

02_descripcion_sistemas

June 19, 2026

1 Tema 2 - Descripción de Sistemas Dinámicos

Fundamentos de Control - GIERM

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Obtener el modelo matemático (EDO) de sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos y térmicos a partir de leyes físicas
- Linealizar ecuaciones diferenciales no lineales alrededor de un punto de equilibrio
- Obtener la función de transferencia $G(s)$ de un sistema a partir de su EDO linealizada
- Interpretar y reducir diagramas de bloques usando las reglas de álgebra de bloques
- Relacionar la respuesta temporal de un sistema con su función de transferencia
- Clasificar y resolver los tipos de problemas más frecuentes en exámenes

Configuración lista.

1.2 1. Introducción: ¿Qué es un modelo matemático?

Un **modelo matemático** es una descripción del comportamiento dinámico de un sistema físico mediante ecuaciones diferenciales. El objetivo es predecir cómo evoluciona la salida $y(t)$ ante una entrada $u(t)$.

El procedimiento general es:

1. **Identificar las variables:** entrada $u(t)$, salida $y(t)$, variables de estado
2. **Aplicar leyes físicas** (Newton, Kirchhoff, balances de masa/energía) para obtener la **EDO**
3. **Linealizar** si la EDO es no lineal
4. **Aplicar Laplace** para obtener la **función de transferencia** $G(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

donde $Y(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de Laplace de la salida y la entrada, respectivamente, con condiciones iniciales nulas.

1.3 2. Modelado físico de sistemas

1.3.1 2.1 Sistema mecánico traslacional (2ª Ley de Newton)

La ley fundamental es $\sum F = m \cdot a$. Para un sistema **masa-resorte-amortiguador**:

- **Masa** m : fuerza de inercia $F_m = m\ddot{x}$
- **Amortiguador** b : fuerza de fricción viscosa $F_b = b\dot{x}$
- **Resorte** k : fuerza elástica $F_k = kx$
- **Entrada**: fuerza externa $F(t)$

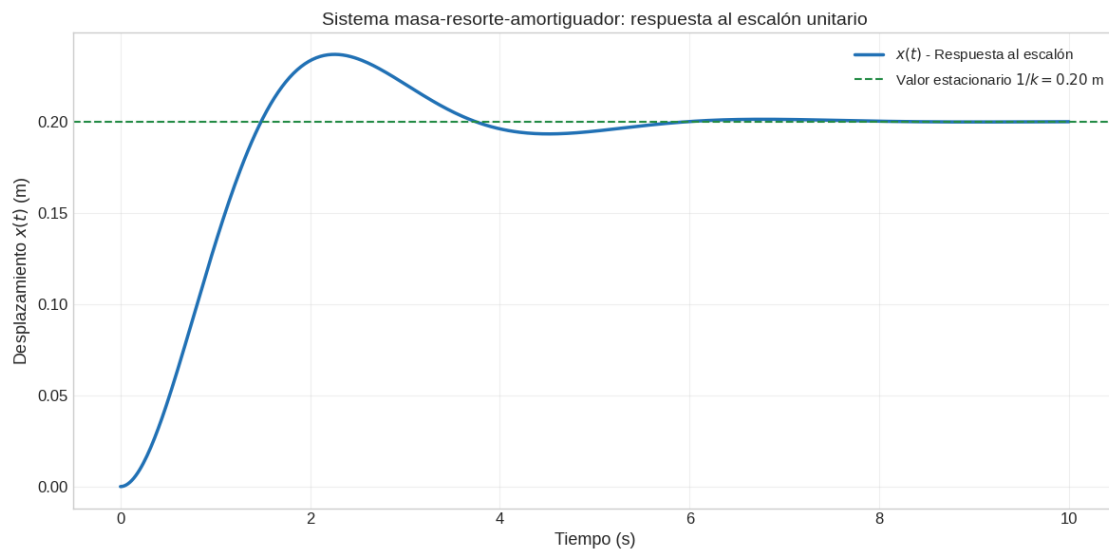
Aplicando Newton ($\sum F = ma$) con $x(t)$ como desplazamiento desde el equilibrio:

$$F(t) - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Ejemplo: $m = 2$ kg, $b = 3$ N·s/m, $k = 5$ N/m

$$2\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x = F(t)$$



1.3.2 2.2 Sistema eléctrico (Leyes de Kirchhoff)

Para circuitos eléctricos se aplican las **leyes de Kirchhoff**:

- **LKV** (ley de tensiones): la suma de caídas de tensión en un lazo cerrado es cero
- **LKC** (ley de corrientes): la suma de corrientes en un nodo es cero

Componentes y sus relaciones v - i :

Componente	Relación	Energía
Resistencia R	$v_R = R \cdot i$	Disipa
Inductancia L	$v_L = L \frac{di}{dt}$	Almacena (campo magnético)
Condensador C	$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$	Almacena (campo eléctrico)

Ejemplo: Circuito RLC serie con entrada $v_{in}(t)$ y salida $v_C(t)$:

Aplicando LKV al lazo:

$$v_{in}(t) = v_R + v_L + v_C = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + v_C$$

Como $i = C \frac{dv_C}{dt}$, sustituimos:

$$v_{in} = RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C$$

$$\boxed{LC \ddot{v}_C(t) + RC \dot{v}_C(t) + v_C(t) = v_{in}(t)}$$

Ejemplo numérico: $R = 10 \, \Omega$, $L = 0.5 \, \text{H}$, $C = 0.01 \, \text{F}$

$$0.005 \ddot{v}_C + 0.1 \dot{v}_C + v_C = v_{in}(t)$$

1.3.3 2.3 Sistema hidráulico (Balance de masa)

Para un **tanque** de sección transversal A , con caudal de entrada $q_{in}(t)$ y caudal de salida $q_{out}(t)$, la variable de estado es el nivel $h(t)$.

Ley de conservación de masa (líquido incompresible):

$$A \frac{dh}{dt} = q_{in}(t) - q_{out}(t)$$

Si la salida es por una válvula con resistencia hidráulica R_h :

$$q_{out} = \frac{h}{R_h}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{AR_h \frac{dh}{dt} + h(t) = R_h \cdot q_{in}(t)}$$

Esta es una EDO de **primer orden** (sistema de un tanque). La constante de tiempo es $\tau = AR_h$.

Caso no lineal: Si la salida es por un orificio (ley de Torricelli):

$$q_{out} = c\sqrt{h} \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh}{dt} = q_{in} - c\sqrt{h}$$

Esta EDO es **no lineal** debido al término $\sqrt{h}$ y necesitará **linealización**.

1.3.4 Resumen de leyes físicas por dominio

Dominio	Ley fundamental	Variables de flujo	Variables de esfuerzo
Mecánico traslacional	Newton: $F = ma$	Velocidad v	Fuerza F
Mecánico rotacional	Newton: $T = I\alpha$	Velocidad angular ω	Par T
Eléctrico	Kirchhoff: LKV + LKC	Corriente i	Tensión v
Hidráulico	Balance de masa	Caudal q	Presión / nivel h
Térmico	Balance de energía	Flujo de calor q	Temperatura T

1.3.5 2.4 Sistema térmico (Balance de energía)

Para un cuerpo de masa m , calor específico c_p y temperatura $T(t)$, sometido a una fuente de calor $q_{in}(t)$ y pérdidas por convección:

Balance de energía:

$$mc_p \frac{dT}{dt} = q_{in}(t) - \frac{T - T_{amb}}{R_t}$$

donde R_t es la **resistencia térmica** (K/W) y T_{amb} la temperatura ambiente.

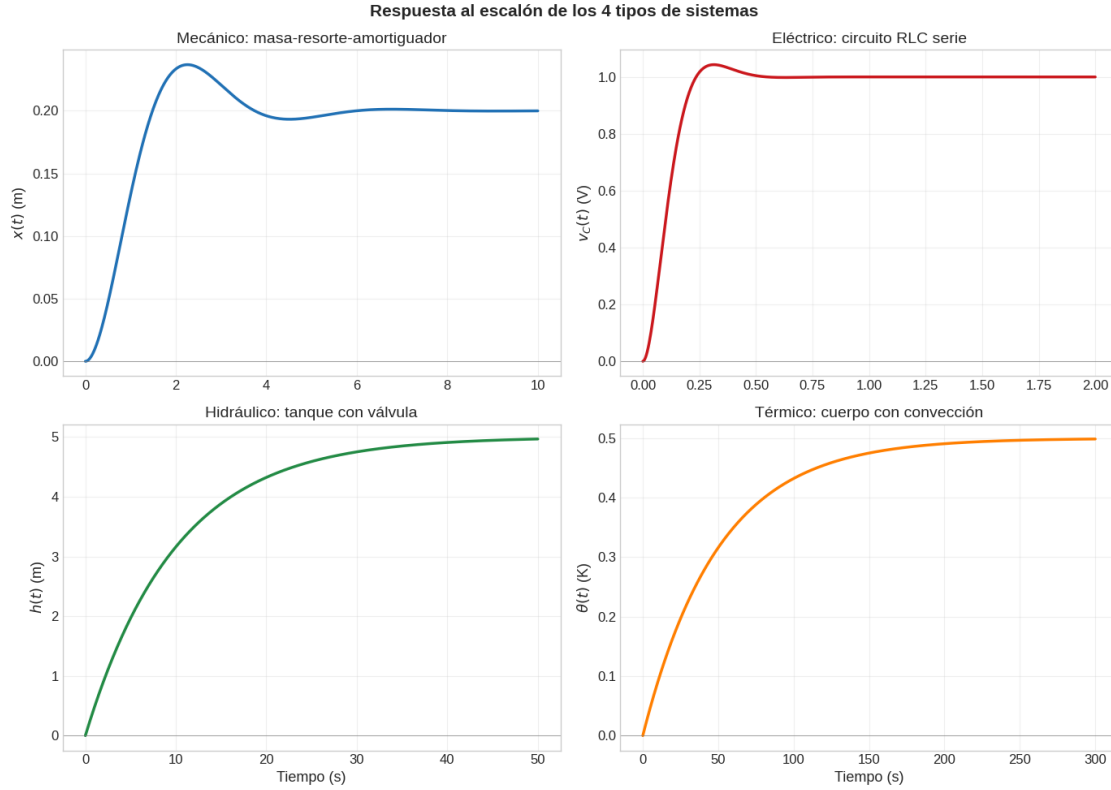
Definiendo $\theta(t) = T(t) - T_{amb}$ (incremento de temperatura):

$$mc_p R_t \frac{d\theta}{dt} + \theta(t) = R_t \cdot q_{in}(t)$$

Nuevamente un sistema de **primer orden** con constante de tiempo $\tau = mc_p R_t$.

Analogía eléctrica:

Térmico	Eléctrico
Temperatura T	Tensión v
Flujo de calor q	Corriente i
Capacidad térmica $C_t = mc_p$	Capacitancia C
Resistencia térmica R_t	Resistencia R



1.4 3. Linealización alrededor del punto de equilibrio

1.4.1 3.1 Concepto general

Muchos sistemas reales son **no lineales**. Para poder aplicar la transformada de Laplace y obtener funciones de transferencia, necesitamos **linealizar** la EDO alrededor de un **punto de equilibrio** (también llamado punto de operación).

Procedimiento general de linealización:

1. Escribir la EDO no lineal: $\dot{x} = f(x, u)$
2. Encontrar el **punto de equilibrio** (x_{eq}, u_{eq}) donde $f(x_{eq}, u_{eq}) = 0$
3. Definir **variables incrementales**: $\delta x = x - x_{eq}$, $\delta u = u - u_{eq}$
4. Expandir en **serie de Taylor** y quedarse con los términos lineales:

$$\delta \dot{x} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{eq} \delta u$$

1.4.2 3.2 Ejemplo completo: Péndulo con fricción

Consideremos un péndulo de momento de inercia I , fricción viscosa B , masa m , longitud l y par externo T :

$$I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = T$$

Paso 1: Punto de equilibrio. En equilibrio $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$:

$$mgl \sin(\varphi_{eq}) = T_{eq} \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_{eq}) = \frac{T_{eq}}{mgl}$$

Paso 2: Desarrollo de Taylor de $\sin(\varphi)$ alrededor de φ_{eq} :

$$\sin(\varphi) \approx \sin(\varphi_{eq}) + \cos(\varphi_{eq}) \cdot (\varphi - \varphi_{eq})$$

Paso 3: Variables incrementales. Definimos $\delta\varphi = \varphi - \varphi_{eq}$ y $\delta T = T - T_{eq}$:

$$I\delta\ddot{\varphi} + B\delta\dot{\varphi} + mgl [\sin(\varphi_{eq}) + \cos(\varphi_{eq}) \cdot \delta\varphi] = T_{eq} + \delta T$$

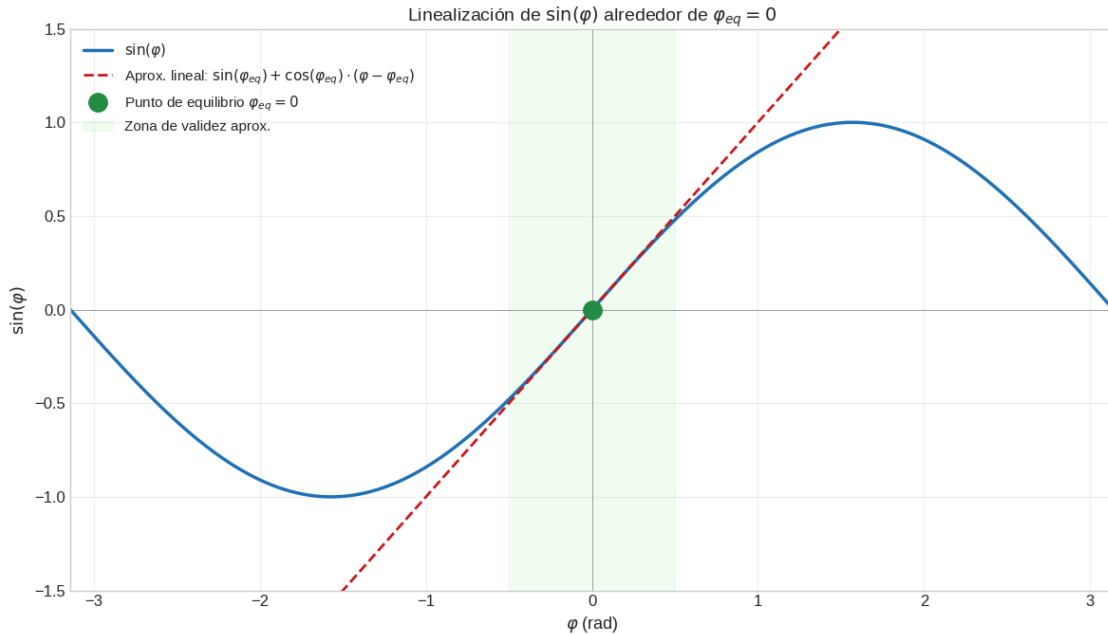
Como $mgl \sin(\varphi_{eq}) = T_{eq}$, estos términos se cancelan:

$$I\delta\ddot{\varphi} + B\delta\dot{\varphi} + mgl \cos(\varphi_{eq}) \cdot \delta\varphi = \delta T$$

Caso particular: para $\varphi_{eq} = 0$ (posición vertical inferior), $T_{eq} = 0$:

$$I\delta\ddot{\varphi} + B\delta\dot{\varphi} + mgl \cdot \delta\varphi = \delta T$$

ya que $\cos(0) = 1$. Esto es una EDO lineal de 2º orden idéntica en estructura al sistema masa-resorte-amortiguador.



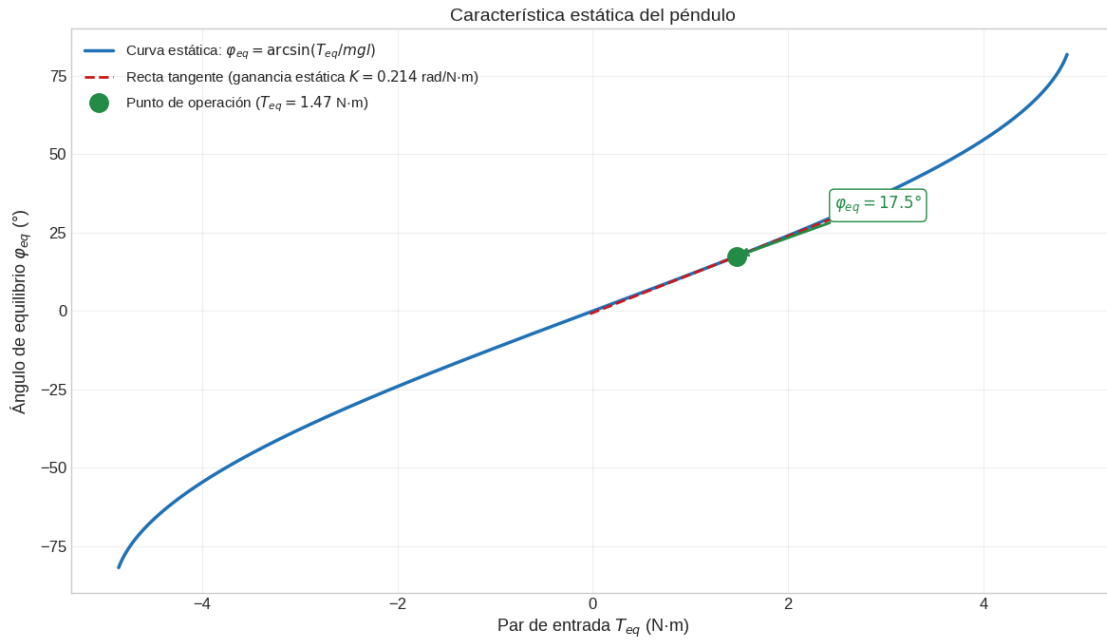
1.5 4. Característica estática

La **característica estática** relaciona la salida en régimen permanente Y_{eq} con la entrada en régimen permanente U_{eq} . Se obtiene igualando a cero todas las derivadas en la EDO.

Para el péndulo: $mg l \sin(\varphi_{eq}) = T_{eq}$

$$\varphi_{eq} = \arcsin\left(\frac{T_{eq}}{mg l}\right)$$

Esta relación $\varphi_{eq}(T_{eq})$ es la **curva estática**. La pendiente de esta curva en un punto de operación da la **ganancia estática** del sistema linealizado.



1.6 5. Función de transferencia $G(s)$

1.6.1 5.1 Definición y obtención

La **función de transferencia** se obtiene aplicando la transformada de Laplace a la EDO linealizada con **condiciones iniciales nulas**:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Recordatorio de propiedades de Laplace:

Dominio temporal	Dominio de Laplace
$y(t)$	$Y(s)$
$\dot{y}(t)$	$sY(s)$
$\ddot{y}(t)$	$s^2Y(s)$
$y^{(n)}(t)$	$s^nY(s)$

1.6.2 5.2 Ejemplo: Circuito RLC serie

Partimos de la EDO del circuito RLC (sección 2.2):

$$LC\ddot{v}_C + RC\dot{v}_C + v_C = v_{in}$$

Paso 1: Aplicar Laplace (c.i. nulas):

$$LCs^2V_C(s) + RCsV_C(s) + V_C(s) = V_{in}(s)$$

Paso 2: Factorizar $V_C(s)$:

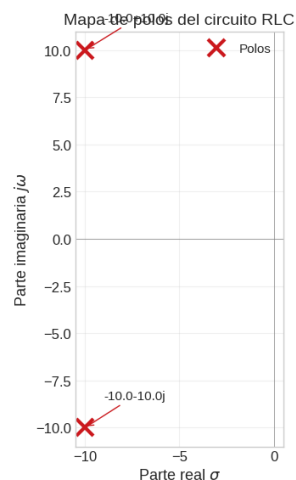
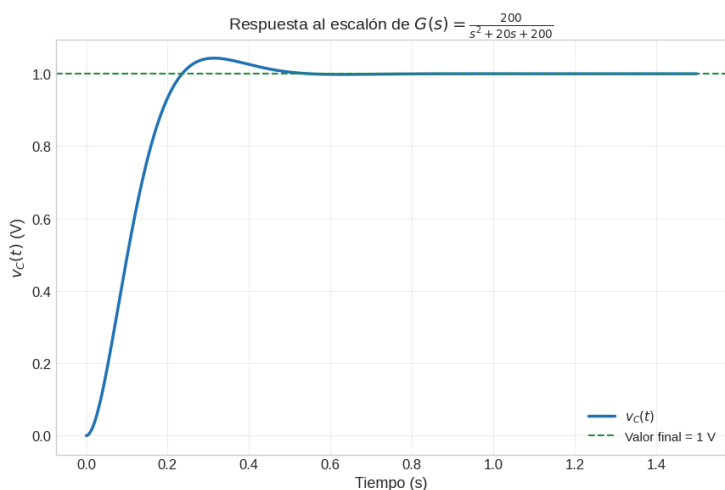
$$V_C(s) [LCs^2 + RCs + 1] = V_{in}(s)$$

Paso 3: Despejar la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Con valores numéricos ($R = 10 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 0.01 \text{ F}$):

$$G(s) = \frac{1}{0.005s^2 + 0.1s + 1} = \frac{200}{s^2 + 20s + 200}$$



1.6.3 5.4 Metodología: de la EDO a la función de transferencia

Pasos para obtener $G(s)$ desde un sistema físico:

1. **Identificar** entrada $u(t)$ y salida $y(t)$
2. **Aplicar leyes físicas** para obtener la EDO
3. Si la EDO es **no lineal**: linealizar alrededor de (y_{eq}, u_{eq})
4. **Sustituir** cada derivada por la potencia correspondiente de s :
 - $y \rightarrow Y(s)$, $\dot{y} \rightarrow sY(s)$, $\ddot{y} \rightarrow s^2Y(s)$
5. **Agrupar** $Y(s)$ a un lado y $U(s)$ al otro
6. **Despejar** $G(s) = Y(s)/U(s)$
7. **Verificar**: calcular $G(0)$ (ganancia estática) y comprobar que los polos tienen parte real negativa (estabilidad)

1.6.4 5.3 Función de transferencia del péndulo linealizado

Partiendo de la EDO linealizada ($\varphi_{eq} = 0$):

$$I\delta\ddot{\varphi} + B\delta\dot{\varphi} + mgl \cdot \delta\varphi = \delta T$$

Aplicando Laplace:

$$Is^2\Phi(s) + Bs\Phi(s) + mgl\Phi(s) = \Delta T(s)$$

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{\Delta T(s)} = \frac{1}{Is^2 + Bs + mgl}$$

Con valores numéricos: $I = 0.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $B = 0.2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$, $m = 1 \text{ kg}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $l = 0.5 \text{ m}$:

$$G(s) = \frac{1}{0.5s^2 + 0.2s + 4.905} = \frac{2}{s^2 + 0.4s + 9.81}$$

1.6.5 6.3 Reglas adicionales: mover puntos de bifurcación y sumadores

Al reducir diagramas complejos, a veces es necesario **mover** puntos de bifurcación o sumadores:

Operación	Compensación necesaria
Mover bifurcación antes de un bloque G	Añadir bloque G en la rama movida
Mover bifurcación después de un bloque G	Añadir bloque $1/G$ en la rama movida
Mover sumador antes de un bloque G	Añadir bloque G en la rama movida
Mover sumador después de un bloque G	Añadir bloque $1/G$ en la rama movida

Error frecuente: olvidar la compensación al mover elementos $\rightarrow$ resultado incorrecto.

1.7 6. Diagramas de bloques

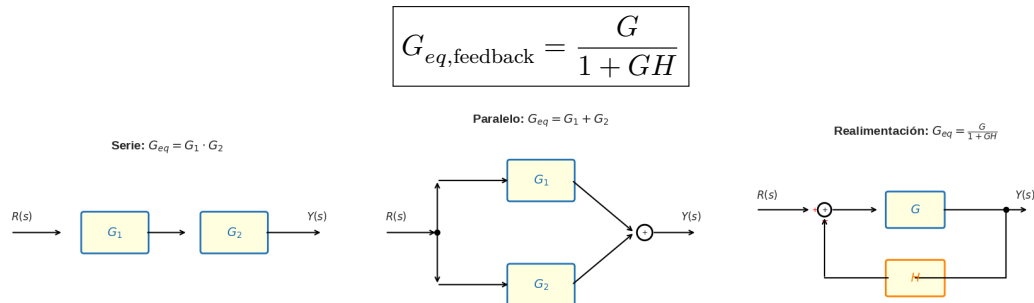
1.7.1 6.1 Elementos básicos

Un diagrama de bloques representa gráficamente las relaciones entre las variables de un sistema de control:

- **Bloque:** operación de transferencia $G(s)$
- **Sumador:** punto de suma/resta de señales ($\oplus/\ominus$)
- **Bifurcación:** punto donde una señal se divide en dos caminos

1.7.2 6.2 Reglas de reducción

Configuración	Diagrama	Equivalente
Serie	$R \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow Y$	$G_{eq} = G_1 \cdot G_2$
Paralelo	$R \rightarrow G_1 + G_2 \rightarrow Y$	$G_{eq} = G_1 + G_2$
Realimentación negativa	Lazo con G directa y H retorno	$G_{eq} = \frac{G}{1 + GH}$
Realimentación positiva	Lazo con G directa y H retorno	$G_{eq} = \frac{G}{1 - GH}$
Realimentación unitaria	$H = 1$	$G_{eq} = \frac{G}{1 + G}$



1.7.3 6.3 Ejemplo: Reducción de un diagrama complejo (5 bloques)

Consideremos el siguiente sistema con 5 bloques:

- Camino directo: $R(s) \rightarrow \text{Sumador} \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow Y(s)$
- Realimentación interna: de la salida de G_2 a través de H_1 al sumador entre G_1 y G_2
- Realimentación externa: de $Y(s)$ a través de H_2 al sumador de entrada

Paso 1: Reducir el lazo interno (G_2 con H_1):

$$G_{int} = \frac{G_2}{1 + G_2 H_1}$$

Paso 2: Combinar serie G_1 , G_{int} y G_3 :

$$G_{dir} = G_1 \cdot G_{int} \cdot G_3 = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1}$$

Paso 3: Cerrar el lazo externo con H_2 :

$$G_{eq} = \frac{G_{dir}}{1 + G_{dir} H_2} = \frac{\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_3 H_2}{1 + G_2 H_1}}$$

$$G_{eq} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

Verificación numérica: con $G_1 = \frac{2}{s+1}$, $G_2 = \frac{1}{s+3}$, $G_3 = \frac{5}{s+2}$, $H_1 = 0.5$, $H_2 = 1$:

$$G_{eq}(s) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 5}{(s+1)(s+3)(s+2) + 0.5(s+1)(s+2) + 10}$$

Diagrama original (5 bloques)

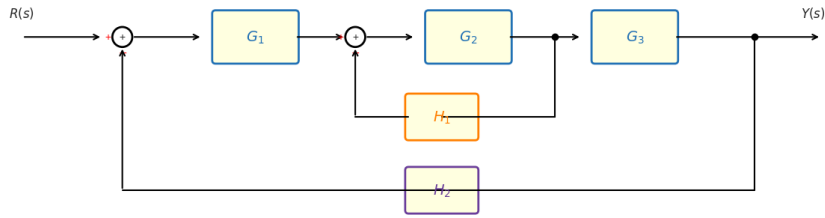
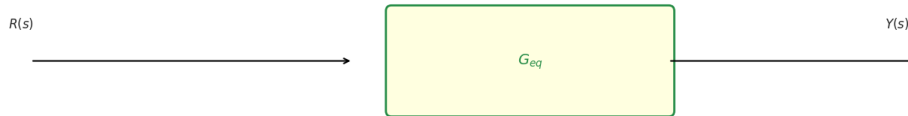
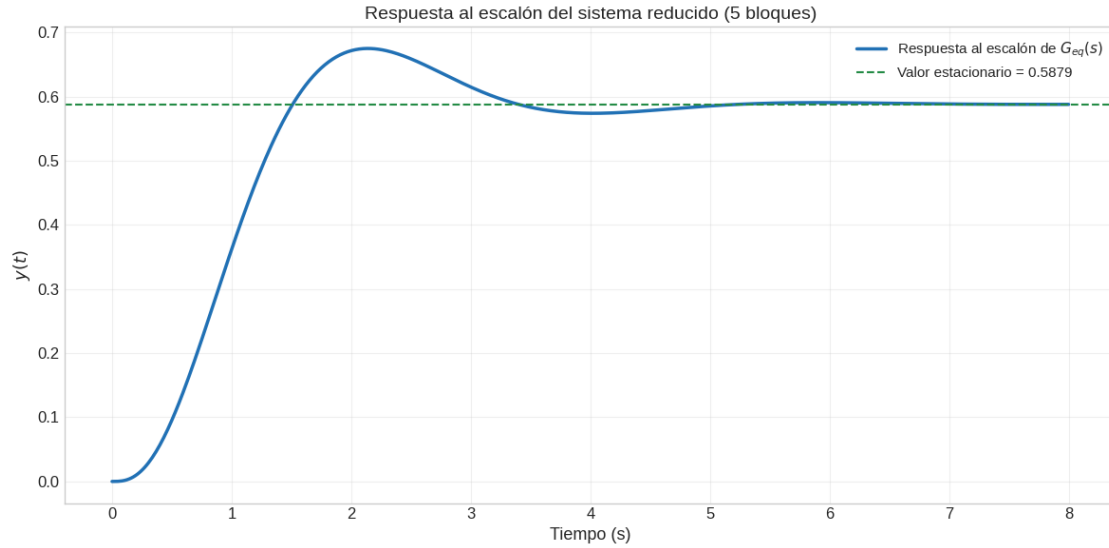


Diagrama reducido: $G_{eq} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$





1.8 7. Ejercicios resueltos

1.8.1 7.1 Ejercicio resuelto: Masa-resorte-amortiguador → EDO → FT

Ejercicio resuelto: Sistema mecánico Datos: $m = 1$ kg, $b = 4$ N·s/m, $k = 3$ N/m. Entrada: fuerza $F(t)$. Salida: desplazamiento $x(t)$.

Paso 1: Aplicar 2ª Ley de Newton:

$$F(t) - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

$$1 \cdot \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = F(t)$$

Paso 2: Aplicar Laplace (c.i. nulas):

$$s^2 X(s) + 4sX(s) + 3X(s) = F(s)$$

$$X(s)(s^2 + 4s + 3) = F(s)$$

Paso 3: Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

Paso 4: Verificación. Polos: $s_1 = -1$, $s_2 = -3$ (ambos reales negativos $\rightarrow$ sistema **estable** y **sobreamortiguado**).

Ganancia estática: $G(0) = \frac{1}{3} = 0.333 \text{ m/N}$.

1.8.2 7.2 Ejercicio resuelto: Circuito RLC serie $\rightarrow$ EDO $\rightarrow$ FT

Ejercicio resuelto: Sistema eléctrico Datos: $R = 20 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 0.02 \text{ F}$. Entrada: $v_{in}(t)$. Salida: $v_C(t)$.

Paso 1: LKV en el lazo:

$$v_{in} = v_R + v_L + v_C = Ri + L \frac{di}{dt} + v_C$$

Como $i = C \frac{dv_C}{dt}$:

$$v_{in} = RC\dot{v}_C + LC\ddot{v}_C + v_C$$

$$0.02\ddot{v}_C + 0.4\dot{v}_C + v_C = v_{in}$$

Paso 2: Laplace:

$$0.02s^2V_C(s) + 0.4sV_C(s) + V_C(s) = V_{in}(s)$$

Paso 3: Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{0.02s^2 + 0.4s + 1}$$

$$G(s) = \frac{50}{s^2 + 20s + 50}$$

Paso 4: Polos: $s = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 200}}{2} = \frac{-20 \pm 14.14}{2}$

$$s_1 = -2.93 \quad s_2 = -17.07$$

Ambos polos reales negativos $\rightarrow$ sistema **estable sobreamortiguado**.

Ganancia estática: $G(0) = \frac{50}{50} = 1$ (la tensión del condensador alcanza la tensión de entrada).

1.8.3 7.3 Ejercicio resuelto: Linealización de un sistema de nivel de tanque

Ejercicio resuelto: Linealización hidráulica **Datos:** Tanque de sección $A = 1 \text{ m}^2$, salida por orificio: $q_{out} = c\sqrt{h}$ con $c = 0.5 \text{ m}^{5/2}/\text{s}$. Punto de operación: $q_{in,eq} = 1 \text{ m}^3/\text{s}$.

Paso 1: EDO no lineal:

$$A \frac{dh}{dt} = q_{in} - c\sqrt{h}$$

Paso 2: Punto de equilibrio ($\dot{h} = 0$):

$$q_{in,eq} = c\sqrt{h_{eq}} \Rightarrow h_{eq} = \left(\frac{q_{in,eq}}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{0.5}\right)^2 = 4 \text{ m}$$

Paso 3: Linealización. Sea $f(h, q_{in}) = q_{in} - c\sqrt{h}$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{eq} = -\frac{c}{2\sqrt{h_{eq}}} = -\frac{0.5}{2\sqrt{4}} = -\frac{0.5}{4} = -0.125 \text{ s}^{-1}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial q_{in}} \right|_{eq} = 1$$

Paso 4: EDO linealizada ($\delta h = h - h_{eq}$, $\delta q = q_{in} - q_{in,eq}$):

$$A \frac{d(\delta h)}{dt} = -0.125 \cdot \delta h + 1 \cdot \delta q$$

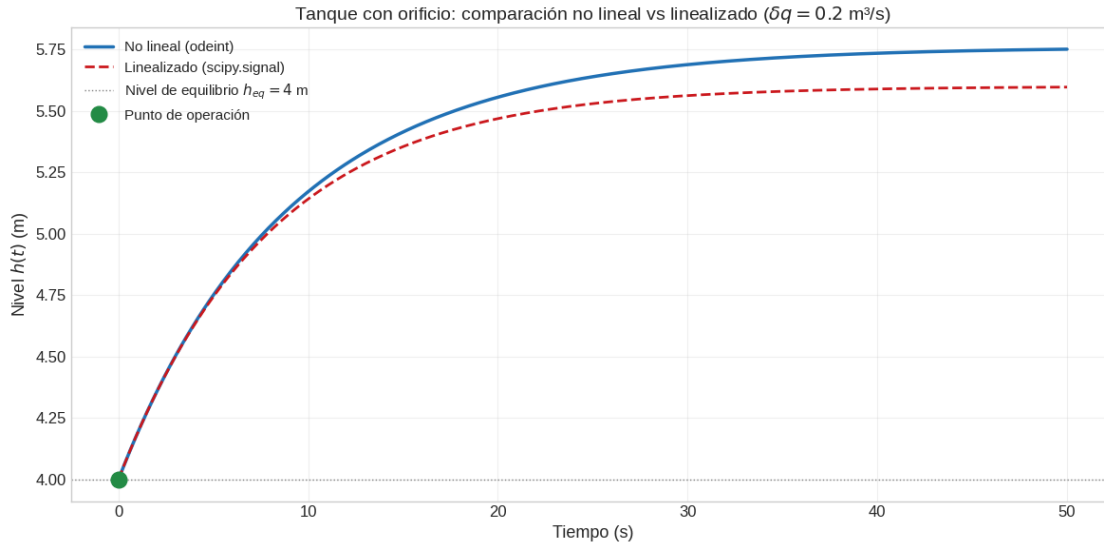
$$1 \cdot \delta \dot{h} + 0.125 \cdot \delta h = \delta q$$

Paso 5: Función de transferencia:

$$s\Delta H(s) + 0.125\Delta H(s) = \Delta Q(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{s + 0.125}}$$

Constante de tiempo: $\tau = \frac{1}{0.125} = 8 \text{ s}$. Ganancia estática: $G(0) = 8 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})$.



1.8.4 7.4 Ejercicio resuelto: Reducción de diagrama de bloques

Ejercicio resuelto: Álgebra de bloques Datos: Sistema con realimentación unitaria negativa.

Camino directo: $G_1(s) = \frac{10}{s+5}$ en serie con $G_2(s) = \frac{1}{s+2}$.

Paso 1: Serie de G_1 y G_2 :

$$G_{dir}(s) = G_1 \cdot G_2 = \frac{10}{s+5} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{10}{(s+5)(s+2)} = \frac{10}{s^2 + 7s + 10}$$

Paso 2: Cerrar lazo con realimentación unitaria ($H = 1$):

$$G_{eq}(s) = \frac{G_{dir}}{1 + G_{dir}} = \frac{\frac{10}{s^2 + 7s + 10}}{1 + \frac{10}{s^2 + 7s + 10}}$$

$$G_{eq}(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 10 + 10}$$

$$\boxed{G_{eq}(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 20}}$$

Paso 3: Verificación. Polos: $s = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 80}}{2} = \frac{-7 \pm j\sqrt{31}}{2} = -3.5 \pm j2.78$

Polos complejos conjugados con parte real negativa $\rightarrow$ sistema **estable subamortiguado**.

Ganancia estática: $G_{eq}(0) = \frac{10}{20} = 0.5$.

1.8.5 7.5 Ejercicio resuelto: Circuito RC (primer orden)

Ejercicio resuelto: Sistema de primer orden Datos: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$. Entrada: $v_{in}(t)$. Salida: $v_C(t)$.

Paso 1: LKV:

$$v_{in} = Ri + v_C = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

$$RC \dot{v}_C + v_C = v_{in}$$

Con valores: $\tau = RC = 1000 \times 100 \times 10^{-6} = 0.1 \text{ s}$

$$0.1 \dot{v}_C + v_C = v_{in}$$

Paso 2: Laplace y FT:

$$0.1sV_C(s) + V_C(s) = V_{in}(s)$$

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{0.1s + 1} = \frac{10}{s + 10}$$

Polo: $s = -10$ (real negativo $\rightarrow$ estable). Constante de tiempo $\tau = 0.1 \text{ s}$. Ganancia estática $G(0) = 1$.

1.8.6 7.6 Ejercicio resuelto: Linealización de sistema térmico con radiación

Ejercicio resuelto: Linealización térmica Datos: Cuerpo con capacidad térmica $C_t = 50 \text{ J/K}$. Entrada: potencia $P(t)$. Pérdidas por radiación: $q_{rad} = \sigma \epsilon AT^4$ (ley de Stefan-Boltzmann). Punto de operación: $T_{eq} = 400 \text{ K}$, $\sigma \epsilon A = 2 \times 10^{-8} \text{ W/K}^4$.

Paso 1: EDO no lineal:

$$C_t \frac{dT}{dt} = P - \sigma \epsilon AT^4$$

Paso 2: Equilibrio ($\dot{T} = 0$):

$$P_{eq} = \sigma \epsilon AT_{eq}^4 = 2 \times 10^{-8} \times 400^4 = 2 \times 10^{-8} \times 2.56 \times 10^{10} = 512 \text{ W}$$

Paso 3: Derivadas parciales de $f(T, P) = P - \sigma \epsilon AT^4$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{eq} = -4\sigma \epsilon AT_{eq}^3 = -4 \times 2 \times 10^{-8} \times 400^3 = -4 \times 0.00128 = -5.12 \text{ W/K}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial P} \right|_{eq} = 1$$

Paso 4: EDO linealizada:

$$C_t \delta \dot{T} = -5.12 \cdot \delta T + \delta P$$

$$50 \delta \dot{T} + 5.12 \cdot \delta T = \delta P$$

Paso 5: Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\Delta T(s)}{\Delta P(s)} = \frac{1}{50s + 5.12} = \frac{0.1953}{s + 0.1024}$$

Constante de tiempo: $\tau = \frac{50}{5.12} = 9.77$ s. Ganancia estática: $G(0) = \frac{1}{5.12} = 0.195$ K/W.

1.9 8. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

Esta sección clasifica los 12 tipos de problemas que pueden aparecer en exámenes del Tema 2.

#	Tipo	Dominio	Ecuación clave	Dificultad
1	Masa-resorte-amortiguador	Mecánico	$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$	Media
2	Péndulo (linealización)	Mecánico	$I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = T$	Alta
3	Circuito RC	Eléctrico	$RC\dot{v}_C + v_C = v_{in}$	Baja
4	Circuito RL	Eléctrico	$L\dot{i} + Ri = v_{in}$	Baja
5	Circuito RLC serie	Eléctrico	$LC\ddot{v}_C + RC\dot{v}_C + v_C = v_{in}$	Media
6	Tanque con válvula lineal	Hidráulico	$AR_h\dot{h} + h = R_h q_{in}$	Baja
7	Tanque con orificio (linealizar)	Hidráulico	$A\dot{h} = q_{in} - c\sqrt{h}$	Alta
8	Cuerpo con convección	Térmico	$C_t R_t \dot{\theta} + \theta = R_t q_{in}$	Baja

#	Tipo	Dominio	Ecuación clave	Dificultad
9	Cuerpo con radiación (linealizar)	Térmico	$C_t \dot{T} = P - \sigma \epsilon A T^4$	Alta
10	Reducción serie/paralelo	Bloques	$G_{eq} = G_1 G_2$ o $G_1 + G_2$	Baja
11	Reducción con realimentación	Bloques	$G_{eq} = G/(1 + GH)$	Media
12	Diagrama complejo (múltiples lazos)	Bloques	Combinación de reglas	Alta

1.9.1 8.1 Tipo 1: Masa-resorte-amortiguador

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Cómo afectan los parámetros: - Si m **aumenta** $\rightarrow$ oscilaciones más lentas $\rightarrow$ frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$ disminuye - Si b **aumenta** $\rightarrow$ amortiguamiento $\zeta = b/(2\sqrt{mk})$ aumenta $\rightarrow$ menos oscilaciones - Si k **aumenta** $\rightarrow$ sistema más rígido $\rightarrow$ frecuencia natural aumenta, valor estacionario $1/k$ disminuye

Ejercicio resuelto: Tipo 1 Datos: $m = 0.5$ kg, $b = 1$ N·s/m, $k = 2$ N/m

$$G(s) = \frac{1}{0.5s^2 + s + 2} = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}$$

$$\text{Polos: } s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm j\sqrt{3}$$

$$\omega_n = \sqrt{4} = 2 \text{ rad/s}, \zeta = \frac{2}{2 \cdot 2} = 0.5 \text{ (subamortiguado).}$$

$$\text{Ganancia estática: } G(0) = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ m/N.}$$

1.9.2 8.2 Tipo 2: Péndulo (linealización de $\sin \varphi$)

EDO no lineal: $I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = T$

Procedimiento: equilibrio $\rightarrow$ Taylor de $\sin \rightarrow$ variables incrementales $\rightarrow$ cancelación del punto de equilibrio.

$$G(s) = \frac{1}{Is^2 + Bs + mgl \cos(\varphi_{eq})}$$

Truco para el examen: la linealización de $\sin(\varphi)$ siempre introduce $\cos(\varphi_{eq})$ como factor del término proporcional. Si $\varphi_{eq} = 0$, $\cos(0) = 1$ y la EDO es idéntica a masa-resorte-amortiguador.

Ejercicio resuelto: Tipo 2 Datos: $I = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $B = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$, $m = 2 \text{ kg}$, $l = 0.3 \text{ m}$, $\varphi_{eq} = \pi/6$ (30°)

$$mgl \cos(\varphi_{eq}) = 2 \times 9.81 \times 0.3 \times \cos(30^\circ) = 5.886 \times 0.866 = 5.097$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 5.097}$$

$$\text{Polos: } s = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.25 - 20.39}}{2} = -0.25 \pm j2.24 \text{ (subamortiguado).}$$

1.9.3 8.3 Tipo 3: Circuito RC (1er orden)

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}} \quad \tau = RC$$

Cómo afectan los parámetros: - Si R **aumenta** $\rightarrow \tau$ aumenta $\rightarrow$ respuesta más lenta - Si C **aumenta** $\rightarrow \tau$ aumenta $\rightarrow$ respuesta más lenta - La ganancia estática es **siempre 1** (el condensador se carga hasta v_{in})

Ejercicio resuelto: Tipo 3 Datos: $R = 4.7 \text{ k}\Omega$, $C = 47 \text{ }\mu\text{F}$

$$\tau = RC = 4700 \times 47 \times 10^{-6} = 0.221 \text{ s}$$

$$G(s) = \frac{1}{0.221s + 1} = \frac{4.525}{s + 4.525}$$

1.9.4 8.4 Tipo 4: Circuito RL (1er orden)

$$\boxed{G(s) = \frac{R}{Ls + R} = \frac{1}{\tau s + 1}} \quad \tau = L/R$$

Salida: corriente $i(t)$. Entrada: $v_{in}(t)$. La ganancia estática es $1/R$.

Ejercicio resuelto: Tipo 4 Datos: $R = 100 \text{ }\Omega$, $L = 0.2 \text{ H}$

$$\tau = L/R = 0.2/100 = 0.002 \text{ s} = 2 \text{ ms}$$

$$G(s) = \frac{I(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1/L}{s + R/L} = \frac{5}{s + 500}$$

Ganancia estática: $G(0) = 5/500 = 0.01 = 1/R \text{ A/V}$.

1.9.5 8.5 Tipo 5: Circuito RLC serie (2º orden)

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$.

Cómo afectan los parámetros: - Si R **aumenta** $\rightarrow \zeta$ aumenta $\rightarrow$ menos oscilaciones (más amortiguado) - Si L **aumenta** $\rightarrow \omega_n$ disminuye $\rightarrow$ respuesta más lenta - Si C **aumenta** $\rightarrow \omega_n$ disminuye $\rightarrow$ respuesta más lenta

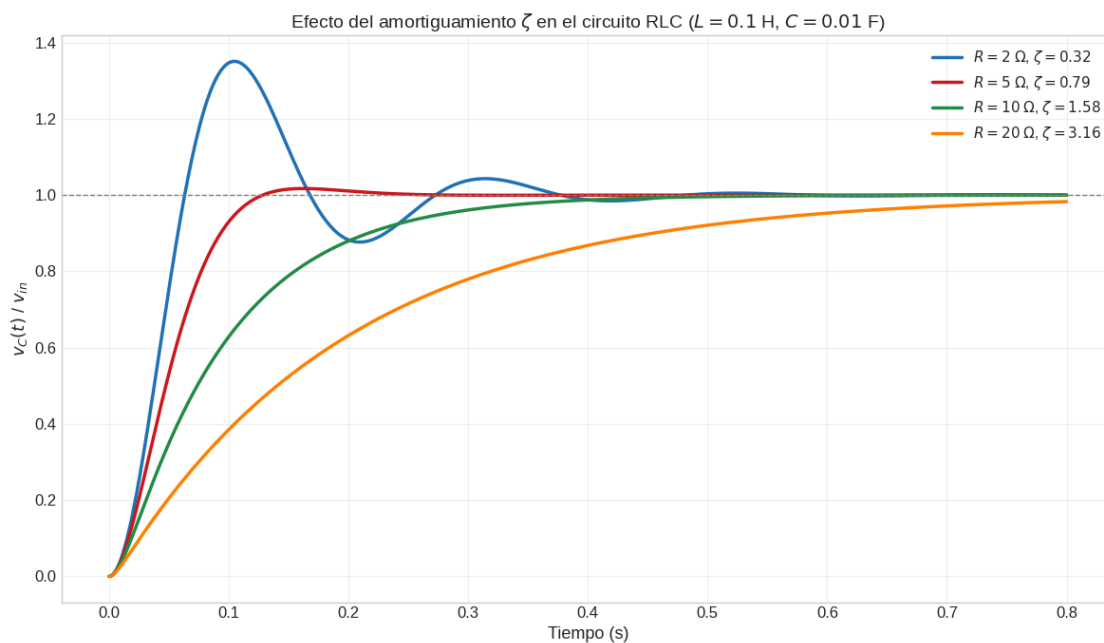
Ejercicio resuelto: Tipo 5 Datos: $R = 5 \Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 0.01 \text{ F}$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{0.1 \times 0.01}} = \frac{1}{\sqrt{0.001}} = 31.62 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{0.01}{0.1}} = 2.5 \times 0.316 = 0.791 \text{ (subamortiguado, } \zeta < 1)$$

$$G(s) = \frac{1000}{s^2 + 50s + 1000}$$

Polos: $s = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - 4000}}{2} = -25 \pm j27.39$



1.9.6 8.6 Tipo 6: Tanque con válvula lineal (1er orden)

$$\boxed{G(s) = \frac{R_h}{\tau s + 1}} \quad \tau = AR_h$$

Cómo afectan los parámetros: - Si A **aumenta** (tanque más grande) $\rightarrow \tau$ aumenta $\rightarrow$ respuesta más lenta - Si R_h **aumenta** (válvula más cerrada) $\rightarrow \tau$ aumenta Y ganancia estática aumenta $\rightarrow$ nivel final más alto

Ejercicio resuelto: Tipo 6 Datos: $A = 3 \text{ m}^2$, $R_h = 2 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})$

$$\tau = AR_h = 3 \times 2 = 6 \text{ s}$$

$$G(s) = \frac{2}{6s + 1} = \frac{1/3}{s + 1/6}$$

Ganancia estática: $G(0) = 2 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})$. Si $q_{in} = 0.5 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow h_{eq} = 2 \times 0.5 = 1 \text{ m}$.

1.9.7 8.7 Tipo 7: Tanque con orificio (linealización de $\sqrt{h}$)

EDO no lineal: $A\dot{h} = q_{in} - c\sqrt{h}$

Procedimiento: encontrar h_{eq} , derivar $\sqrt{h}$ respecto a h , obtener resistencia hidráulica equivalente.

$$\left. \frac{d}{dh} (c\sqrt{h}) \right|_{h_{eq}} = \frac{c}{2\sqrt{h_{eq}}} = \frac{1}{R_{h,lin}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{R_{h,lin}}{AR_{h,lin}s + 1}} \quad R_{h,lin} = \frac{2\sqrt{h_{eq}}}{c} = \frac{2h_{eq}}{q_{in,eq}}$$

Truco para el examen: la resistencia hidráulica linealizada se puede escribir como $R_{h,lin} = 2h_{eq}/q_{out,eq}$.

Ejercicio resuelto: Tipo 7 Datos: $A = 2 \text{ m}^2$, $c = 0.3 \text{ m}^{5/2}/\text{s}$, $q_{in,eq} = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$

$$h_{eq} = (q_{in,eq}/c)^2 = (0.6/0.3)^2 = 4 \text{ m}$$

$$R_{h,lin} = \frac{2\sqrt{4}}{0.3} = \frac{4}{0.3} = 13.33 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})$$

$$\tau = AR_{h,lin} = 2 \times 13.33 = 26.67 \text{ s}$$

$$G(s) = \frac{13.33}{26.67s + 1} = \frac{0.5}{s + 0.0375}$$

1.9.8 8.8 Tipo 8: Cuerpo con convección (1er orden)

$$\boxed{G(s) = \frac{R_t}{C_t R_t s + 1}} \quad \tau = C_t R_t = mc_p R_t$$

Ejercicio resuelto: Tipo 8 Datos: $m = 0.5$ kg, $c_p = 400$ J/(kg·K), $R_t = 0.1$ K/W
 $C_t = mc_p = 200$ J/K, $\tau = C_t R_t = 200 \times 0.1 = 20$ s

$$G(s) = \frac{0.1}{20s + 1} = \frac{0.005}{s + 0.05}$$

Ganancia estática: $G(0) = 0.1$ K/W. Si $q_{in} = 50$ W $\rightarrow \theta_{eq} = 0.1 \times 50 = 5$ K.

1.9.9 8.9 Tipo 9: Cuerpo con radiación (linealización de T^4)

EDO no lineal: $C_t \dot{T} = P - \sigma \epsilon A T^4$

$$\left. \frac{d}{dT}(\sigma \epsilon A T^4) \right|_{T_{eq}} = 4\sigma \epsilon A T_{eq}^3 = \frac{1}{R_{t,lin}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{R_{t,lin}}{C_t R_{t,lin} s + 1}} \quad R_{t,lin} = \frac{1}{4\sigma \epsilon A T_{eq}^3}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 9 Datos: $C_t = 100$ J/K, $\sigma \epsilon A = 5 \times 10^{-9}$ W/K⁴, $T_{eq} = 500$ K

$$R_{t,lin} = \frac{1}{4 \times 5 \times 10^{-9} \times 500^3} = \frac{1}{4 \times 5 \times 10^{-9} \times 1.25 \times 10^8} = \frac{1}{2.5} = 0.4 \text{ K/W}$$

$$\tau = C_t R_{t,lin} = 100 \times 0.4 = 40 \text{ s}$$

$$G(s) = \frac{0.4}{40s + 1} = \frac{0.01}{s + 0.025}$$

1.9.10 8.10 Tipo 10: Reducción serie/paralelo

Serie: $G_{eq} = G_1 \cdot G_2 = \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}$

Paralelo: $G_{eq} = G_1 + G_2 = \frac{N_1 D_2 + N_2 D_1}{D_1 D_2}$

Ejercicio resuelto: Tipo 10 Datos: $G_1(s) = \frac{3}{s+1}$, $G_2(s) = \frac{2}{s+4}$

Serie:

$$G_{serie} = \frac{3}{s+1} \cdot \frac{2}{s+4} = \frac{6}{(s+1)(s+4)} = \frac{6}{s^2 + 5s + 4}$$

Paralelo:

$$G_{paralelo} = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s+4} = \frac{3(s+4) + 2(s+1)}{(s+1)(s+4)} = \frac{5s + 14}{s^2 + 5s + 4}$$

1.9.11 8.11 Tipo 11: Reducción con realimentación

$$G_{eq} = \frac{G}{1 + GH}$$

Ejercicio resuelto: Tipo 11 Datos: $G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$, $H(s) = 1$ (realimentación unitaria), $K = 10$, $a = 3$

$$G_{eq} = \frac{\frac{10}{s(s+3)}}{1 + \frac{10}{s(s+3)}} = \frac{10}{s(s+3) + 10} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10}$$

Polos: $s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-40}}{2} = -1.5 \pm j2.78$ (estable, subamortiguado).

1.9.12 8.12 Tipo 12: Diagrama complejo (múltiples lazos)

Estrategia general: 1. Identificar los lazos de realimentación (del más interno al más externo) 2. Reducir cada lazo interno primero 3. Combinar bloques en serie 4. Cerrar el lazo externo

Error frecuente: olvidar que al mover un punto de bifurcación hay que compensar con un bloque $1/G$ o G .

Ejercicio resuelto: Tipo 12 Datos: $G_1 = \frac{2}{s+1}$, $G_2 = \frac{3}{s+2}$, $G_3 = \frac{1}{s+4}$. G_2 y G_3 en paralelo, el resultado en serie con G_1 , todo con realimentación unitaria negativa.

Paso 1: Paralelo de G_2 y G_3 :

$$G_{par} = G_2 + G_3 = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+4} = \frac{3(s+4) + (s+2)}{(s+2)(s+4)} = \frac{4s+14}{s^2+6s+8}$$

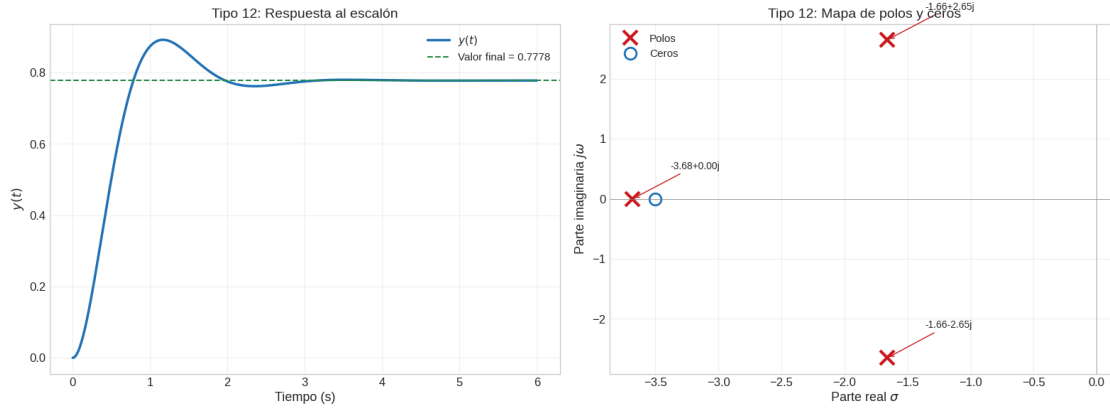
Paso 2: Serie con G_1 :

$$G_{dir} = G_1 \cdot G_{par} = \frac{2}{s+1} \cdot \frac{4s+14}{s^2+6s+8} = \frac{2(4s+14)}{(s+1)(s^2+6s+8)} = \frac{8s+28}{s^3+7s^2+14s+8}$$

Paso 3: Realimentación unitaria:

$$G_{eq} = \frac{G_{dir}}{1 + G_{dir}} = \frac{8s+28}{s^3+7s^2+14s+8+8s+28}$$

$$G_{eq} = \frac{8s+28}{s^3+7s^2+22s+36}$$



1.9.13 Tabla resumen de fórmulas del catálogo

Tipo	Dominio	FT en forma estándar	Ganancia estática
1. Masa-resorte-amort.	Mecánico	$\frac{1}{ms^2 + bs + k}$	$1/k$
2. Péndulo	Mecánico	$\frac{1}{Is^2 + Bs + mgl \cos \varphi_{eq}}$	$\frac{1}{mgl \cos \varphi_{eq}}$
3. RC	Eléctrico	$\frac{1}{RCs + 1}$	1
4. RL	Eléctrico	$\frac{1/R}{(L/R)s + 1}$	$1/R$
5. RLC	Eléctrico	$\frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$	1
6. Tanque válvula	Hidráulico	$\frac{R_h}{AR_h s + 1}$	R_h
7. Tanque orificio	Hidráulico	$\frac{R_{h,lin}}{AR_{h,lin} s + 1}$	$R_{h,lin}$
8. Convección	Térmico	$\frac{R_t}{C_t R_t s + 1}$	R_t
9. Radiación	Térmico	$\frac{R_{t,lin}}{C_t R_{t,lin} s + 1}$	$R_{t,lin}$
10. Serie	Bloques	$G_1 G_2$	$G_1(0) G_2(0)$
11. Realimentación	Bloques	$\frac{G}{1 + GH}$	$\frac{G(0)}{1 + G(0)H(0)}$
12. Diagrama complejo	Bloques	Según reducción	Evaluar en $s = 0$

1.10 9. Formulario de linealización: funciones no lineales comunes

Función no lineal $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Linealización alrededor de x_{eq}
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x_{eq}) + \cos(x_{eq}) \cdot \delta x$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x_{eq}) - \sin(x_{eq}) \cdot \delta x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x_{eq}} + \frac{1}{2\sqrt{x_{eq}}} \cdot \delta x$
x^2	$2x$	$x_{eq}^2 + 2x_{eq} \cdot \delta x$
x^n	nx^{n-1}	$x_{eq}^n + nx_{eq}^{n-1} \cdot \delta x$
e^x	e^x	$e^{x_{eq}}(1 + \delta x)$
$\ln(x)$	$1/x$	$\ln(x_{eq}) + \frac{1}{x_{eq}} \cdot \delta x$
$x \cdot y$ (dos variables)	$\frac{\partial}{\partial x} = y, \frac{\partial}{\partial y} = x$	$x_{eq}y_{eq} + y_{eq}\delta x + x_{eq}\delta y$

Regla general: $f(x) \approx f(x_{eq}) + f'(x_{eq}) \cdot (x - x_{eq})$

1.11 10. Resumen y tabla de fórmulas clave

#	Sistema	EDO	Función de transferencia	Orden
1	Masa-resorte-amort.	$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$	$\frac{1}{ms^2 + bs + k}$	2
2	Péndulo linealizado	$I\delta\ddot{\varphi} + B\delta\dot{\varphi} + mgl \cos \varphi_{eq} \delta\varphi = \delta T$	$\frac{1}{Is^2 + Bs + mgl \cos \varphi_{eq}}$	2
3	Circuito RC	$RC\dot{v}_C + v_C = v_{in}$	$\frac{1}{RCs + 1}$	1
4	Circuito RL	$L\dot{i} + Ri = v_{in}$	$\frac{1/R}{(L/R)s + 1}$	1
5	Circuito RLC	$LC\ddot{v}_C + RC\dot{v}_C + v_C = v_{in}$	$\frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$	2
6	Tanque + válvula	$AR_h\dot{h} + h = R_h q_{in}$	$\frac{R_h}{AR_h s + 1}$	1
7	Tanque + orificio	$A\dot{h} = q_{in} - c\sqrt{h}$ (linealizar)	$\frac{R_{h,lin}}{AR_{h,lin}s + 1}$	1

#	Sistema	EDO	Función de transferencia	Orden
8	Térmico convección	$C_t R_t \dot{\theta} + \theta = R_t q_{in}$	$\frac{R_t}{C_t R_t s + 1}$	1
9	Térmico radiación	$C_t \dot{T} = P - \sigma \epsilon A T^4$ (linearizar)	$\frac{R_{t,lin}}{C_t R_{t,lin} s + 1}$	1

1.11.1 Reglas de bloques

Configuración	Fórmula
Serie	$G_{eq} = G_1 \cdot G_2$
Paralelo	$G_{eq} = G_1 + G_2$
Realim. negativa	$G_{eq} = \frac{G}{1 + GH}$
Realim. positiva	$G_{eq} = \frac{G}{1 - GH}$
Realim. unitaria	$G_{eq} = \frac{G}{1 + G}$

1.11.2 Conceptos clave para el examen

- **Ganancia estática:** $K = G(0)$ = valor final de la respuesta al escalón unitario
- **Constante de tiempo** (τ): tiempo en alcanzar el 63.2% del valor final (1er orden)
- **Frecuencia natural** (ω_n): frecuencia de oscilación sin amortiguamiento (2º orden)
- **Factor de amortiguamiento** (ζ): determina si hay oscilaciones ($\zeta < 1$) o no ($\zeta \geq 1$)
- **Estabilidad:** todos los polos deben tener parte real negativa