0$, asi que la serie da 0. Coherente.

En $t = \pi/2$ (punto de continuidad):

$$S(\pi/2) = f(\pi/2) = 1$$

Sustituyendo en la serie: $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(3\pi/2) = -1$, $\sin(5\pi/2) = 1$, $\sin(7\pi/2) = -1$, ...

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

Despejando:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}} \quad (\text{serie de Leibniz})$$

En $t = \pi$ (extremo del intervalo, discontinuidad por periodicidad):

Para encontrar los limites laterales, usamos la periodicidad:

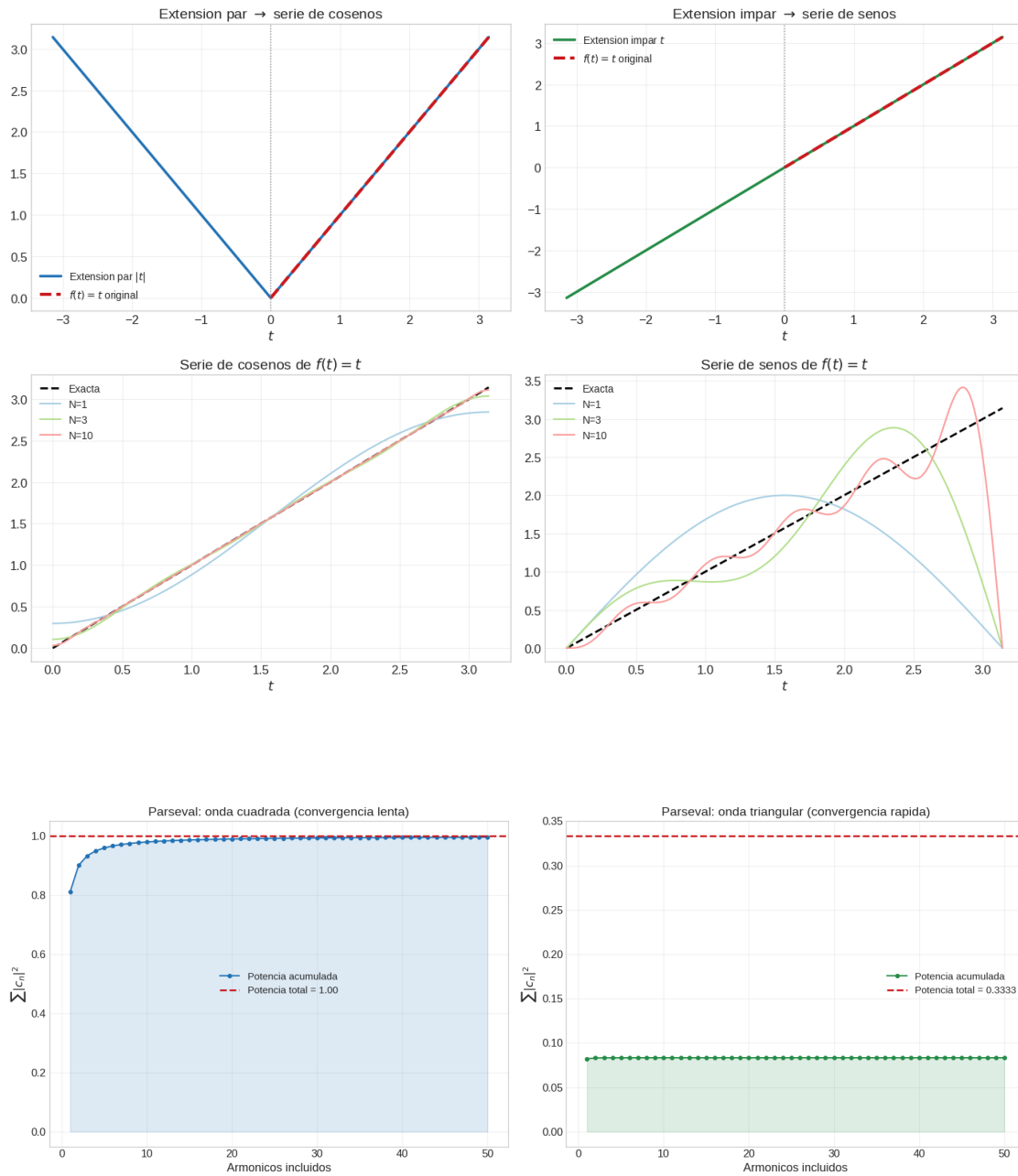
- $f(\pi^-) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} f(t) = 1$ (nos acercamos por la izquierda dentro de $(0, \pi)$)
- $f(\pi^+) = f(-\pi^+) = \lim_{t \rightarrow -\pi^+} f(t) = -1$ (por periodicidad, acercarse a π por la derecha equivale a acercarse a $-\pi$ por la derecha, donde $f = -1$)

$$S(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

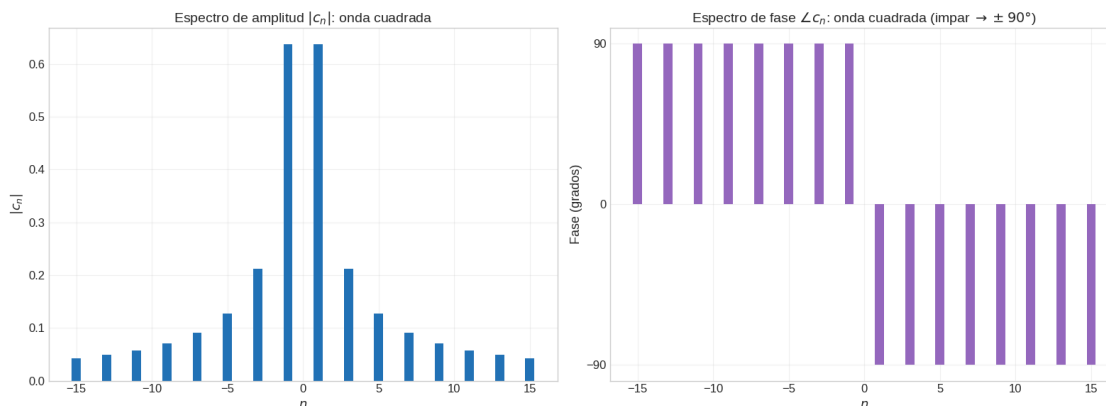
Verificacion directa: $\sin(n\pi) = 0$ para todo entero n , asi que la serie da 0. Coherente.

Resumen visual del fenomeno de Gibbs: En las cercanias de cada discontinuidad, la serie de Fourier presenta oscilaciones que sobrepasan el valor de la funcion en aproximadamente un 9% del tamano del salto. Este sobreimpulso NO desaparece al tomar mas terminos; solo se hace mas estrecho.

Tipos 4 y 5: Extension par (cosenos) vs impar (senos) de $f(t) = t$ en $[0, \pi]$



1.12 11. Espectros: amplitud y fase



Observación clave: para la onda cuadrada (función real e impar): - $|c_n| = |c_{-n}|$ (simetría conjugada, pues f es real) - $\angle c_n = -90^\circ$ para $n > 0$ y $\angle c_n = +90^\circ$ para $n < 0$ (pues f es impar $\rightarrow c_n$ puramente imaginario) - Solo aparecen armónicos impares (simetría de media onda)

1.13 12. Resumen de fórmulas y tabla de reconocimiento rápido

1.13.1 12.1 Fórmulas principales

Fórmula	Uso
$a_0 = \frac{2}{T} \int f dt$	Valor medio $\times 2$
$a_n = \frac{2}{T} \int f \cos(n\omega t) dt$	Coficiente coseno
$b_n = \frac{2}{T} \int f \sin(n\omega t) dt$	Coficiente seno
$c_n = \frac{1}{T} \int f e^{-jn\omega t} dt$	Coficiente complejo
$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$	Relación complejo-trigonométrico
$\frac{1}{T} \int f ^2 dt = \sum c_n ^2$	Parseval
$S(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$	Convergencia en discontinuidad

1.13.2 12.2 Cheat sheet de reconocimiento de patrones

Observación	Conclusión	Ahorro
$f(-t) = f(t)$	$b_n = 0$	No calcular senos
$f(-t) = -f(t)$	$a_0 = a_n = 0$	No calcular cosenos
$f(t + T/2) = -f(t)$	$c_{2k} = 0$	Solo armónicos impares
Par + media onda	Solo a_n con n impar	Máximo ahorro
Impar + media onda	Solo b_n con n impar	Máximo ahorro
“Serie de senos en $[0, L]$ ”	Extensión impar	Solo calcular b_n
“Serie de cosenos en $[0, L]$ ”	Extensión par	Solo calcular a_n

Observación	Conclusión	Ahorro
f continua	$ c_n \sim 1/n^2$	Pocas parciales bastan
f con saltos	$ c_n \sim 1/n$	Muchas parciales necesarias
Identidad trigonométrica obvia	Simplificar primero	Quizás no hay que integrar

1.13.3 12.3 Tabla de series clásicas

Función	Serie	Coefficientes no nulos
Onda cuadrada	$\frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}$	b_{impar}
Diente de sierra	$2 \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$	Todos los b_n
Onda triangular	$\frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin(nt)$ (n impar)	b_{impar}
t^2 en $[-\pi, \pi]$	$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$	Todos los a_n
$ \sin t $	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$	a_{par}
e^t en $[-\pi, \pi]$	$\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum \frac{(-1)^n}{1+n^2} [\cos(nt) + n \sin(nt)]$	Todos a_n, b_n

1.13.4 12.4 Sumas clásicas obtenidas por Fourier/Parseval

Suma	Valor	Obtenida de
$\sum \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$	$\frac{\pi}{4}$	Onda cuadrada en $t = \pi/2$
$\sum \frac{1}{n^2}$	$\frac{\pi^2}{6}$	Parseval de $f = t$ o evaluación de t^2
$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$	$\frac{\pi^2}{12}$	t^2 evaluada en $t = 0$
$\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$	$\frac{\pi^2}{8}$	Parseval de onda cuadrada
$\sum \frac{1}{n^4}$	$\frac{\pi^4}{90}$	Parseval de $f = t^2$
$\sum \frac{1}{(2n-1)^4}$	$\frac{\pi^4}{96}$	Parseval de onda triangular

1.14 13. Metodología de resolución paso a paso

Ante cualquier problema de series de Fourier, seguir este algoritmo:

1. **Identificar el intervalo y el periodo.** $[-\pi, \pi]$, $[0, L]$, $[-L, L]$, $[0, 2\pi]$...
2. **Determinar el tipo de serie pedido:** completa, solo senos, solo cosenos, compleja.
3. **Analizar simetrías** (tabla de patrones): par, impar, media onda. **Esto es lo MÁS importante.**
4. **Simplificar** con identidades trigonométricas si es posible.
5. **Calcular los coeficientes no nulos** (solo los que la simetría no anula).

6. **Verificar:** evaluar la serie en un punto conocido (ej. $t = 0$) y comprobar coherencia.
7. **Si piden convergencia en un punto:** usar $\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$.
8. **Si piden sumar una serie numérica:** usar Parseval o evaluación puntual.

Error frecuente n.1: Calcular a_n y b_n de una función par (los b_n son cero, tiempo perdido).

Error frecuente n.2: Olvidar que en los extremos de la extensión impar la serie converge a 0, no al valor de f .

Error frecuente n.3: Confundir $\omega = 2\pi/T$ con $\omega = \pi/L$. En $[-L, L]$ el periodo es $2L$ y $\omega = \pi/L$.