

04_ecuaciones_derivadas_parciales

June 19, 2026

1 Lección 5 - Ecuaciones en Derivadas Parciales

Ampliación de Matemáticas - GIERM

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Comprender la clasificación de las tres EDPs fundamentales: onda, calor y Laplace
- Resolver problemas de valores propios de Sturm-Liouville con distintas condiciones de contorno
- Aplicar separación de variables a la ecuación de onda y obtener la solución de Bernoulli
- Resolver la ecuación de calor y entender la diferencia con la de onda (decaimiento vs. oscilación)
- Manejar condiciones de contorno no homogéneas mediante descomposición en estado estacionario
- Conocer la fórmula de D'Alembert para la ecuación de onda

Configuración lista.

1.2 1. Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

Una **ecuación en derivadas parciales (EDP)** es una ecuación diferencial que involucra una función de **varias variables independientes** y sus derivadas parciales. A diferencia de las EDOs (una sola variable independiente), las EDPs modelan fenómenos que dependen del **espacio** y del **tiempo** simultáneamente.

1.2.1 Variables y condiciones

- **Variables independientes:** típicamente x (espacio) y t (tiempo)
- **Condiciones de contorno (CC):** impuestas en los extremos espaciales del dominio ($x = 0$, $x = L$)
- **Condiciones iniciales (CI):** impuestas en $t = 0$ (estado del sistema al inicio)

1.2.2 Las tres EDPs fundamentales

EDP	Ecuación	Fenómeno	Comportamiento
Ecuación de onda	$u_{tt} = c^2 u_{xx}$	Cuerda vibrante, sonido	Oscilación periódica
Ecuación de calor	$u_t = \kappa u_{xx}$	Difusión térmica	Decaimiento exponencial
Ecuación de Laplace	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	Estado estacionario, electrostática	Equilibrio (sin evolución temporal)

Clave: la ecuación de onda tiene derivada **segunda** en t (oscilación), la de calor tiene derivada **primera** en t (decaimiento irreversible).

1.2.3 Método general: Separación de variables

El método consiste en proponer $u(x, t) = v(x) \cdot z(t)$ y sustituir en la EDP. Esto genera: 1. Un **problema de valores propios** en x (ecuación de Sturm-Liouville) $\rightarrow$ determina las autofunciones 2. Una **EDO** en $t \rightarrow$ se resuelve una vez conocidos los valores propios

1.3 2. Problemas de valores propios (Sturm-Liouville)

El problema fundamental que aparece en la separación de variables es:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

con distintas **condiciones de contorno**. Los valores de λ para los que existe solución no trivial se llaman **valores propios** y las soluciones correspondientes son las **autofunciones** (o funciones propias).

1.3.1 2.1 Condiciones de Dirichlet: $v(0) = 0, v(L) = 0$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1.3.2 2.2 Condiciones de Neumann: $v'(0) = 0, v'(L) = 0$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad v_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nota: el caso $n = 0$ ($\lambda_0 = 0, v_0 = 1$) es válido.

1.3.3 2.3 Mixtas tipo I: $v(0) = 0, v'(L) = 0$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}, \quad v_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1.3.4 2.4 Mixtas tipo II: $v'(0) = 0, v(L) = 0$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \quad v_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

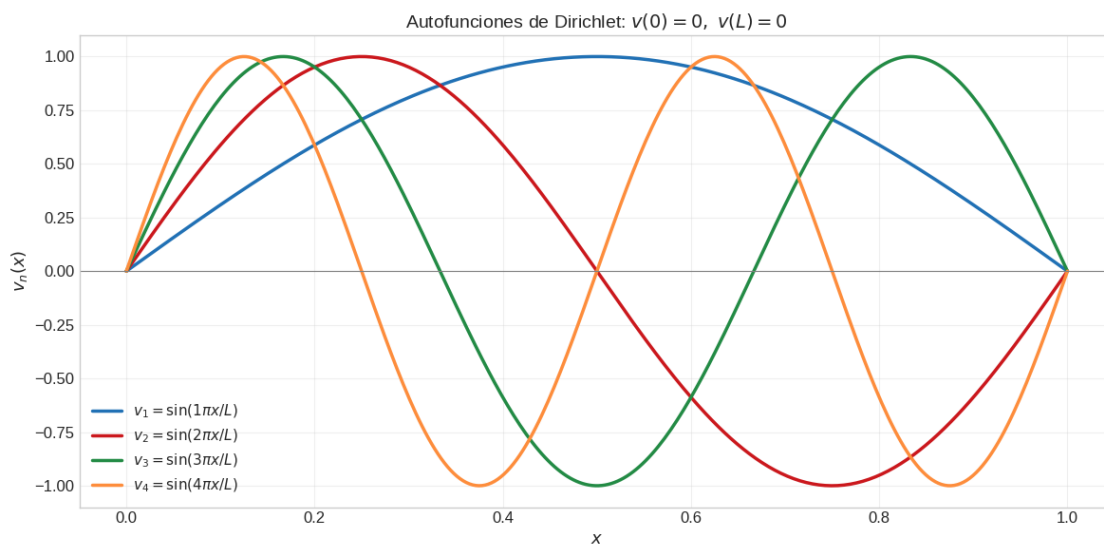
1.3.5 2.5 Condiciones periódicas: $v(0) = v(L), v'(0) = v'(L)$

$$\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{L^2}, \quad v_n(x) = \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cada valor propio ($n \geq 1$) tiene **multiplicidad 2** (seno y coseno).

1.3.6 Tabla resumen

Tipo CC	λ_n	$v_n(x)$	n empieza en
Dirichlet-Dirichlet	$\frac{n^2\pi^2}{L^2}$	$\sin(n\pi x/L)$	$n = 1$
Neumann-Neumann	$\frac{n^2\pi^2}{L^2}$	$\cos(n\pi x/L)$	$n = 0$
Dirichlet-Neumann	$\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$	$\sin((2n+1)\pi x/(2L))$	$n = 0$
Neumann-Dirichlet	$\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$	$\cos((2n+1)\pi x/(2L))$	$n = 0$



1.4 3. Ecuación de onda

1.4.1 3.1 Planteamiento

La ecuación de onda modela la vibración de una cuerda tensa de longitud L :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

donde $c > 0$ es la **velocidad de propagación** de la onda.

Condiciones de contorno (extremos fijos):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (\text{desplazamiento inicial}), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (\text{velocidad inicial})$$

1.4.2 3.2 Separación de variables

Se propone $u(x, t) = v(x) \cdot z(t)$. Sustituyendo en la EDP:

$$v(x) z''(t) = c^2 v''(x) z(t) \implies \frac{z''(t)}{c^2 z(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

Esto genera **dos EDOs**:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0 \quad (\text{Sturm-Liouville})$$

$$z''(t) + \lambda c^2 z(t) = 0 \quad (\text{oscilador armónico})$$

Con CC de Dirichlet: $\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2$, $v_n = \sin(n\pi x / L)$.

La EDO temporal: $z''_n + (n\pi c / L)^2 z_n = 0 \implies z_n(t) = a_n \sin(n\pi ct / L) + b_n \cos(n\pi ct / L)$.

1.4.3 3.3 Solución de Bernoulli

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

Donde los coeficientes se determinan por las condiciones iniciales:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{coeficientes de Fourier seno de } f)$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

1.4.4 3.4 Caso especial: $g(x) = 0$ (sin velocidad inicial)

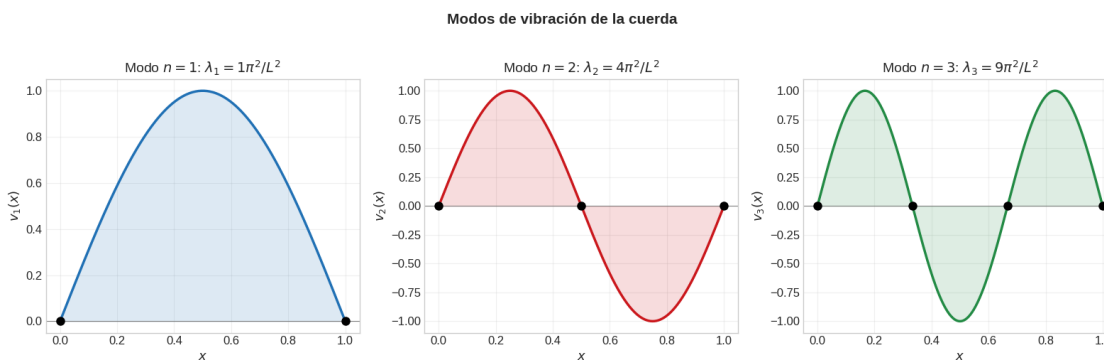
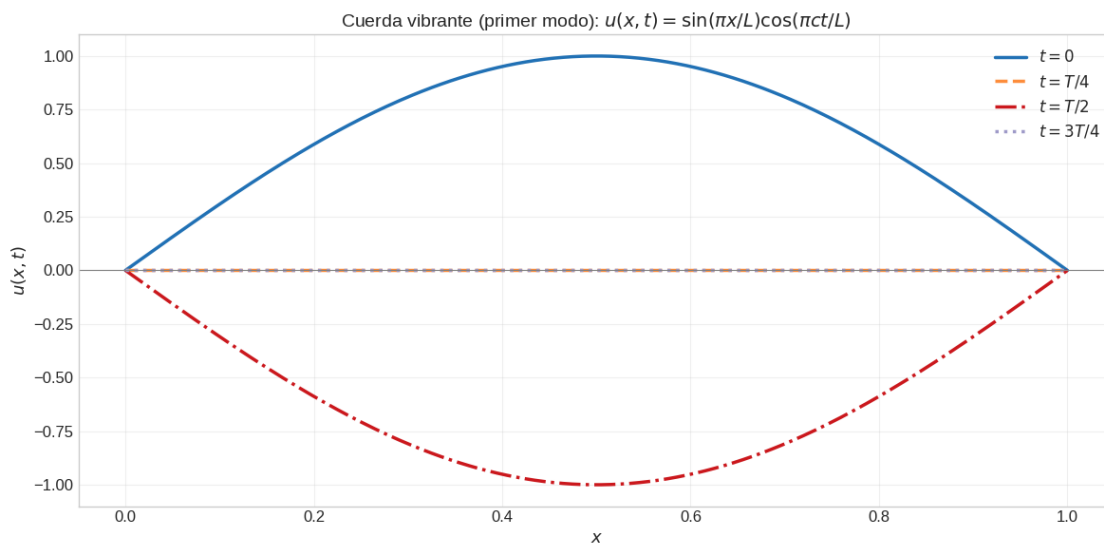
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

1.4.5 3.5 Solución de D'Alembert

Forma alternativa para la ecuación de onda en dominio infinito o extensiones:

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

donde φ y ψ son las **extensiones impares y $2L$ -periódicas** de funciones determinadas por f y g : - Si $g = 0$: $\varphi(s) = \psi(s) = \tilde{f}(s)/2$ donde $\tilde{f}$ es la extensión impar $2L$ -periódica de f - $u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct)]$



1.5 4. Ecuación de calor

1.5.1 4.1 Planteamiento

La ecuación de calor modela la difusión térmica en una barra de longitud L :

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

donde $\kappa > 0$ es la **difusividad térmica**.

Condiciones de contorno (extremos a temperatura cero):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Condición inicial: $u(x, 0) = f(x)$.

1.5.2 4.2 Separación de variables

Con $u(x, t) = v(x) \cdot z(t)$:

$$v(x) z'(t) = \kappa v''(x) z(t) \implies \frac{z'(t)}{\kappa z(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

Problema espacial (Sturm-Liouville): $v'' + \lambda v = 0$ con Dirichlet $\rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2$, $v_n = \sin(n\pi x / L)$.

Problema temporal: $z'(t) + \lambda_n \kappa z(t) = 0 \implies z_n(t) = e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$.

1.5.3 4.3 Solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

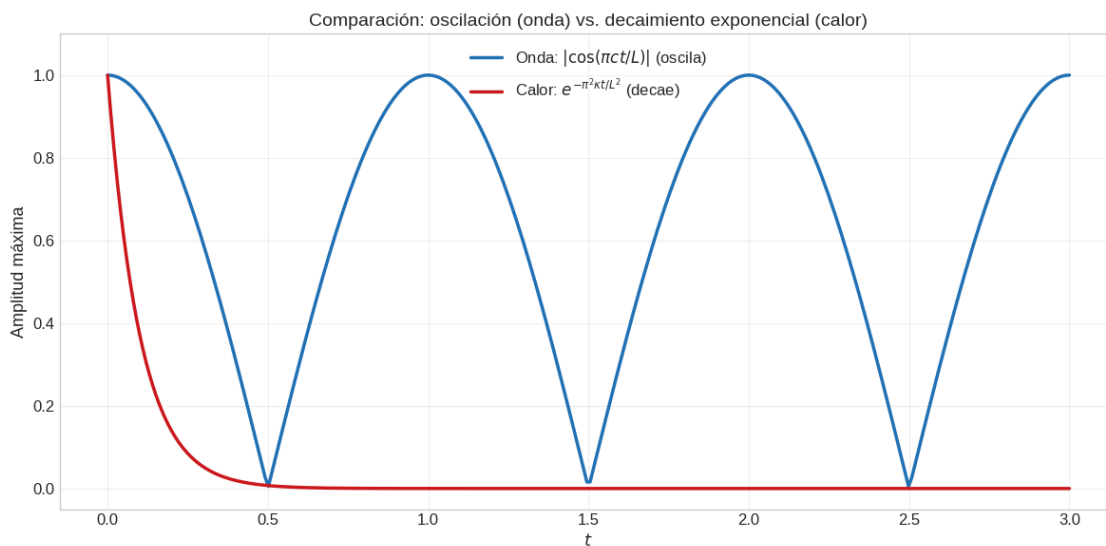
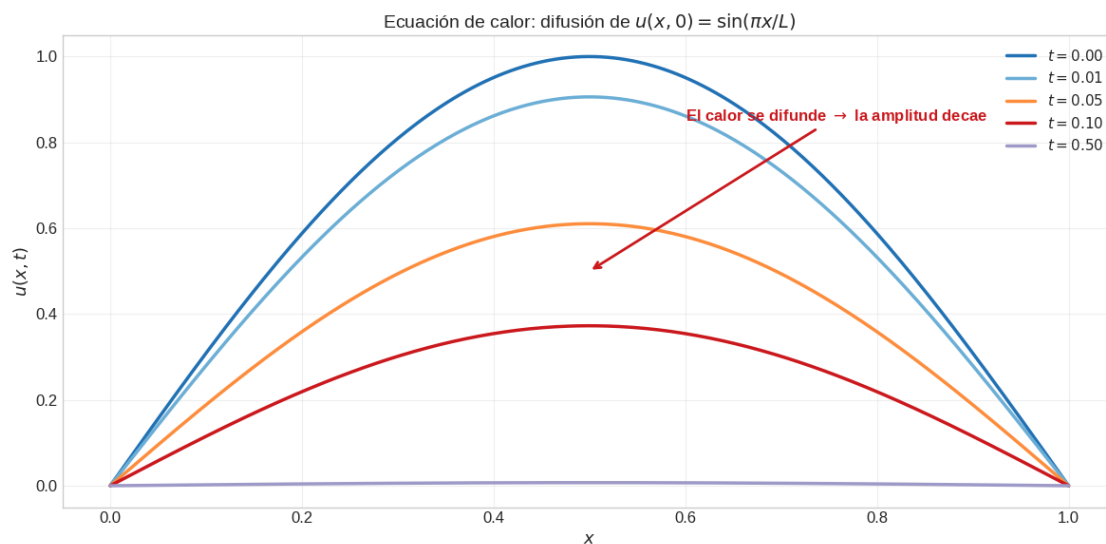
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

1.5.4 4.4 Diferencia fundamental: calor vs. onda

Aspecto	Ecuación de onda	Ecuación de calor
Derivada en t	u_{tt} (segunda)	u_t (primera)
Factor temporal	$\sin, \cos \rightarrow$ oscilación	$e^{-\alpha t} \rightarrow$ decaimiento
Largo plazo	Vibra indefinidamente	Tiende a estado estacionario
Reversibilidad	Reversible en t	Irreversible

1.5.5 4.5 Estado estacionario ($t \rightarrow \infty$)

- Con CC homogéneas ($u(0, t) = u(L, t) = 0$): $u \rightarrow 0$ (toda la barra a temperatura cero)
- Con CC no homogéneas ($u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$): $u \rightarrow v(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$ (perfil lineal)



1.6 5. Ecuación de calor con condiciones de contorno no homogéneas

1.6.1 Planteamiento

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, \quad u(x, 0) = f(x)$$

Las CC no son cero, así que **no se puede aplicar directamente** la separación de variables.

1.6.2 Método: descomposición en estado estacionario + transitorio

Se escribe $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$ donde:

1. Estado estacionario $v(x)$: satisface $v'' = 0$ con $v(0) = T_1$, $v(L) = T_2$.

$$v(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

2. Transitorio $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$: satisface la ecuación de calor con CC **homogéneas**:

$$w_t = \kappa w_{xx}, \quad w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0$$

$$w(x, 0) = f(x) - v(x) \quad (\text{condición inicial modificada})$$

3. Solución del transitorio (serie de Fourier seno):

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

4. Solución completa:

$$u(x, t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

Error frecuente: olvidar restar $v(x)$ de la condición inicial al calcular b_n .

1.7 6. Ejercicios resueltos

1.7.1 6.1 Ecuación de onda: desplazamiento inicial triangular

Ejercicio resuelto: Onda con $f(x) = x(L - x)$, $g = 0$ **Datos:** $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 \leq x \leq L$, $u(0, t) = u(L, t) = 0$, $u(x, 0) = x(L - x)$, $u_t(x, 0) = 0$.

Paso 1: Como $g = 0$, tenemos $a_n = 0$ para todo n . La solución es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)$$

Paso 2: Calcular b_n :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Integrando por partes dos veces (o usando la tabla de integrales):

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{4L^3}{n^3\pi^3} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} \frac{8L^2}{n^3\pi^3} & \text{si } n \text{ impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Paso 3: Solución final:

$$u(x, t) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi ct}{L}\right)$$

Observación: los coeficientes decaen como $1/n^3$, por lo que la serie converge rápidamente.

1.7.2 6.2 Ecuación de onda: velocidad inicial

Ejercicio resuelto: Onda con $f = 0$, $g(x) = 1$ **Datos:** $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 \leq x \leq L$, $u(0, t) = u(L, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 1$.

Paso 1: Como $f = 0$, tenemos $b_n = 0$ para todo n . La solución es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Paso 2: Calcular a_n :

$$a_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{n\pi c} \cdot \frac{L}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4L}{n^2\pi^2 c} & \text{si } n \text{ impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Paso 3: Solución final:

$$u(x, t) = \frac{4L}{\pi^2 c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi ct}{L}\right)$$

1.7.3 6.3 Solución de D'Alembert

Ejercicio resuelto: $u_{tt} = 4u_{xx}$, $L = 2$, $f(x) = x(2 - x)$, $g = 0$ **Datos:** $c^2 = 4 \implies c = 2$, $L = 2$, $u(0, t) = u(2, t) = 0$, $f(x) = x(2 - x)$, $g = 0$.

Paso 1: Con D'Alembert y $g = 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x + 2t) + \tilde{f}(x - 2t)]$$

donde $\tilde{f}$ es la extensión impar 4-periódica de f .

Paso 2: La extensión impar ($2L = 4$ -periódica): - En $[0, 2]$: $\tilde{f}(s) = s(2 - s)$ - En $[-2, 0]$: $\tilde{f}(s) = -(-s)(2 - (-s)) = s(2 + s)$ - Periódica con periodo 4

Paso 3: Evaluar en $t = 3/4$: $-x + ct = x + 3/2$ - $x - ct = x - 3/2$

Para $x \in [0, 2]$: $-x + 3/2 \in [3/2, 7/2]$: reducir módulo 4 y aplicar extensión impar - $x - 3/2 \in [-3/2, 1/2]$: usar extensión impar

Paso 4: Evaluar en $t = 1$: $-x + 2 \in [2, 4]$: $\tilde{f}(x + 2) = -\tilde{f}(4 - (x + 2)) = -(2 - x)(x) = -x(2 - x)$

(ya que $\tilde{f}$ es impar y 4-periódica, $\tilde{f}(s + 4) = \tilde{f}(s)$ y $\tilde{f}(4 - s) = \tilde{f}(-s) = -\tilde{f}(s)$)

- $x - 2 \in [-2, 0]$: $\tilde{f}(x - 2) = -(2 - x)(x) = -x(2 - x)$

$$u(x, 1) = \frac{1}{2}[-x(2 - x) + (-x(2 - x))] = -x(2 - x)$$

$$u(x, 1) = -x(2 - x)$$

Interpretación: en $t = 1 = T/2$, la cuerda ha completado medio periodo y está invertida respecto a la posición inicial.

1.7.4 6.4 Ecuación de calor directa

Ejercicio resuelto: $u_t = u_{xx}$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = \sin(x) + 3\sin(2x)$ **Datos:** $\kappa = 1$, $L = \pi$.

Paso 1: La condición inicial ya está en la base de autofunciones $\{\sin(nx)\}$:

$$u(x, 0) = 1 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \sin(2x)$$

Luego $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_n = 0$ para $n \geq 3$.

Paso 2: Con $L = \pi$, $\kappa = 1$: $\lambda_n = n^2$, y la solución es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

Paso 3: Solución:

$$u(x, t) = \sin(x) e^{-t} + 3 \sin(2x) e^{-4t}$$

Observación: el segundo modo ($n = 2$) decae **4 veces más rápido** que el primero (e^{-4t} vs e^{-t}). Los modos altos desaparecen antes $\rightarrow$ la distribución se “suaviza”.

1.7.5 6.5 Calor con condiciones no homogéneas

Ejercicio resuelto: $u_t = u_{xx}$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 100$, $u(x, 0) = 50x$ **Datos:** $\kappa = 1$, $L = 1$, $T_1 = 0$, $T_2 = 100$.

Paso 1: Estado estacionario:

$$v(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x = 100x$$

Paso 2: Condición inicial modificada:

$$w(x, 0) = f(x) - v(x) = 50x - 100x = -50x$$

Paso 3: Coeficientes b_n del transitorio:

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (-50x) \sin(n\pi x) dx = -100 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx$$

Integrando por partes:

$$\int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \left[-\frac{x \cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$b_n = -100 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{100(-1)^n}{n\pi}$$

Paso 4: Solución completa:

$$u(x, t) = 100x + \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

Verificación: en $t \rightarrow \infty$, $u(x, \infty) = 100x = v(x)$ (estado estacionario lineal). En $t = 0$, $u(x, 0) = 100x + \frac{100}{\pi} \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi x) = 100x - 50x = 50x \checkmark$

1.8 7. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

1.8.1 Tabla resumen

#	Tipo	Ecuación clave	Método
1	Problema de valores propios	$v'' + \lambda v = 0 + \text{CC}$	Sturm-Liouville
2	Onda con $g = 0$	$u = \sum b_n \sin \cos$	Series de Fourier seno de f
3	Onda con $f = 0$	$u = \sum a_n \sin \sin$	Integrar g para a_n
4	Onda con f y g	Solución completa Bernoulli	Ambos conjuntos de coeficientes
5	D'Alembert	$u = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$	Extensión impar periódica
6	Calor con Dirichlet homogéneo	$u = \sum b_n \sin \cdot e^{-\alpha t}$	Series seno + decaimiento
7	Calor con Neumann	$u = \sum b_n \cos \cdot e^{-\alpha t}$	Series coseno + decaimiento
8	Calor con CC no homogéneas	$u = v(x) + w(x, t)$	Descomposición estacionario
9	Estado estacionario	$u_{xx} = 0 \rightarrow u = ax + b$	EDO segundo orden
10	Identificar tipo de EDP	Clasificar por derivadas	Orden de ∂_t

1.8.2 7.1 Tipo 1: Problema de valores propios

Dado $v'' + \lambda v = 0$ con condiciones de contorno, encontrar λ_n y $v_n(x)$.

$$v(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (\text{para } \lambda > 0)$$

Metodología: 1. Escribir la solución general (considerar $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$) 2. Aplicar la primera CC $\rightarrow$ eliminar una constante 3. Aplicar la segunda CC $\rightarrow$ obtener la ecuación para λ 4. Los valores de λ que dan solución no trivial son los **valores propios**

Insight clave: solo $\lambda > 0$ da solución no trivial para CC de Dirichlet y Neumann. Para CC periódicas, $\lambda = 0$ también es válido.

Ejercicio resuelto: $v'' + \lambda v = 0$, $v(0) = 0$, $v(3) = 0$ **Paso 1:** Solución general ($\lambda > 0$): $v = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$

Paso 2: $v(0) = 0$: $A = 0 \Rightarrow v = B \sin(\sqrt{\lambda}x)$

Paso 3: $v(3) = 0$: $B \sin(3\sqrt{\lambda}) = 0$. Para $B \neq 0$: $3\sqrt{\lambda} = n\pi$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{9}, \quad v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1.8.3 7.2 Tipo 2: Onda con desplazamiento inicial ($g = 0$)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Metodología: 1. Identificar que $g = 0 \Rightarrow$ todos los $a_n = 0$ 2. Calcular b_n como coeficientes de Fourier seno de $f(x)$ 3. Si f ya es una combinación de senos, leer directamente los b_n 4. Si no, integrar por partes

Insight clave: la solución es f “vibrando” $\rightarrow$ cada modo $\sin(n\pi x/L)$ oscila con frecuencia $n\pi c/L$.

Ejercicio resuelto: $u_{tt} = 9u_{xx}$, $L = 2$, $f(x) = 5 \sin(3\pi x/2)$, $g = 0$ **Paso 1:** $c = 3$, $L = 2$. La condición inicial es exactamente $b_3 \cdot \sin(3\pi x/2) \Rightarrow b_3 = 5$, resto $b_n = 0$.

Paso 2: Solución directa (un solo término):

$$u(x, t) = 5 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{9\pi t}{2}\right)$$

Truco para el examen: si $f(x)$ ya es un seno de la forma $\sin(n\pi x/L)$, la solución es inmediata sin calcular integrales.

1.8.4 7.3 Tipo 3: Onda con velocidad inicial ($f = 0$)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Metodología: 1. Identificar que $f = 0 \Rightarrow$ todos los $b_n = 0$ 2. Calcular a_n (ojo: lleva el factor $\frac{2}{n\pi c}$, no $\frac{2}{L}$) 3. El factor temporal es sin (no cos), porque la cuerda parte de reposo

Error frecuente: confundir la fórmula de a_n con la de b_n . En a_n aparece $n\pi c$ en el denominador.

Ejercicio resuelto: $u_{tt} = 4u_{xx}$, $L = \pi$, $f = 0$, $g(x) = \sin(x)$ **Paso 1:** $c = 2$, $L = \pi$. Como $g(x) = \sin(x) = \sin(1 \cdot \pi x/\pi) \rightarrow g$ ya es $\sin(n\pi x/L)$ con $n = 1$.

Paso 2: $a_1 = \frac{2}{1 \cdot \pi \cdot 2} \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

Resto: $a_n = 0$ para $n \geq 2$.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sin(x) \sin(2t)$$

1.8.5 7.4 Tipo 4: Onda con f y g (caso general)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

Metodología: 1. Calcular b_n a partir de $f(x)$ (coeficientes de Fourier seno) 2. Calcular a_n a partir de $g(x)$ (con factor $2/(n\pi c)$) 3. Escribir la solución completa

Ejercicio resuelto: $u_{tt} = u_{xx}$, $L = 1$, $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = \sin(2\pi x)$ **Paso 1:** $c = 1$, $L = 1$.

$b_1 = 1$, resto $b_n = 0$ (lectura directa de f).

Paso 2: $a_2 = \frac{2}{2\pi \cdot 1} \int_0^1 \sin^2(2\pi x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2\pi}$

Resto $a_n = 0$.

Paso 3:

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \sin(2\pi t)$$

1.8.6 7.5 Tipo 5: Solución de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds$$

donde $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son extensiones **impares** y $2L$ -**periódicas**.

Metodología: 1. Construir la extensión impar de f : $\tilde{f}(-x) = -f(x)$ 2. Extender con periodo $2L$: $\tilde{f}(x + 2L) = \tilde{f}(x)$ 3. Evaluar en los puntos $x \pm ct$, reduciendo al intervalo $[-L, L]$ usando periodicidad 4. Si $g = 0$, usar solo $\frac{1}{2}[\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct)]$

Insight clave: la extensión impar convierte CC de Dirichlet en periodicidad natural.

Ejercicio resuelto: $u_{tt} = u_{xx}$, $L = 1$, $f(x) = x(1-x)$, $g = 0$. **Hallar** $u(1/2, 1)$. **Paso 1:** $c = 1$, $2L = 2$ -periódica impar.

$$u(1/2, 1) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(3/2) + \tilde{f}(-1/2)]$$

Paso 2: $\tilde{f}(3/2)$: como $3/2 \in [1, 2]$, por periodicidad $\tilde{f}(3/2) = \tilde{f}(3/2 - 2) = \tilde{f}(-1/2) = -f(1/2) = -1/4$

$$\tilde{f}(-1/2) = -f(1/2) = -1/4$$

Paso 3:

$$u(1/2, 1) = \frac{1}{2} (-1/4 - 1/4) = -\frac{1}{4}$$

1.8.7 7.6 Tipo 6: Calor con Dirichlet homogéneo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Metodología: 1. Identificar κ , L de la EDP y las CC 2. Calcular b_n como coeficientes de Fourier seno de $f(x)$ 3. Escribir la solución (cada modo decae como $e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$)

Insight clave: los modos altos (n grande) decaen **mucho más rápido** ($\propto e^{-n^2}$). Para t grande, solo importa el primer modo.

Ejercicio resuelto: $u_t = 3u_{xx}$, $L = 2$, $u(x, 0) = x$ **Paso 1:** $\kappa = 3$, $L = 2$.

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

Paso 2: Integración por partes:

$$b_n = \left[-\frac{2x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{4 \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Paso 3:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-3n^2 \pi^2 t / 4}$$

1.8.8 7.7 Tipo 7: Calor con Neumann ($u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$)

Con CC de Neumann (extremos aislados), las autofunciones son **cosenos**:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Insight clave: el término $a_0/2$ sobrevive para $t \rightarrow \infty \rightarrow$ la temperatura final es la **media** de la condición inicial: $u(x, \infty) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$.

Diferencia con Dirichlet: con Dirichlet $u \rightarrow 0$; con Neumann $u \rightarrow$ media (la energía se conserva porque los extremos están aislados).

Ejercicio resuelto: $u_t = u_{xx}$, $L = \pi$, $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = \cos(2x) + 4$ **Paso 1:** La condición inicial ya está en cosenos: $a_0/2 = 4 \rightarrow a_0 = 8$, $a_2 = 1$, resto $a_n = 0$.

Paso 2:

$$u(x, t) = 4 + \cos(2x) e^{-4t}$$

Para $t \rightarrow \infty$: $u \rightarrow 4$ (la temperatura media).

1.8.9 7.8 Tipo 8: Calor con CC no homogéneas (descomposición)

$$u(x, t) = \underbrace{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x}_{\text{estado estacionario } v(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \kappa t / L^2}}_{\text{transitorio } w(x, t)}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Metodología: 1. Encontrar $v(x)$ resolviendo $v'' = 0$ con $v(0) = T_1$, $v(L) = T_2$ 2. Calcular $w(x, 0) = f(x) - v(x)$ 3. Hallar b_n con la condición inicial modificada 4. Solución: $u = v + w$

Error frecuente: usar $f(x)$ directamente en vez de $f(x) - v(x)$ para los coeficientes.

Ejercicio resuelto: $u_t = 2u_{xx}$, $u(0, t) = 10$, $u(3, t) = 40$, $u(x, 0) = 10 + 10x + 5 \sin(\pi x/3)$ **Paso 1:** $v(x) = 10 + \frac{30}{3}x = 10 + 10x$

Paso 2: $w(x, 0) = (10 + 10x + 5 \sin(\pi x/3)) - (10 + 10x) = 5 \sin(\pi x/3)$

Paso 3: $b_1 = 5$ (lectura directa), resto $b_n = 0$.

$$u(x, t) = 10 + 10x + 5 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) e^{-2\pi^2 t/9}$$

1.8.10 7.9 Tipo 9: Estado estacionario de la ecuación de calor

El estado estacionario es la solución cuando $u_t = 0$:

$$u_{xx} = 0 \implies v(x) = Ax + B$$

Metodología: 1. Resolver $v'' = 0 \rightarrow v = Ax + B$ 2. Aplicar CC: $v(0) = T_1 \rightarrow B = T_1$; $v(L) = T_2 \rightarrow A = (T_2 - T_1)/L$

Insight clave: el perfil estacionario es siempre **lineal** en 1D. En 2D (Laplace) puede ser más complejo.

Ejercicio resuelto: barra con $u(0) = 20^\circ\text{C}$, $u(5) = 80^\circ\text{C}$

$$v(x) = 20 + \frac{80 - 20}{5}x = 20 + 12x$$

$$v(x) = 20 + 12x \quad (^\circ\text{C})$$

En $x = 2$: $v(2) = 20 + 24 = 44^\circ\text{C}$.

1.8.11 7.10 Tipo 10: Identificar tipo de EDP

Si la ecuación tiene...	Es...	Comportamiento
$u_{tt} = c^2 u_{xx}$	Onda	Oscilación, dos CI (f y g)
$u_t = \kappa u_{xx}$	Calor	Decaimiento, una CI (f)
$u_{xx} + u_{yy} = 0$	Laplace	Estacionario, solo CC
$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$	Viga	Modos de flexión

Metodología: 1. Contar el **orden de la derivada temporal**: $2 \rightarrow$ onda, $1 \rightarrow$ calor, $0 \rightarrow$ Laplace
 2. Verificar el signo: calor tiene signo positivo ($u_t = +\kappa u_{xx}$) 3. Identificar las condiciones: onda necesita f y g ; calor solo f

Ejercicio resuelto: Clasificar las siguientes EDPs

Ecuación	Tipo
$3u_{tt} = 7u_{xx}$	Onda ($c^2 = 7/3$)
$u_t = 5u_{xx}$	Calor ($\kappa = 5$)
$u_{xx} + u_{yy} = 0$	Laplace
$2u_{tt} - u_{xx} + 3u = 0$	Onda (con término fuente)
$u_t + u_{xxx} = 0$	KdV (tercer orden espacial, dispersión)

1.9 8. Resumen: ecuación de onda vs. ecuación de calor

Aspecto	Ecuación de onda	Ecuación de calor
EDP	$u_{tt} = c^2 u_{xx}$	$u_t = \kappa u_{xx}$
Derivada en t	Segunda	Primera
CI necesarias	$u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$	Solo $u(x, 0) = f(x)$
Factor temporal	$a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)$	$b_n e^{-\alpha_n t}$
(Dirichlet)		
Frecuencia/tasa	$\omega_n = n\pi c/L$	$\alpha_n = n^2 \pi^2 \kappa / L^2$
Comportamiento	Oscilación periódica	Decaimiento exponencial
$t \rightarrow \infty$	Sigue oscilando	$u \rightarrow$ estado estacionario

Aspecto	Ecuación de onda	Ecuación de calor
Reversibilidad	Sí (cambiar $t \rightarrow -t$)	No (irreversible)
D'Alembert	$\varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$	No aplica
Modos altos	Oscilan con mayor frecuencia	Decaen mucho más rápido

1.9.1 Fórmulas clave

Fórmula	Uso
$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$	Coefficientes de Fourier seno
$a_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$	Coefficientes de velocidad inicial (onda)
$v(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$	Estado estacionario (calor, 1D)
$u = \frac{1}{2} [\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct)]$	D'Alembert con $g = 0$