

Tema 11 - Filtros Activos

Electronica General - 2o GIERM

Contenido:

1. Introduccion y motivacion
 2. Filtros de primer orden (paso bajo, paso alto)
 3. Filtros de segundo orden: funcion de transferencia general
 4. Aproximacion Butterworth (maximally flat)
 5. Aproximacion Chebyshev (equiripple)
 6. Aproximacion Bessel (fase lineal)
 7. Topologia Sallen-Key
 8. Sensibilidad
 9. Comparacion de respuestas (Butterworth vs Chebyshev vs Bessel)
 10. Respuesta al escalon
 11. Seleccion del orden del filtro
 12. Ubicacion de polos en el plano s
 13. Ejercicios resueltos
 14. Catalogo de tipos de ejercicio
 15. Resumen y tabla de formulas clave
-

1. Introduccion y motivacion

Un **filtro activo** es un circuito que utiliza **amplificadores operacionales** (op-amps) junto con resistencias y condensadores para seleccionar frecuencias de una senal.

Ventajas frente a filtros pasivos (RC, RL, RLC):

- No requieren inductores (pesados, costosos y no ideales a bajas frecuencias)
- Proporcionan **ganancia** ($|H| > 1$)
- Alta impedancia de entrada, baja de salida
- Facil cascadeo sin efecto de carga

Tipos segun banda de paso:

Tipo	Deja pasar	Atenua
Paso bajo (LP)	$\omega < \omega_c$	$\omega > \omega_c$

Tipo	Deja pasar	Atenua
Paso alto (HP)	$\omega > \omega_c$	$\omega < \omega_c$
Paso banda (BP)	$\omega_1 < \omega < \omega_2$	Fuera de banda
Rechazo de banda (BS)	Fuera de banda	$\omega_1 < \omega < \omega_2$

2. Filtros de primer orden

2.1 Paso bajo de primer orden

Funcion de transferencia:

$$H(s) = \frac{H_0}{1 + s/\omega_c} = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_c}$$

donde H_0 es la ganancia DC y $\omega_c = 1/(RC)$ es la frecuencia de corte (-3 dB).

Propiedades:

- A $\omega = \omega_c$: $|H| = H_0/\sqrt{2}$ (caida de -3 dB)
- Pendiente de caida: **-20 dB/decada** (-6 dB/octava)
- Fase: de 0° a -90° , pasando por -45° en ω_c

2.2 Paso alto de primer orden

$$H(s) = \frac{H_0 \cdot s/\omega_c}{1 + s/\omega_c}$$

Pendiente de subida: **+20 dB/decada** en la banda de transicion.

3. Filtros de segundo orden: funcion de transferencia general

La forma estandar de un filtro paso bajo de segundo orden es:

$$H(s) = \frac{H_0 \cdot \omega_n^2}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2}$$

donde:

- ω_n = frecuencia natural (rad/s)

- Q = **factor de calidad** (quality factor)
- $\zeta = 1/(2Q)$ = factor de amortiguamiento

Relacion Q - respuesta:

Q	Comportamiento
$Q < 0.707$	Sobre-amortiguado (sin pico)
$Q = 0.707$	Butterworth (maximally flat)
$Q > 0.707$	Sub-amortiguado (pico de resonancia)
$Q \rightarrow \infty$	Oscilacion

El **pico de resonancia** ocurre en $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$ con ganancia:

$$|H(j\omega_p)| = \frac{H_0 Q}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}}$$

Pendiente de caída: **-40 dB/decada** (filtro de 2o orden).

4. Aproximacion Butterworth (Maximally Flat)

La respuesta en magnitud al cuadrado de un filtro Butterworth de orden n es:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Propiedades:

- **Maximally flat** en la banda de paso (todas las derivadas nulas en $\omega = 0$)
- Monotona en banda de paso y en banda de rechazo
- A $\omega = \omega_c$: siempre $|H| = -3$ dB independientemente del orden
- Pendiente asintotica: $-20n$ dB/decada
- Polos uniformemente espaciados en un semicirculo de radio ω_c en el semiplano izquierdo
- Para orden 2: $Q = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$

Ubicacion de polos (filtro paso bajo normalizado):

$$s_k = \omega_c \cdot e^{j\pi(2k+n-1)/(2n)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(Solo se toman los polos con parte real negativa)

5. Aproximacion Chebyshev (Equiripple)

La respuesta Chebyshev Tipo I:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$

donde $T_n(x)$ es el **polinomio de Chebyshev** de grado n y ε controla el rizado.

Propiedades:

- **Equiripple** en la banda de paso: el rizado oscila entre 1 y $1/(1 + \varepsilon^2)$
- Transicion mas rapida que Butterworth para el mismo orden
- Rizado maximo en banda de paso: $R_p = 10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2)$ dB
- Rizado tipico: 0.5 dB, 1 dB, 3 dB
- Peor respuesta de fase (mayor distorsion de grupo)

Polinomios de Chebyshev:

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = 2x^2 - 1$
- $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

Compromiso: Mayor pendiente en transicion $\Leftrightarrow$ Mayor rizado en banda de paso.

6. Aproximacion Bessel (Fase lineal)

El filtro Bessel optimiza la **fase lineal** (retardo de grupo constante) en la banda de paso.

$$H(s) = \frac{\theta_n(0)}{\theta_n(s/\omega_0)}$$

donde $\theta_n(s)$ son los **polinomios de Bessel inversos**.

Propiedades:

- **Retardo de grupo** practicamente constante en la banda de paso
- Respuesta al escalon sin sobre-pico (overshoot)

- Transición más suave (la más lenta de las tres aproximaciones)
- Ideal para señales con información en el dominio temporal

Comparación de las tres aproximaciones (para el mismo orden):

Propiedad	Butterworth	Chebyshev	Bessel
Planitud en banda de paso	Maxima	Rizado	Buena
Pendiente de transición	Media	La mejor	La peor
Linealidad de fase	Buena	Mala	La mejor
Overshoot en escalón	Moderado	Alto	Mínimo

7. Topología Sallen-Key

La topología **Sallen-Key** (también llamada VCVS - Voltage Controlled Voltage Source) es la topología más popular para filtros activos de 2º orden.

7.1 Sallen-Key paso bajo

Componentes: R_1 , R_2 , C_1 , C_2 + op-amp en configuración de ganancia unitaria (o con ganancia K).

Función de transferencia (ganancia unitaria, $K=1$):

$$H(s) = \frac{1/(R_1 R_2 C_1 C_2)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Parámetros:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 C_1 + R_2 C_1} = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{C_1 (R_1 + R_2)}$$

7.2 Caso simplificado: $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$

$$\omega_n = \frac{1}{RC}, \quad Q = \frac{1}{2}$$

Este $Q = 0.5$ es demasiado bajo para Butterworth ($Q_{Butt} = 0.707$). Para lograr Butterworth se necesita ganancia $K = 3 - 1/Q = 1.586$.

8. Sensibilidad

La **sensibilidad** mide como varia un parametro del filtro ante variaciones de un componente:

$$S_x^P = \frac{x}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln x}$$

Interpretacion: si $S_{R_1}^{\omega_n} = -0.5$, un incremento del 1% en R_1 produce una disminucion del 0.5% en ω_n .

Sensibilidades del Sallen-Key paso bajo (K=1):

Parametro	S_{R_1}	S_{R_2}	S_{C_1}	S_{C_2}
ω_n	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$
Q	Depende de valores	Depende de valores	Depende de valores	Depende de valores

Regla practica: Las sensibilidades del Sallen-Key son tipicamente ≤ 1 en magnitud, lo cual lo hace una topologia robusta.

Para el caso $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$:

$$S_R^{\omega_n} = -\frac{1}{2}, \quad S_C^{\omega_n} = -\frac{1}{2}$$
$$S_R^Q = 0, \quad S_C^Q = 0$$

(Q no depende de los valores absolutos cuando todos son iguales)

9. Comparacion de respuestas: Butterworth vs Chebyshev vs Bessel

Resumen visual de las tres aproximaciones mas utilizadas con las mismas especificaciones.

10. Respuesta al escalon

La respuesta al escalon revela el comportamiento temporal del filtro, incluyendo:

- **Tiempo de subida** (t_r): tiempo para pasar del 10% al 90%
- **Sobre-pico** (overshoot): exceso sobre el valor final

- **Tiempo de establecimiento** (t_s): tiempo para entrar en la banda del 2%
-

11. Selecccion del orden del filtro

Dado un conjunto de especificaciones:

- Frecuencia de corte f_c (-3 dB)
- Atenuacion minima A_{min} (dB) a frecuencia f_s (stopband)

El orden minimo requerido para Butterworth es:

$$n \geq \frac{\log\left(10^{A_{min}/10} - 1\right)}{2 \log(f_s/f_c)}$$

Para Chebyshev Tipo I:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{A_{min}/10}-1}{\varepsilon^2}}\right)}{\cosh^{-1}(f_s/f_c)}$$

12. Ubicacion de polos en el plano s

Los polos determinan la estabilidad y comportamiento del filtro. Para un filtro estable, todos los polos deben estar en el **semiplano izquierdo** ($\text{Re}(s) < 0$).

Patrones de polos:

- **Butterworth**: polos sobre un semicirculo de radio ω_c , uniformemente espaciados
 - **Chebyshev**: polos sobre una elipse (parte real comprimida)
 - **Bessel**: polos distribuidos de forma no uniforme, mas a la izquierda
-

13. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1: Diseno de filtro Butterworth

Enunciado: Diseñar un filtro paso bajo Butterworth con:

- $f_c = 1$ kHz (frecuencia de corte -3 dB)
- Atenuacion minima: 40 dB a 4 kHz

Determinar: (a) orden minimo, (b) funcion de transferencia, (c) respuesta en frecuencia.

Ejercicio 2: Sallen-Key Butterworth

Enunciado: Diseñar un filtro Sallen-Key paso bajo de 2o orden tipo Butterworth con $f_c = 5$ kHz.

Elegir $C_1 = C_2 = C = 10$ nF. Determinar R_1, R_2 y verificar Q.

Ejercicio 3: Chebyshev vs Butterworth - Comparacion de orden

Enunciado: Se requiere un filtro LP con:

- $f_c = 2$ kHz
- Atenuacion ≥ 50 dB a $f_s = 6$ kHz

Comparar el orden necesario para Butterworth y Chebyshev (1 dB rizado).

Ejercicio 4: Filtro paso banda con cascada LP + HP

Enunciado: Diseñar un filtro paso banda con:

- Frecuencia central: $f_0 = 1$ kHz
- Ancho de banda: $BW = 200$ Hz
- $Q = f_0/BW = 5$

Implementar como cascada de LP + HP de 2o orden.

14. Catalogo de tipos de ejercicio

Referencia rapida de los tipos de problemas mas comunes en el tema de filtros activos.

Tipo 1: Calculo del orden minimo (Butterworth)

Datos: f_c, f_s, A_{min}

Formula: $n \geq \frac{\log(10^{A_{min}/10} - 1)}{2 \log(f_s/f_c)}$, redondear hacia arriba.

Tipo 2: Calculo del orden minimo (Chebyshev)

Datos: f_c, f_s, A_{min}, R_p (rizado)

Formula: $\varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1}$, luego $n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{(10^{A_{min}/10} - 1)/\varepsilon^2}}{\cosh^{-1}(f_s/f_c)}$

Tipo 3: Diseno Sallen-Key LP

Datos: f_c y tipo de aproximacion (Butterworth/Chebyshev)

Procedimiento:

1. Fijar C (o R) con valor comercial
 2. Calcular $R = 1/(\omega_c C)$ si $R_1 = R_2$
 3. Ajustar ganancia K o ratio C_2/C_1 para obtener Q deseado
 4. Para Butterworth: $K = 3 - 1/Q = 1.586$
-

Tipo 4: Analisis de sensibilidad

Datos: Circuito Sallen-Key con valores de componentes

Procedimiento:

1. Calcular $S_x^{\omega_n}$ y S_x^Q para cada componente
 2. Estimar variacion: $\Delta P/P \approx S_x^P \cdot \Delta x/x$
-

Tipo 5: Paso banda / Rechazo de banda

Datos: f_0, BW (o Q), atenuacion requerida

Procedimiento:

1. Calcular frecuencias de corte: $f_L = f_0 - BW/2, f_H = f_0 + BW/2$
 2. Diseñar LP en f_H y HP en f_L
 3. Cascadear ambos filtros
 4. Para rechazo de banda: LP(f_L) + HP(f_H) en paralelo y sumar
-

15. Resumen y tabla de formulas clave