

03_respuesta_temporal

June 19, 2026

1 Tema 3 - Análisis de la Respuesta Temporal

Fundamentos de Control - GIERM

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Identificar y generar las señales de prueba estándar (impulso, escalón, rampa, parábola)
- Calcular y graficar la respuesta temporal de sistemas de **primer orden** ante entrada escalón
- Calcular y graficar la respuesta temporal de sistemas de **segundo orden**, relacionando ζ , ω_n con sobrepaso, tiempo de establecimiento y tiempo de subida
- Localizar polos en el plano s e interpretar su efecto sobre la estabilidad y la forma de la respuesta
- Aplicar el **criterio de Routh-Hurwitz** para determinar estabilidad y rangos de parámetros
- Identificar modelos de primer y segundo orden a partir de curvas experimentales de respuesta al escalón

Configuración lista.

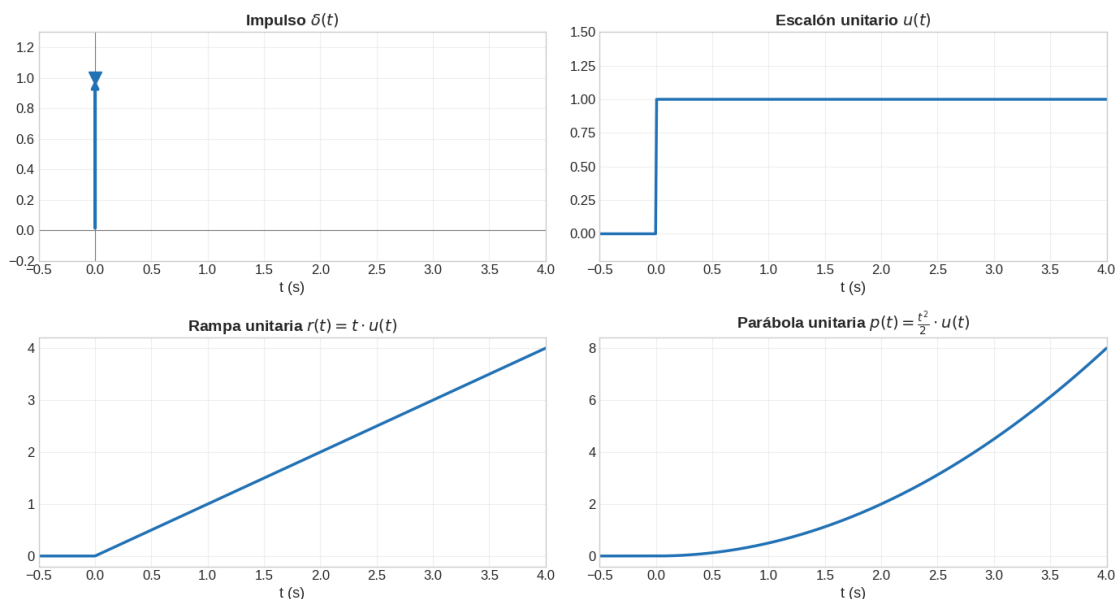
1.2 1. Señales de prueba estándar

En el análisis temporal de sistemas de control se utilizan **señales de prueba** normalizadas para estudiar el comportamiento del sistema. Las cuatro señales fundamentales son:

Señal	Expresión temporal	Transformada de Laplace
Impulso (delta de Dirac)	$\delta(t)$	1
Escalón unitario	$u(t) = 1, t \geq 0$	$\frac{1}{s}$
Rampa unitaria	$r(t) = t \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Parábola unitaria	$p(t) = \frac{t^2}{2} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^3}$

El **escalón** es la señal de prueba más utilizada porque representa un cambio brusco en la referencia (la situación más exigente y frecuente en la práctica).

Señales de prueba estándar



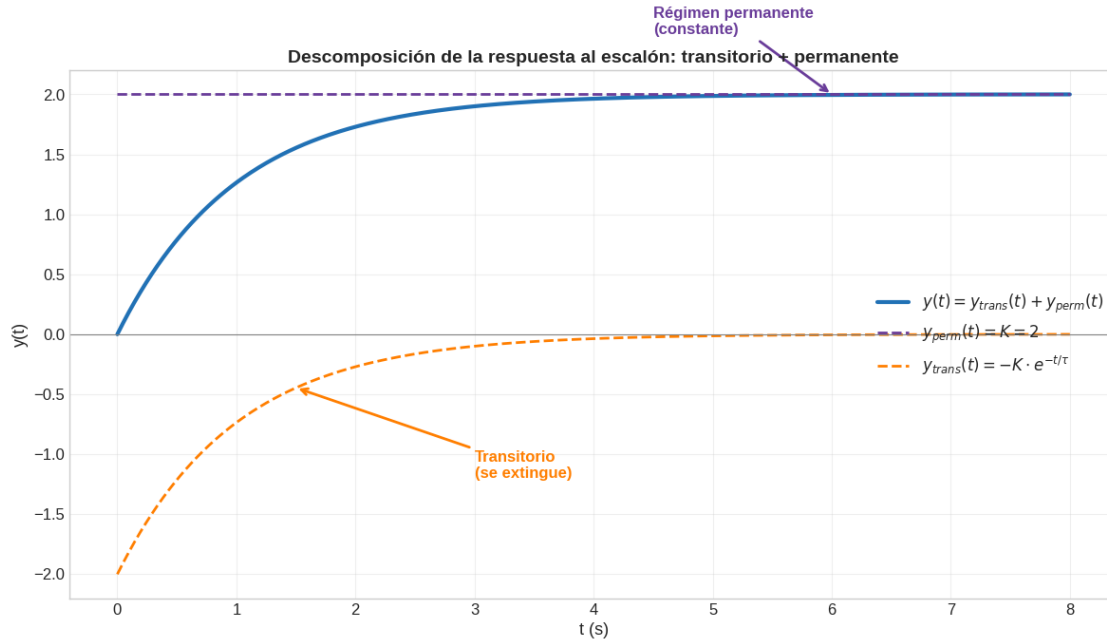
1.3 2. Descomposición de la respuesta temporal

La respuesta total de un sistema lineal ante una entrada se puede descomponer en dos partes:

$$y(t) = y_{\text{transitorio}}(t) + y_{\text{permanente}}(t)$$

- **Respuesta transitoria** $y_{\text{transitorio}}(t)$: debida a las condiciones iniciales y a la dinámica propia del sistema. Se extingue con el tiempo si el sistema es estable.
- **Respuesta en régimen permanente** $y_{\text{permanente}}(t)$: la parte que persiste cuando $t \rightarrow \infty$. Depende de la entrada aplicada.

Truco para el examen: La respuesta transitoria está asociada a los **polos del sistema** (raíces del denominador de $G(s)$), mientras que la respuesta permanente está asociada a los **polos de la entrada**.

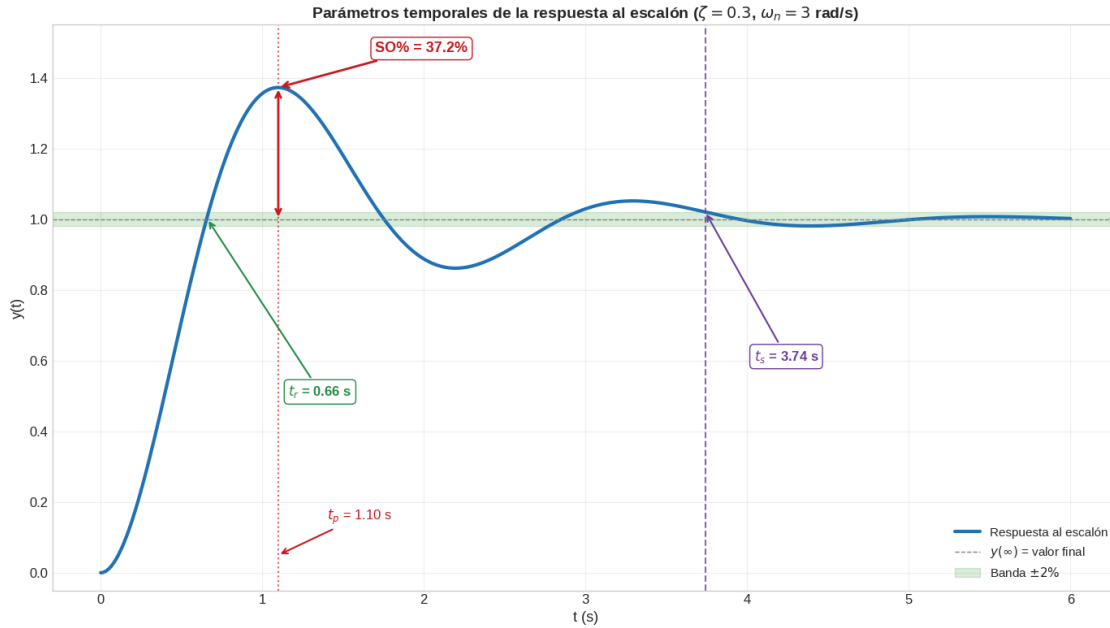


1.4 3. Parámetros temporales de la respuesta al escalón

Los parámetros que caracterizan la calidad de la respuesta al escalón son:

Parámetro	Símbolo	Descripción
Tiempo de subida	t_r	Tiempo en ir del 10% al 90% del valor final (o de 0 al 100% en 2º orden subamortiguado)
Tiempo de pico	t_p	Tiempo en alcanzar el primer máximo
Sobrepaso máximo	$SO\%$	Porcentaje que excede el valor final: $SO\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100$
Tiempo de establecimiento	t_s	Tiempo para entrar y permanecer en la banda $\pm 2\%$ (o $\pm 5\%$) del valor final
Error en régimen permanente	e_{ss}	Diferencia entre referencia y salida cuando $t \rightarrow \infty$

Estos parámetros son **especificaciones de diseño**: el ingeniero de control los utiliza para evaluar si el sistema cumple los requisitos.



Interpretación visual de los parámetros:

- t_r (**tiempo de subida**): Indica la **velocidad** de la respuesta. Menor t_r = respuesta más rápida.
- $SO\%$ (**sobrepaso**): Indica la **oscilación**. Mayor $SO\%$ = más oscilaciones. En muchas aplicaciones se exige $SO\% < 10\%$.
- t_s (**tiempo de establecimiento**): Indica cuándo se puede considerar que la respuesta ha llegado a su valor final.
- t_p (**tiempo de pico**): Solo existe si hay sobrepaso (sistemas subamortiguados).

Compromiso fundamental: No se puede reducir t_r y $SO\%$ simultáneamente. Menor $\zeta \rightarrow$ menor t_r pero mayor $SO\%$.

1.5 4. Sistemas de primer orden

1.5.1 4.1 Función de transferencia

La forma estándar de un sistema de primer orden es:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

donde: - K = **ganancia estática** (valor final de la respuesta al escalón unitario) - τ = **constante de tiempo** (en segundos)

1.5.2 4.2 Respuesta al escalón unitario

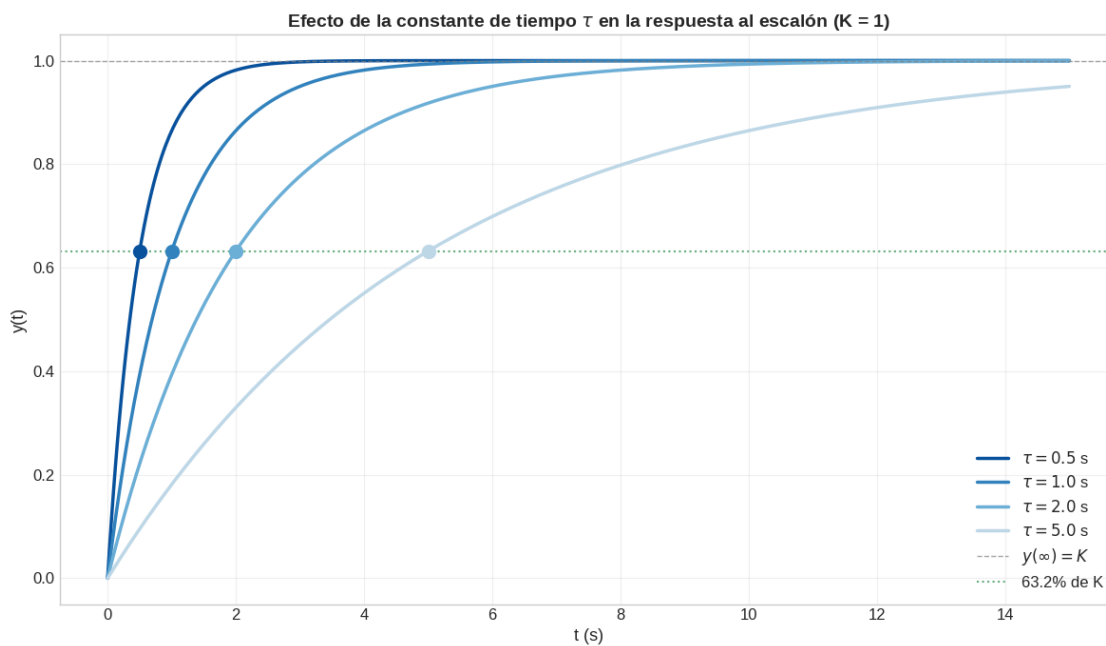
$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0$$

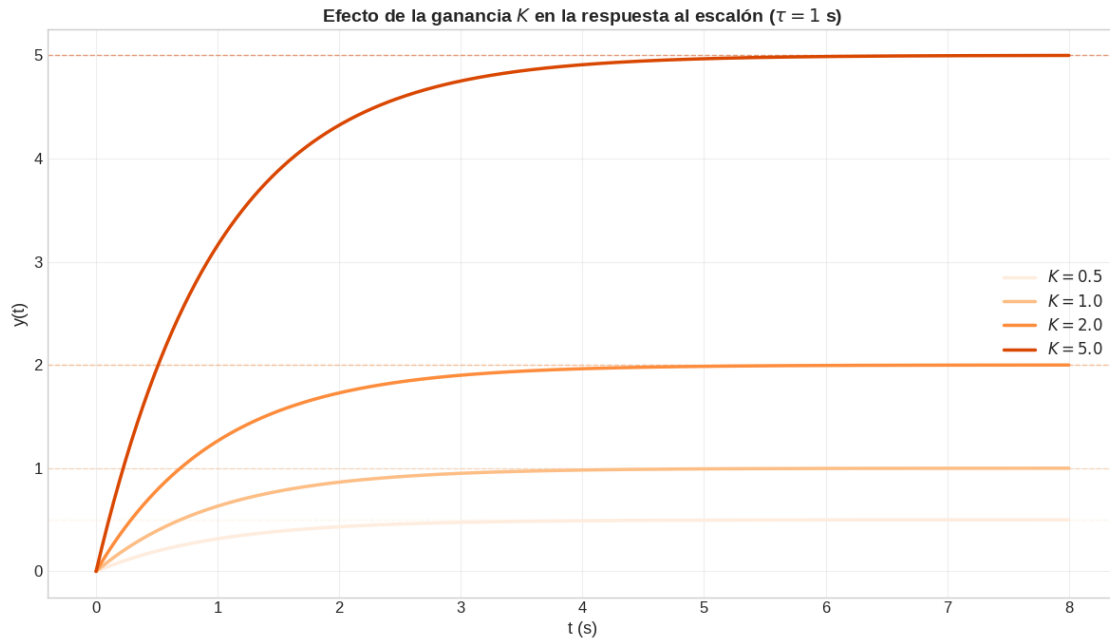
Valores clave de la respuesta:

Tiempo	$y(t)/K$	Significado
$t = \tau$	63.2%	Una constante de tiempo
$t = 2\tau$	86.5%	Dos constantes de tiempo
$t = 3\tau$	95.0%	Tres constantes de tiempo
$t = 4\tau$	98.2%	Cuatro constantes de tiempo
$t = 5\tau$	99.3%	Cinco constantes de tiempo ($\approx$ régimen permanente)

Regla práctica: El tiempo de establecimiento al 2% es $t_s \approx 4\tau$ y al 5% es $t_s \approx 3\tau$.

Polo del sistema: $s = -1/\tau$. Cuanto mayor es τ , más cerca del origen está el polo $\rightarrow$ más lento es el sistema.



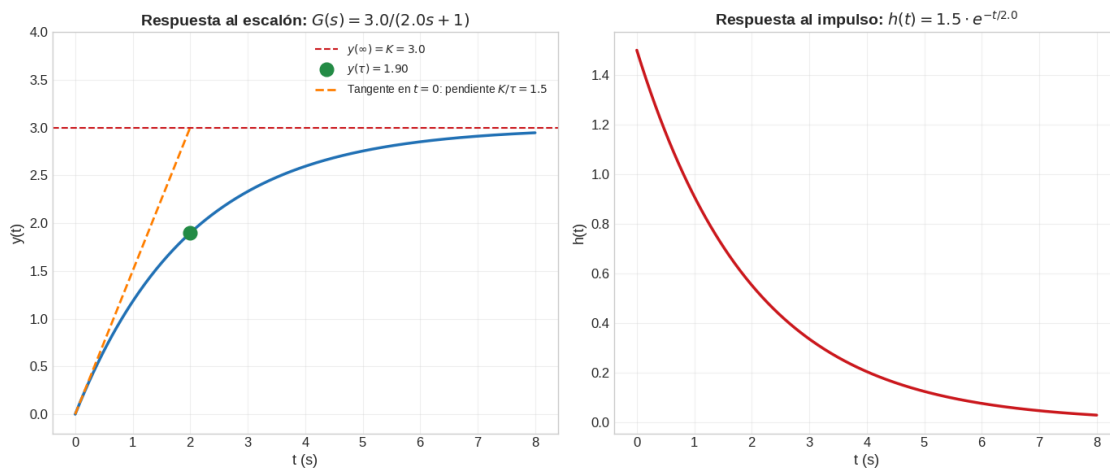


1.5.3 4.4 Respuesta al impulso de primer orden

La respuesta al impulso de un sistema de primer orden es la derivada de la respuesta al escalón:

$$h(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0$$

La pendiente inicial de la respuesta al escalón es $y'(0^+) = K/\tau$, lo que coincide con $h(0^+)$.



1.5.4 4.3 Ejemplo resuelto: Primer orden

Ejercicio resuelto: Respuesta al escalón de $G(s) = \frac{3}{2s+1}$ **Datos:** $G(s) = \frac{3}{2s+1}$

Paso 1: Identificar parámetros comparando con la forma estándar $\frac{K}{\tau s + 1}$:

$$K = 3, \quad \tau = 2 \text{ s}$$

Paso 2: Valor final de la respuesta al escalón unitario:

$$y(\infty) = K = 3$$

Paso 3: Respuesta temporal:

$$y(t) = 3(1 - e^{-t/2})$$

Paso 4: Valor en $t = 1$ s:

$$y(1) = 3(1 - e^{-1/2}) = 3(1 - 0.6065) = 3 \times 0.3935 = 1.18$$

Paso 5: Tiempo de establecimiento al 2%:

$$t_s \approx 4\tau = 4 \times 2 = 8 \text{ s}$$

Paso 6: Verificación de valores clave: - $y(\tau) = y(2) = 3 \times 0.632 = 1.896$ - $y(3\tau) = y(6) = 3 \times 0.950 = 2.850$ - $y(5\tau) = y(10) = 3 \times 0.993 = 2.980$

1.6 5. Sistemas de segundo orden

1.6.1 5.1 Función de transferencia estándar

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde: - K = **ganancia estática** (valor final) - ω_n = **frecuencia natural no amortiguada** (rad/s) - ζ = **factor de amortiguamiento** (adimensional)

1.6.2 5.2 Clasificación según ζ

Rango de ζ	Tipo	Polos	Comportamiento
$\zeta = 0$	No amortiguado	Imaginarios puros	Oscila indefinidamente

Rango de ζ	Tipo	Polos	Comportamiento
$0 < \zeta < 1$	Subamortiguado	Complejos conjugados	Oscilaciones amortiguadas (caso más frecuente en exámenes)
$\zeta = 1$	Críticamente amortiguado	Reales dobles	El más rápido sin sobrepaso
$\zeta > 1$	Sobreamortiguado	Reales distintos	Sin oscilaciones, lento

1.6.3 5.3 Fórmulas clave (caso subamortiguado $0 < \zeta < 1$)

$$SO\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100$$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{criterio } 2\%)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

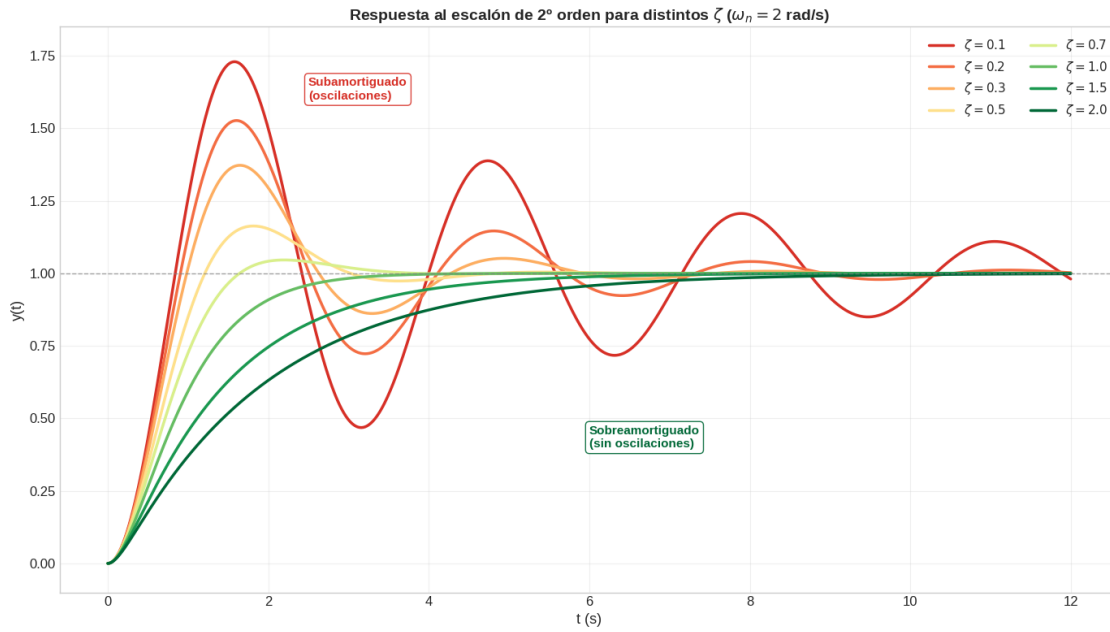
$$t_r \approx \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

1.6.4 5.4 Polos del sistema

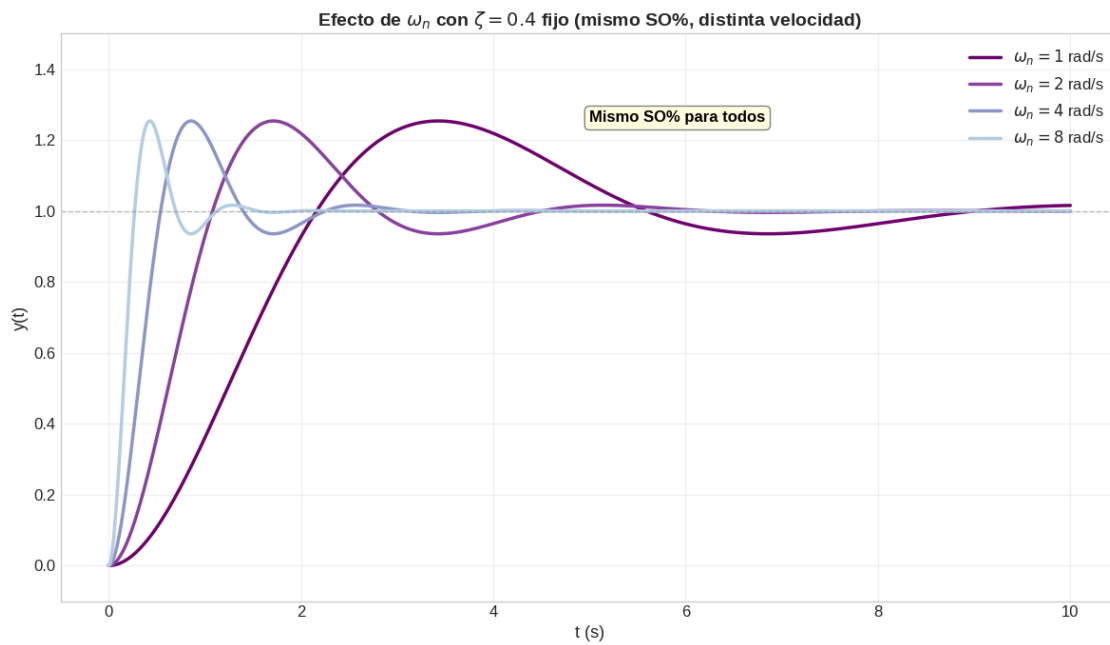
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

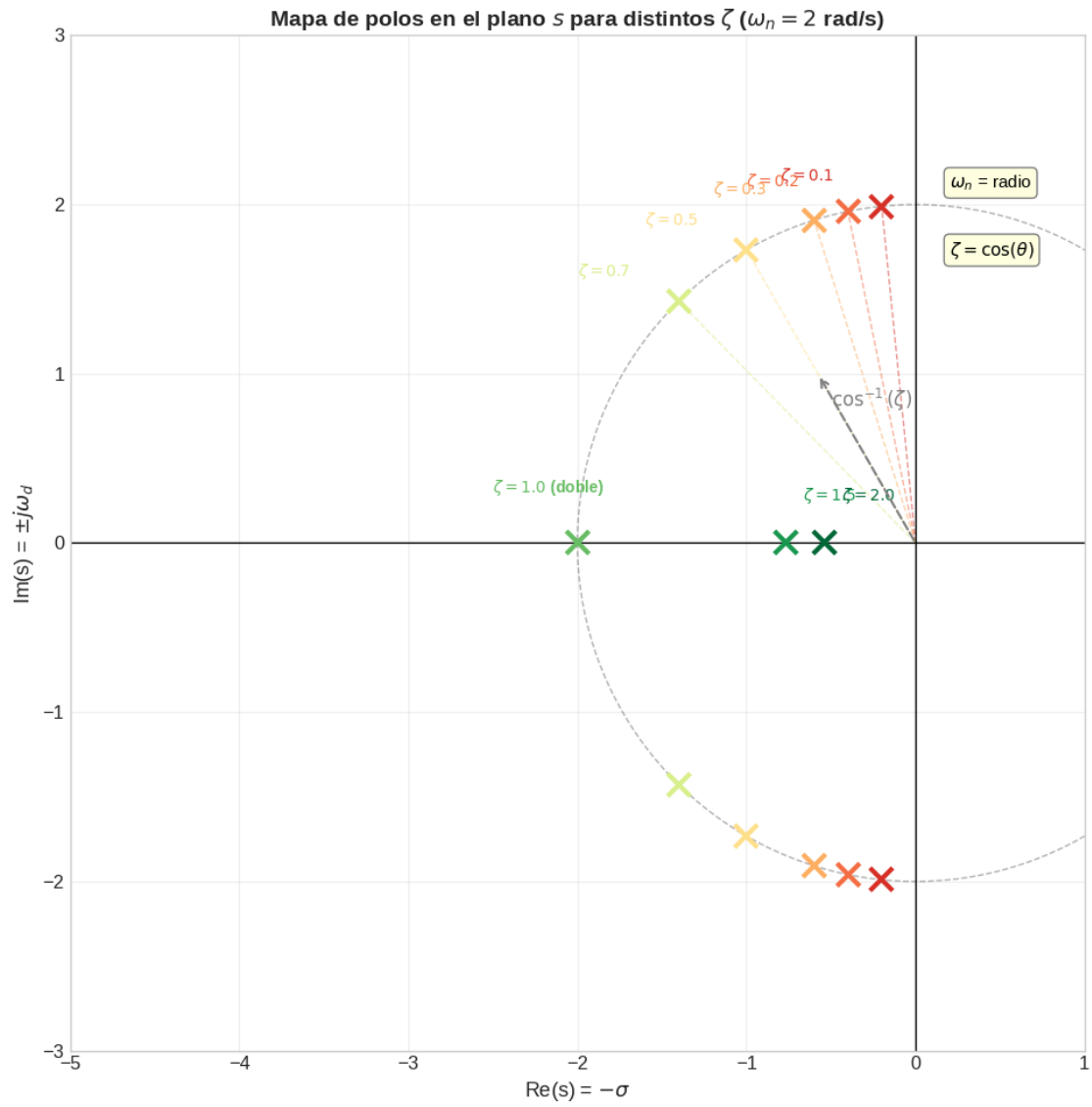
donde $\sigma = \zeta\omega_n$ es la **parte real** (tasa de decaimiento) y ω_d es la **frecuencia de oscilación amortiguada**.

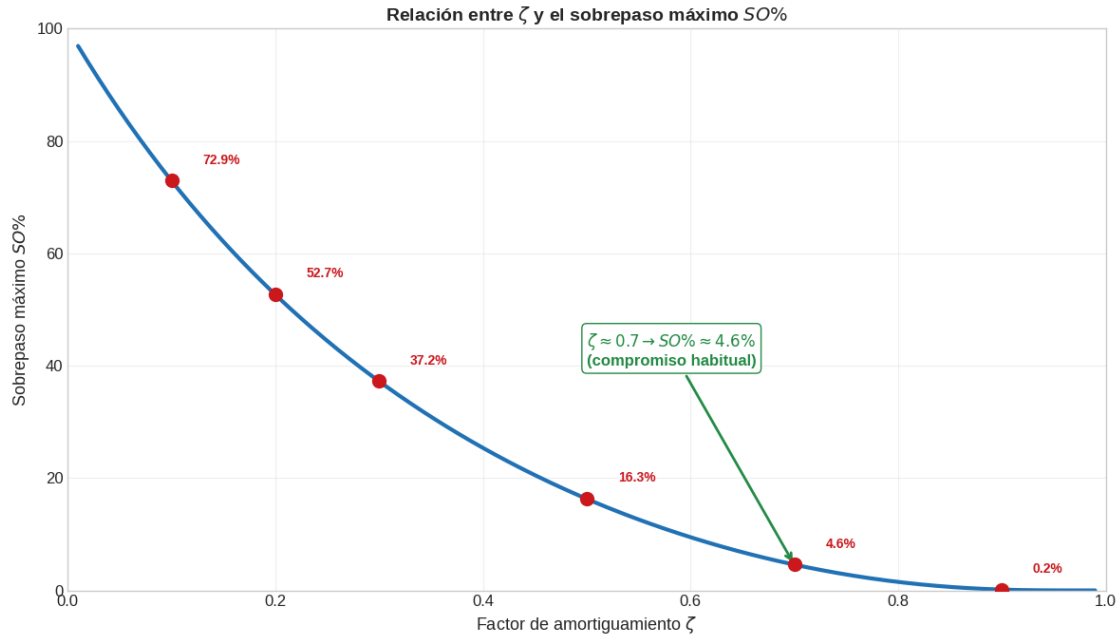


1.6.5 5.5 Efecto de ω_n (con ζ fijo)

Mientras que ζ controla la **forma** de la respuesta (cuánto oscila), ω_n controla la **velocidad** (cuán rápido responde). A mayor ω_n , menor t_s y menor t_r , pero el SO% no cambia.







Observación importante sobre la gráfica SO% vs ζ :

- Para $\zeta = 0.1$: SO% $\approx 73\%$ (oscila mucho, inaceptable en la mayoría de aplicaciones)
- Para $\zeta = 0.5$: SO% $\approx 16\%$ (aceptable para muchas aplicaciones)
- Para $\zeta = 0.707 (= 1/\sqrt{2})$: SO% $\approx 4.3\%$ (compromiso óptimo velocidad/sobrepaso)
- Para $\zeta \geq 1$: SO% = 0% (sin oscilaciones, pero respuesta lenta)

Truco para el examen: Si te piden el valor de ζ que da SO% = $x\%$, usa la fórmula inversa:

$$\zeta = \frac{|\ln(SO/100)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(SO/100)}}$$

1.6.6 5.5 Ejemplo resuelto: Segundo orden

Ejercicio resuelto: Análisis completo de $G(s) = \frac{9}{s^2 + 2.4s + 9}$ **Datos:** $G(s) = \frac{9}{s^2 + 2.4s + 9}$

Paso 1: Comparar con la forma estándar $\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$:

$$\omega_n^2 = 9 \implies \boxed{\omega_n = 3 \text{ rad/s}}$$

$$2\zeta\omega_n = 2.4 \implies \zeta = \frac{2.4}{2 \times 3} = \boxed{\zeta = 0.4}$$

$$K\omega_n^2 = 9 \implies K = \frac{9}{9} = \boxed{K = 1}$$

Paso 2: Como $0 < \zeta = 0.4 < 1$, el sistema es **subamortiguado**.

Paso 3: Frecuencia amortiguada:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 3\sqrt{1 - 0.16} = 3\sqrt{0.84} = 3 \times 0.9165 = \boxed{2.75 \text{ rad/s}}$$

Paso 4: Sobrepaso máximo:

$$SO\% = e^{-\pi \times 0.4 / \sqrt{1 - 0.16}} \times 100 = e^{-1.2566 / 0.9165} \times 100 = e^{-1.3714} \times 100 = \boxed{25.38\%}$$

Paso 5: Tiempo de establecimiento (criterio 2%):

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.4 \times 3} = \frac{4}{1.2} = \boxed{3.33 \text{ s}}$$

Paso 6: Tiempo de subida:

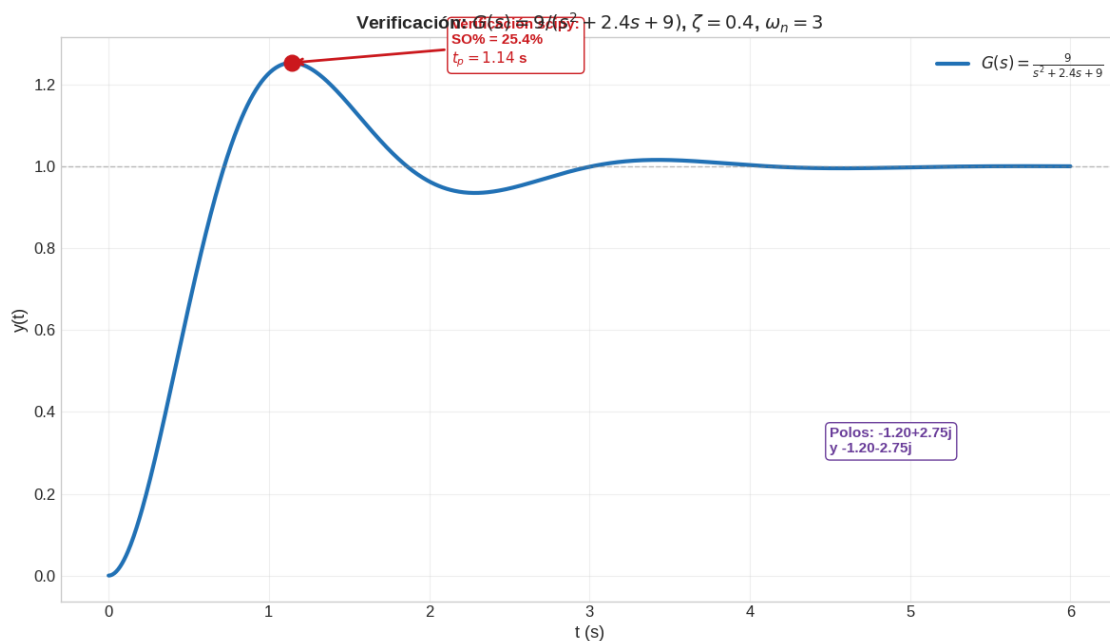
$$t_r \approx \frac{\pi - \arccos(0.4)}{2.75} = \frac{3.1416 - 1.1593}{2.75} = \frac{1.9823}{2.75} = \boxed{0.72 \text{ s}}$$

Paso 7: Tiempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.1416}{2.75} = \boxed{1.14 \text{ s}}$$

Paso 8: Polos del sistema:

$$s_{1,2} = -0.4 \times 3 \pm j \times 2.75 = -1.2 \pm 2.75j$$



1.7 6. Sistemas de orden superior: polos dominantes

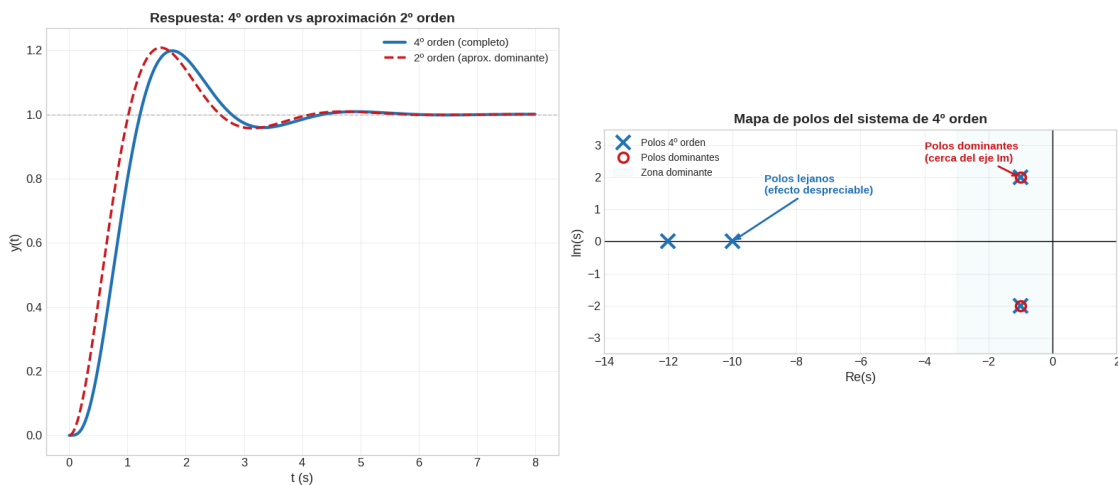
Cuando un sistema tiene más de 2 polos, su respuesta puede ser compleja. Sin embargo, si un par de polos está **mucho más cerca del eje imaginario** que los demás, esos son los **polos dominantes** y el sistema se comporta aproximadamente como uno de segundo orden.

Regla práctica: Un polo es dominante si los demás polos tienen parte real al menos **5 veces mayor** en valor absoluto.

$$\text{Si } |Re(p_{\text{lejano}})| \geq 5 \cdot |Re(p_{\text{dominante}})| \implies \text{se puede aproximar por 2º orden}$$

Cómo afecta la posición de los polos al comportamiento:

- Si σ (parte real) **aumenta** $\rightarrow$ transitorio se extingue más rápido $\rightarrow t_s$ disminuye
- Si ω_d (parte imaginaria) **aumenta** $\rightarrow$ frecuencia de oscilación mayor $\rightarrow$ oscila más rápido
- Si polo se acerca al eje imaginario $\rightarrow$ transitorio más lento $\rightarrow$ polo dominante
- Si polo cruza al semiplano derecho $\rightarrow$ sistema inestable $\rightarrow$ respuesta diverge



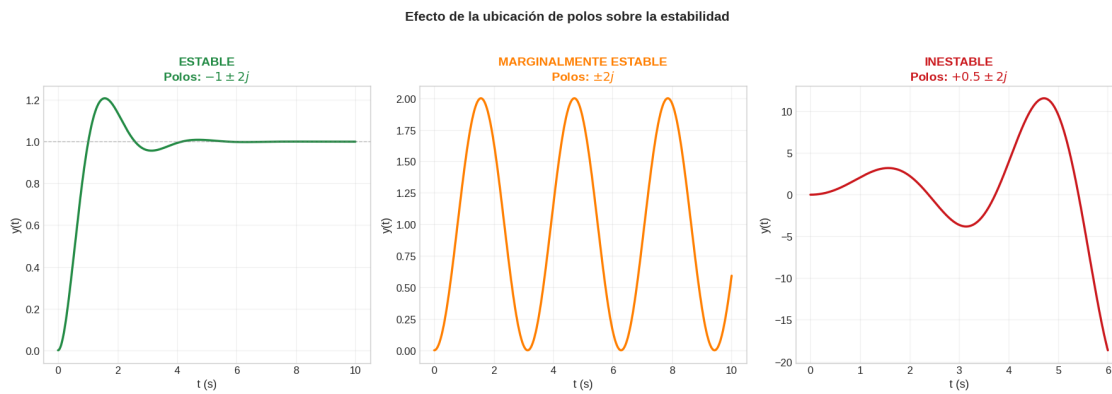
1.8 7. Estabilidad

1.8.1 7.1 Condición de estabilidad

Un sistema LTI es **estable** si y solo si **todos** sus polos tienen parte real negativa (están en el semiplano izquierdo del plano s):

$$\text{Estable} \iff Re(p_i) < 0 \quad \forall i$$

Ubicación de polos	Comportamiento
Todos en semiplano izquierdo ($Re < 0$)	Estable
Alguno en eje imaginario ($Re = 0$)	Marginalmente estable (oscilación permanente)
Alguno en semiplano derecho ($Re > 0$)	Inestable (respuesta divergente)



1.8.2 7.2 Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurwitz permite determinar la estabilidad **sin calcular las raíces** del polinomio característico. Se construye una **tabla de Routh** a partir de los coeficientes.

Para un polinomio $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$:

Condición necesaria: Todos los coeficientes deben tener el **mismo signo** y ser **no nulos**.

Condición necesaria y suficiente: Todos los elementos de la **primera columna** de la tabla de Routh deben ser **positivos** (o todos negativos).

1.8.3 Construcción de la tabla de Routh

Para $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$:

Fila	s^3	s^2	s^1	s^0
s^3	a_3	a_1		
s^2	a_2	a_0		
s^1	b_1			
s^0	c_1			

donde:

$$b_1 = \frac{a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0}{a_2}, \quad c_1 = a_0$$

El número de cambios de signo en la primera columna = número de polos en el semiplano derecho.

1.8.4 Casos especiales de la tabla de Routh

Caso 1: Cero en la primera columna

Si aparece un 0 en la primera columna (pero la fila no es toda ceros), se sustituye por ε (épsilon positivo pequeño) y se continúa. Al final, se toma $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Caso 2: Fila de ceros completa

Si una fila completa es cero, indica que hay polos simétricos respecto al origen (en el eje imaginario o simétricos en el eje real). Se construye un **polinomio auxiliar** con la fila anterior, se deriva y se usa como nueva fila.

Error frecuente: Olvidar que el criterio cuenta cambios de signo, no simplemente si hay negativos. $\{+, +, -, -\}$ tiene **1 cambio** de signo (no 2).

Ejercicio resuelto: Estabilidad de $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$ **Datos:** Polinomio característico $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$

Paso 1: Verificar condición necesaria: todos los coeficientes son positivos (1, 6, 11, 6). OK.

Paso 2: Construir la tabla de Routh:

Fila	Col 1	Col 2
s^3	1	11
s^2	6	6
s^1	b_1	
s^0	c_1	

$$b_1 = \frac{6 \times 11 - 1 \times 6}{6} = \frac{66 - 6}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

$$c_1 = 6$$

Paso 3: Primera columna: {1, 6, 10, 6}. Todos positivos $\rightarrow$ **0 cambios de signo.**

El sistema es ESTABLE (3 polos con $Re < 0$)

Verificación: Las raíces son $s = -1, -2, -3$ (todas negativas, confirma estabilidad).

Ejercicio resuelto: Rango de K para estabilidad de $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$ **Datos:** Polinomio característico $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$, encontrar rango de K para estabilidad.

Paso 1: Condición necesaria: todos los coeficientes del mismo signo $\rightarrow K > 0$.

Paso 2: Tabla de Routh:

Fila	Col 1	Col 2
s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	b_1	
s^0	c_1	

$$b_1 = \frac{3 \times 2 - 1 \times K}{3} = \frac{6 - K}{3}$$

$$c_1 = K$$

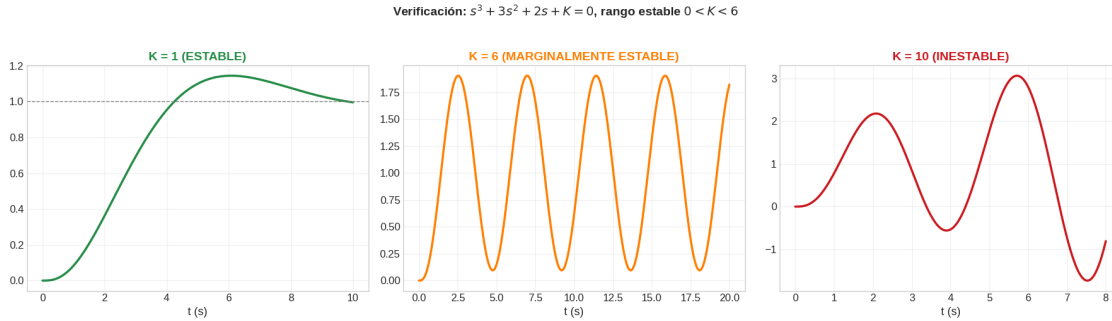
Paso 3: Para estabilidad, toda la primera columna debe ser positiva:

- $1 > 0$ (siempre)

- $3 > 0$ (siempre)
- $b_1 > 0 \Rightarrow \frac{6-K}{3} > 0 \Rightarrow K < 6$
- $c_1 > 0 \Rightarrow K > 0$

$$0 < K < 6$$

Truco para el examen: La fila s^1 siempre da la condición superior y la fila s^0 da la condición inferior. Si $K = 6$, el sistema es marginalmente estable (polos en el eje imaginario).



1.9 8. Identificación de modelos desde respuesta experimental (*Black-box*)

1.9.1 8.1 Método para primer orden

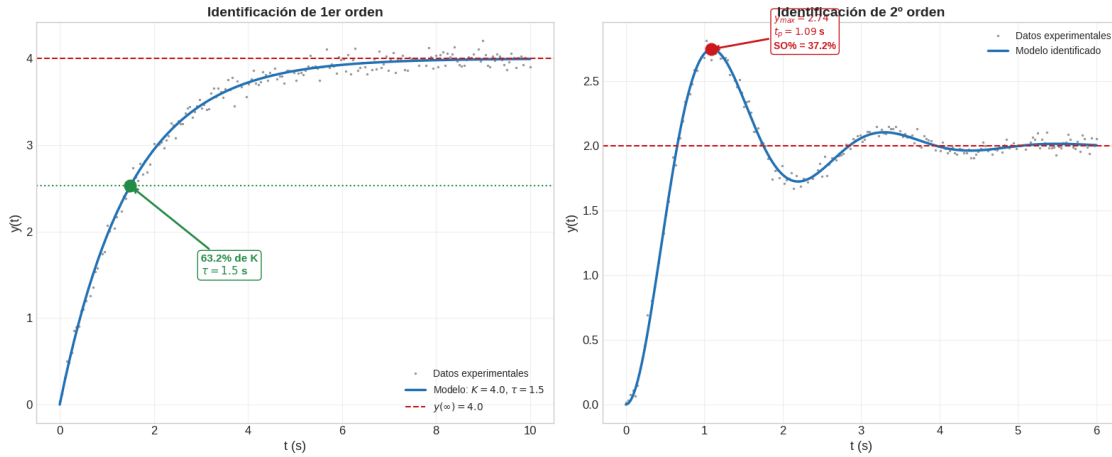
Dado un registro experimental de respuesta al escalón de amplitud A :

1. **Ganancia estática:** $K = \frac{y(\infty)}{A}$
2. **Constante de tiempo τ :** buscar el instante donde $y(t) = 0.632 \cdot y(\infty)$
3. **Modelo:** $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$

1.9.2 8.2 Método para segundo orden subamortiguado

1. **Ganancia estática:** $K = \frac{y(\infty)}{A}$
2. **Sobrepaso:** $SO\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$
3. **Factor de amortiguamiento:** $\zeta = \frac{-\ln(SO/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(SO/100)}}$
4. **Tiempo de pico t_p :** leer del gráfico (primer máximo)
5. **Frecuencia amortiguada:** $\omega_d = \frac{\pi}{t_p}$
6. **Frecuencia natural:** $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$
7. **Modelo:** $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Identificación de modelos desde respuesta experimental



Ejercicio resuelto: Identificación de 2º orden desde datos experimentales Datos leídos de la curva: $y(\infty) = 5$, $y_{\max} = 6.5$, $t_p = 2$ s, escalón de amplitud $A = 1$.

Paso 1: Ganancia estática: $K = y(\infty)/A = 5/1 = 5$

Paso 2: Sobrepaso: $SO\% = \frac{6.5 - 5}{5} \times 100 = 30\%$

Paso 3: Factor de amortiguamiento:

$$\ln(0.30) = -1.204 \Rightarrow \zeta = \frac{1.204}{\sqrt{9.87 + 1.449}} = \frac{1.204}{3.364} = \boxed{0.358}$$

Paso 4: Frecuencia amortiguada: $\omega_d = \pi/t_p = \pi/2 = 1.571$ rad/s

Paso 5: Frecuencia natural: $\omega_n = \omega_d/\sqrt{1 - \zeta^2} = 1.571/\sqrt{1 - 0.128} = 1.571/0.934 = \boxed{1.683}$ rad/s

Paso 6: Modelo:

$$G(s) = \frac{5 \times 2.832}{s^2 + 1.205s + 2.832} = \frac{14.16}{s^2 + 1.205s + 2.832}$$

1.10 9. Efecto de los ceros en la respuesta temporal

Un **cero** en la función de transferencia modifica la forma de la respuesta sin cambiar los polos (ni la estabilidad). El efecto principal es:

- **Cero negativo** (semiplano izquierdo, $s = -z$, $z > 0$): **aumenta el sobrepaso** y acelera la respuesta
- **Cero positivo** (semiplano derecho, *non-minimum phase*): produce un **undershoot** inicial (la respuesta va primero en sentido contrario)
- Cuanto **más cerca del origen** está el cero, mayor es su efecto

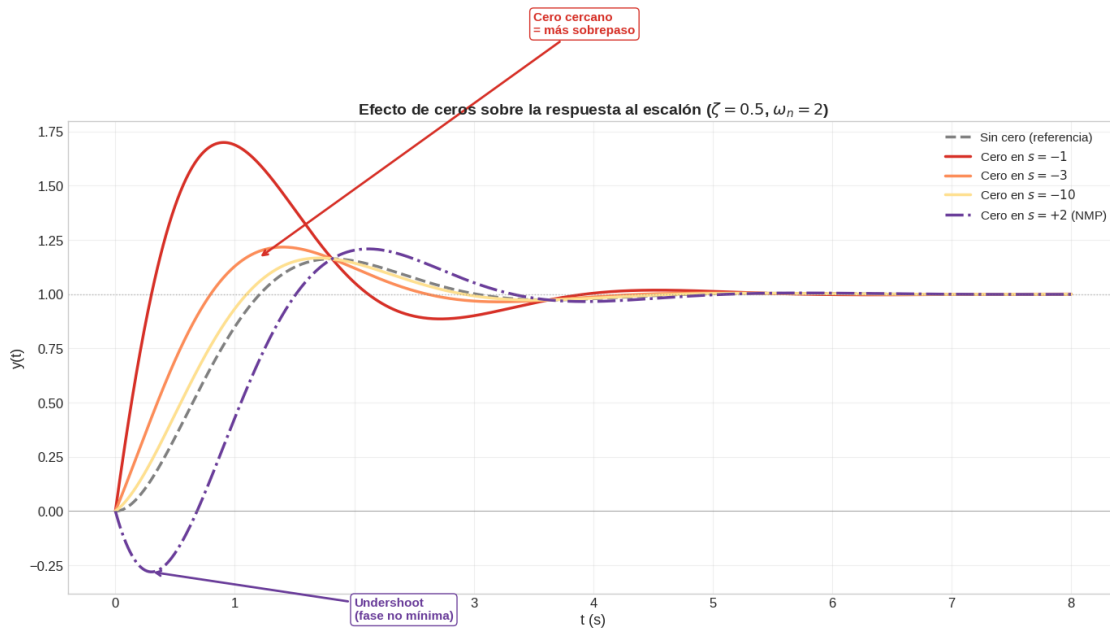
La función de transferencia con un cero es:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2(1 + s/z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Resumen visual: efecto de un cero sobre la respuesta

Ubicación del cero	Efecto sobre SO%	Efecto sobre t_r	Ejemplo
$s = -z$ lejano ($z \gg \omega_n$)	Casi ninguno	Casi ninguno	$z = 100$
$s = -z$ cercano ($z \approx \omega_n$)	Aumenta significativamente	Disminuye	$z = 1$
$s = +z$ (semiplano derecho)	Puede disminuir	Puede aumentar + undershoot	$z = 2$

Regla práctica: Si $z > 10\omega_n$, el efecto del cero es despreciable.



1.11 10. Respuesta a otras señales de prueba

1.11.1 10.1 Respuesta al impulso

La respuesta al impulso es la **derivada** de la respuesta al escalón. Para un sistema de primer orden:

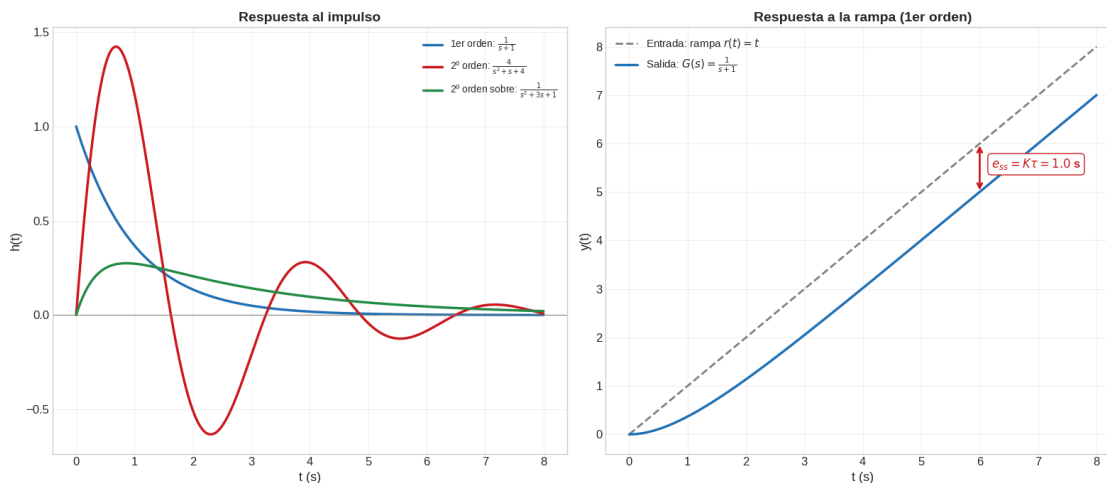
$$h(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0$$

1.11.2 10.2 Respuesta a la rampa

Para un sistema de primer orden $G(s) = K/(\tau s + 1)$ ante rampa unitaria $R(s) = 1/s^2$:

$$y(t) = K \left[t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \right], \quad t \geq 0$$

El error en régimen permanente ante rampa es $e_{ss} = K\tau$ (constante).



Relación entre respuesta al impulso y al escalón:

$$h(t) = \frac{d}{dt}[y_{\text{escalón}}(t)]$$

Esto es útil porque si se dispone de la respuesta al impulso, se puede obtener la respuesta al escalón por integración, y viceversa. En el dominio de Laplace, multiplicar por $1/s$ (escalón) equivale a integrar en el dominio temporal.

1.12 11. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

Esta sección clasifica los **14 tipos** de problemas más frecuentes en exámenes de respuesta temporal.

#	Tipo	Te dan	Te piden	Fórmula clave
1	Respuesta 1er orden al escalón	$G(s) = K/(\tau s + 1)$	$y(t), y(\infty), t_s$	$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$
2	Respuesta 2º orden al escalón	$G(s)$ estándar	$\zeta, \omega_n, \text{SO}\%, t_s, t_r$	Fórmulas de 2º orden

#	Tipo	Te dan	Te piden	Fórmula clave
3	Calcular ζ y ω_n desde polos	Polos $s_{1,2}$	ζ, ω_n	$\omega_n = \ s\ , \zeta = \cos(\theta)$
4	SO% desde ζ	ζ	SO%	$SO\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100$
5	Calcular t_s	ζ, ω_n	t_s	$t_s \approx 4/(\zeta\omega_n)$
6	Tabla de Routh	Polinomio caract.	Estabilidad	Construcción de tabla
7	Rango de K para estabilidad	Polinomio con K	$K_{\min}, K_{\max}$	Routh con K simbólico
8	Polos dominantes	Sistema orden > 2	Aproximación 2º orden	Regla $\times 5$
9	Identificar modelo desde curva	Gráfica escalón	K, τ o ζ, ω_n	Métodos de identificación
10	Efecto de ceros	$G(s)$ con cero	Cambio en SO%	Comparar con/sin cero
11	Respuesta a la rampa	$G(s)$	$y(t), e_{ss}$	Respuesta rampa
12	Respuesta al impulso	$G(s)$	$h(t)$	$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
13	Aproximación de orden superior	Sistema 3er/4º orden	Modelo reducido	Polos dominantes
14	Retardo temporal	$G(s) \cdot e^{-Ls}$	Efecto del retardo	Padé: $e^{-Ls} \approx \frac{1-Ls/2}{1+Ls/2}$

1.12.1 Metodología general de resolución

Para cualquier problema de respuesta temporal, seguir estos pasos:

1. **Identificar el tipo de sistema:** ¿1er orden, 2º orden, orden superior?
2. **Extraer parámetros:** K, τ (1er orden) o K, ζ, ω_n (2º orden)
3. **Clasificar:** Si es 2º orden: ¿subamortiguado ($\zeta < 1$), críticamente amortiguado ($\zeta = 1$), o sobreamortiguado ($\zeta > 1$)?
4. **Aplicar fórmulas:** Usar las fórmulas correspondientes a la clasificación
5. **Verificar coherencia:** ¿El resultado tiene sentido físico? ¿Los tiempos son positivos? ¿El SO% está entre 0 y 100%?
6. **Si hay polos dominantes:** Simplificar a 2º orden antes de calcular

1.12.2 11.1 Tipo 1: Respuesta de primer orden al escalón

Te dan: $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$ y entrada escalón de amplitud A .

Te piden: $y(t)$, $y(\infty)$, t_s , valor en un instante concreto.

$$y(t) = K \cdot A (1 - e^{-t/\tau})$$

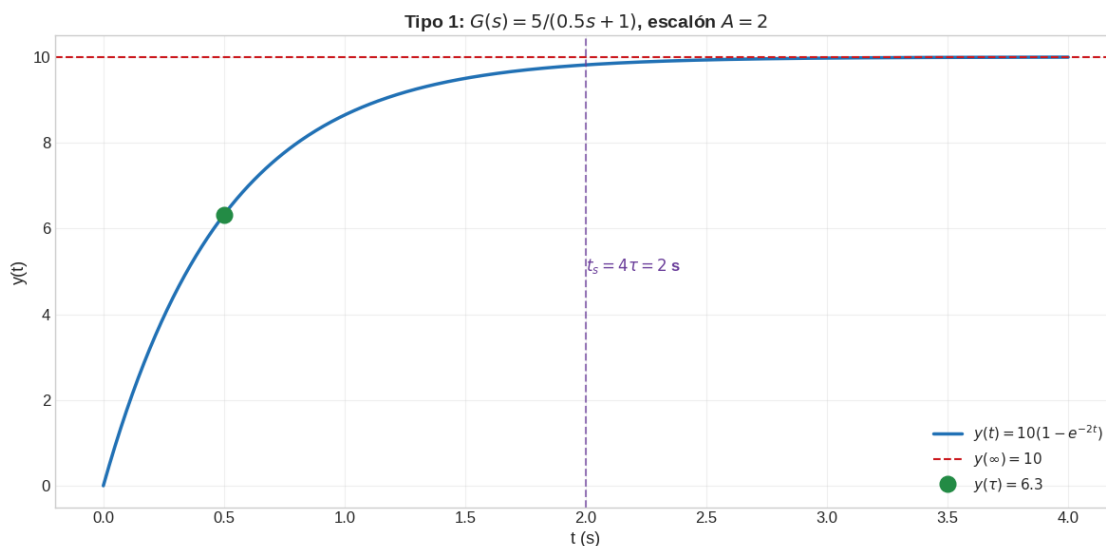
Paso a paso: 1. Identificar K y τ comparando con la forma estándar 2. Calcular $y(\infty) = K \cdot A$
3. Para valor en t_0 : sustituir en la fórmula 4. $t_s(2\%) = 4\tau$, $t_s(5\%) = 3\tau$

Ejercicio: $G(s) = \frac{5}{0.5s + 1}$, **escalón de amplitud 2** **Datos:** $K = 5$, $\tau = 0.5$ s, $A = 2$

$$y(t) = 5 \times 2 \times (1 - e^{-t/0.5}) = 10(1 - e^{-2t})$$

$$y(\infty) = 10, \quad t_s(2\%) = 4 \times 0.5 = \boxed{2 \text{ s}}$$

$$y(0.5) = 10(1 - e^{-1}) = 10 \times 0.632 = 6.32$$



1.12.3 11.2 Tipo 2: Respuesta de segundo orden al escalón

Te dan: $G(s)$ en forma estándar o expandida.

Te piden: ζ , ω_n , SO%, t_s , t_r , t_p , ω_d , polos.

Paso a paso: 1. Poner en forma estándar: $\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 2. Identificar ω_n^2 del término independiente del denominador 3. Identificar $2\zeta\omega_n$ del coeficiente de s 4. Clasificar según ζ (sub/sobre/crítico) 5. Aplicar fórmulas correspondientes

Ejercicio: $G(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$ **Paso 1:** $\omega_n^2 = 25 \Rightarrow \omega_n = 5 \text{ rad/s}$

Paso 2: $2\zeta\omega_n = 6 \Rightarrow \zeta = 6/(2 \times 5) = 0.6$ (subamortiguado)

Paso 3: $\omega_d = 5\sqrt{1 - 0.36} = 5 \times 0.8 = 4 \text{ rad/s}$

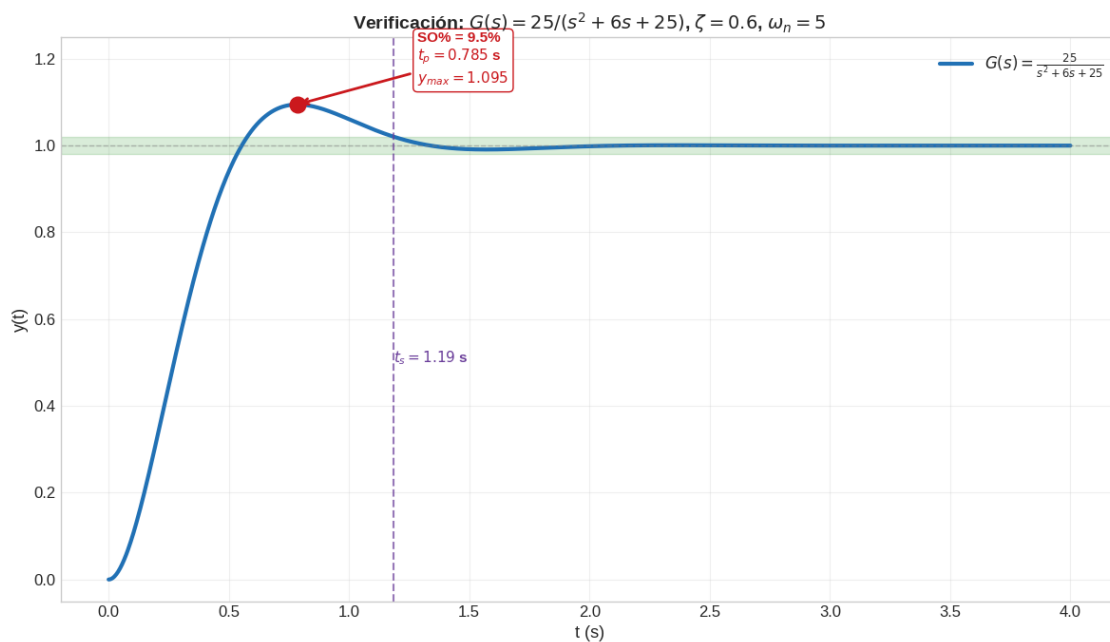
Paso 4: $SO\% = e^{-\pi \times 0.6 / 0.8} \times 100 = e^{-2.356} \times 100 = \boxed{9.48\%}$

Paso 5: $t_s \approx 4/(0.6 \times 5) = \boxed{1.33 \text{ s}}$

Paso 6: $t_r \approx (\pi - \arccos(0.6))/4 = (3.1416 - 0.9273)/4 = \boxed{0.554 \text{ s}}$

Paso 7: $t_p = \pi/4 = \boxed{0.785 \text{ s}}$

Paso 8: Polos: $s_{1,2} = -3 \pm 4j$



1.12.4 11.3 Tipo 3: Calcular ζ y ω_n desde los polos

Te dan: Polos $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$

Te piden: ζ , ω_n

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} = |s| \quad \zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \cos(\theta)$$

donde $\theta = \arctan(\omega_d/\sigma)$ es el ángulo respecto al eje real negativo.

Ejercicio: Polos en $s_{1,2} = -2 \pm 3j$

$$\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = \boxed{3.606 \text{ rad/s}}$$

$$\zeta = \frac{2}{3.606} = \boxed{0.555}$$

1.12.5 11.4 Tipo 4: SO% desde ζ (y viceversa)

Directo: dado ζ , calcular SO%:

$$SO\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100$$

Inverso: dado SO%, calcular ζ :

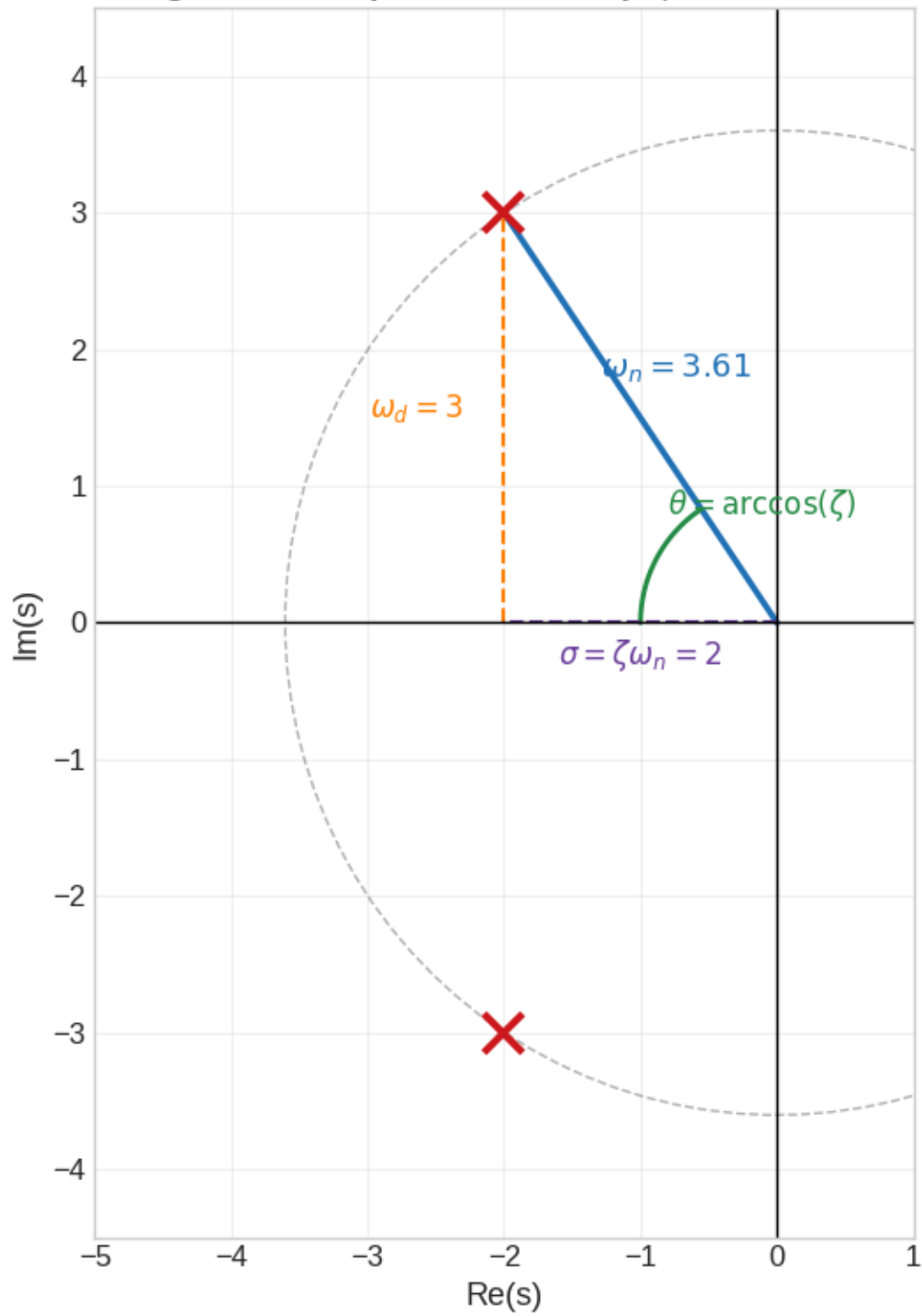
$$\zeta = \frac{-\ln(SO/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(SO/100)}}$$

Ejercicio: Dado SO% = 20%, hallar ζ

$$\ln(0.20) = -1.6094$$

$$\zeta = \frac{1.6094}{\sqrt{\pi^2 + 1.6094^2}} = \frac{1.6094}{\sqrt{9.8696 + 2.5902}} = \frac{1.6094}{3.533} = \boxed{0.456}$$

Relación geométrica: polo $s = -2 + 3j$, $\zeta = 0.555$, $\omega_n = 3.61$



1.12.6 11.5 Tipo 5: Cálculo de t_s

Te dan: ζ , ω_n (o datos para calcularlos)

Te piden: Tiempo de establecimiento

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$t_s(5\%) \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

Ejercicio: $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 4$ rad/s

$$t_s(2\%) = \frac{4}{0.5 \times 4} = \frac{4}{2} = \boxed{2 \text{ s}}$$

1.12.7 11.6 Tipo 6: Tabla de Routh (estabilidad directa)

Te dan: Polinomio característico con coeficientes numéricos.

Te piden: ¿Es estable? ¿Cuántos polos inestables?

Paso a paso: 1. Verificar condición necesaria (todos coeficientes mismo signo y no nulos) 2. Construir tabla de Routh fila por fila 3. Contar cambios de signo en primera columna 4. Cambios de signo = número de polos con $Re > 0$

Ejercicio: $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

Fila	Col 1	Col 2	Col 3
s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	$\frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{2} = 1$	$\frac{2 \times 5 - 1 \times 0}{2} = 5$	
s^1	$\frac{1 \times 4 - 2 \times 5}{1} = -6$		
s^0	5		

Primera columna: $\{1, 2, 1, -6, 5\} \rightarrow$ **2 cambios de signo** ($1 \rightarrow -6$ y $-6 \rightarrow 5$).

INESTABLE: 2 polos en semiplano derecho

Errores frecuentes en el criterio de Routh-Hurwitz:

1. **Olvidar la condición necesaria:** Si algún coeficiente es negativo o cero, el sistema ya es inestable (para polinomios con coeficientes reales positivos).
2. **Confundir cambios de signo:** $\{+, -, +\}$ tiene **2 cambios** de signo $\rightarrow$ 2 polos inestables.
3. **No normalizar:** El coeficiente líder (a_n) debe ser positivo. Si es negativo, multiplicar todo por -1 .
4. **Fila de ceros:** Indica polos simétricos (ej. $\pm j\omega$), requiere tratamiento especial con polinomio auxiliar.

1.12.8 11.7 Tipo 7: Rango de K para estabilidad

Te dan: Polinomio característico con parámetro K .

Te piden: Rango de K que garantiza estabilidad.

Paso a paso: 1. Construir tabla de Routh dejando K como variable 2. Imponer que todos los elementos de la primera columna sean positivos 3. Resolver las desigualdades

Ejercicio: $s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + K = 0$

Fila	Col 1	Col 2	Col 3
s^4	1	6	K
s^3	4	4	
s^2	$\frac{4 \times 6 - 1 \times 4}{4} = 5$	K	
s^1	$\frac{5 \times 4 - 4K}{5} = \frac{20-4K}{5}$		
s^0	K		

Condiciones: $K > 0$ y $\frac{20-4K}{5} > 0 \Rightarrow K < 5$

$$0 < K < 5$$

1.12.9 11.8 Tipo 8: Polos dominantes

Te dan: Sistema de orden ≥ 3 con polos calculados.

Te piden: Modelo aproximado de 2º orden.

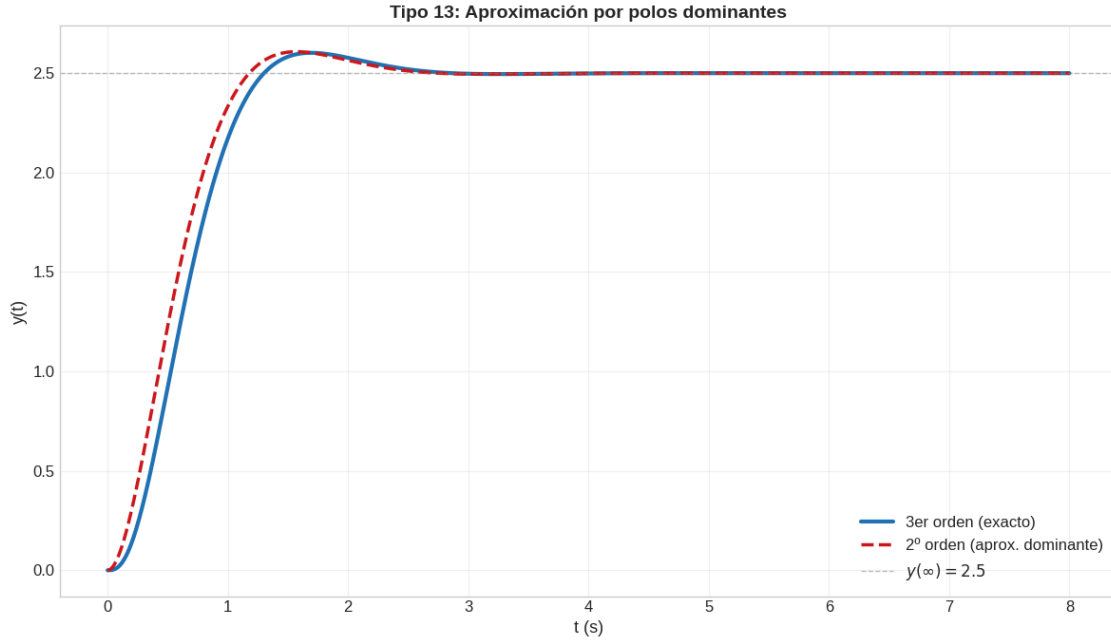
Paso a paso: 1. Calcular todos los polos 2. Identificar los polos más cercanos al eje imaginario (menor $|\text{Re}|$) 3. Verificar que la regla $\times 5$ se cumple 4. Construir modelo de 2º orden con los polos dominantes

Ejercicio: $G(s) = \frac{60}{(s^2 + 2s + 5)(s + 6)}$ Polos: $s_{1,2} = -1 \pm 2j$ (dominantes), $s_3 = -6$ (lejano).

Verificación: $|-6|/|-1| = 6 > 5 \rightarrow$ se puede aproximar.

Modelo reducido con ganancia estática unitaria:

$$G_{\text{aprox}}(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$



1.12.10 11.9 Tipo 9: Identificar modelo desde curva experimental

Te dan: Gráfica de respuesta al escalón (con valores numéricos legibles).

Te piden: Función de transferencia $G(s)$.

Para primer orden (sin oscilaciones, sin sobrepaso): 1. $K = y(\infty)/A$ 2. τ : leer el tiempo donde $y = 0.632 \cdot y(\infty)$ 3. $G(s) = K/(\tau s + 1)$

Para segundo orden (con oscilaciones): 1. $K = y(\infty)/A$ 2. $SO\% = (y_{\max} - y(\infty))/y(\infty) \times 100$ 3. $\zeta = -\ln(SO/100)/\sqrt{\pi^2 + \ln^2(SO/100)}$ 4. t_p = tiempo del primer pico 5. $\omega_d = \pi/t_p$ 6. $\omega_n = \omega_d/\sqrt{1 - \zeta^2}$ 7. $G(s) = K\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$

Ejercicio: De la curva se lee $y(\infty) = 3$, $y_{\max} = 3.9$, $t_p = 1.5$ s, escalón de amplitud 1

$$K = 3, \quad SO\% = \frac{3.9 - 3}{3} \times 100 = 30\%$$

$$\zeta = \frac{-\ln(0.30)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.30)}} = \frac{1.204}{\sqrt{9.87 + 1.45}} = \frac{1.204}{3.364} = \boxed{0.358}$$

$$\omega_d = \frac{\pi}{1.5} = 2.094 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{2.094}{\sqrt{1 - 0.128}} = \frac{2.094}{0.934} = \boxed{2.243 \text{ rad/s}}$$

$$G(s) = \frac{3 \times 5.03}{s^2 + 1.607s + 5.03} = \frac{15.09}{s^2 + 1.607s + 5.03}$$

1.12.11 11.10 Tipo 10: Efecto de ceros

Te dan: $G(s)$ con cero adicional.

Te piden: Comparar respuesta con y sin cero, explicar efecto.

Reglas clave: - Cero en $s = -z$ (semiplano izquierdo): **incrementa** SO% y **acelera** la respuesta
 - Cuanto menor es z (cero más cerca del origen), mayor es el efecto - Cero en $s = +z$ (semiplano derecho): produce **undershoot** (*non-minimum phase*)

1.12.12 11.11 Tipo 11: Respuesta a la rampa

Te dan: $G(s)$ y entrada rampa.

Te piden: $y(t)$, error en régimen permanente.

Para primer orden $G(s) = K/(\tau s + 1)$:

$$y(t) = K[t - \tau + \tau e^{-t/\tau}] \quad e_{ss} = K\tau$$

Ejercicio: $G(s) = \frac{2}{3s + 1}$, rampa unitaria

$$e_{ss} = K\tau = 2 \times 3 = \boxed{6}$$

1.12.13 11.12 Tipo 12: Respuesta al impulso

Te dan: $G(s)$ y entrada impulso $\delta(t)$.

Te piden: $h(t)$ = respuesta impulsional.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Para primer orden: $h(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}$

Para segundo orden subamortiguado: $h(t) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$

Ejercicio: $G(s) = \frac{4}{2s + 1}$

$$h(t) = \frac{4}{2} e^{-t/2} = \boxed{2e^{-0.5t}}$$

Tabla de fórmulas inversas útiles para identificación:

Dato experimental	Fórmula para obtener parámetro	Parámetro
$y(\infty)$ y amplitud A	$K = y(\infty)/A$	Ganancia estática
Tiempo al 63.2%	$\tau = t_{63.2\%}$	Constante de tiempo
$y_{\max}$ y $y(\infty)$	$SO\% = (y_{\max} - y(\infty))/y(\infty) \times 100$	Sobrepaso
SO%	$\zeta = \ \ln(SO/100)\ /\sqrt{\pi^2 + \ln^2(SO/100)}$	Amortiguamiento
t_p	$\omega_d = \pi/t_p$	Frec. amortiguada
ω_d y ζ	$\omega_n = \omega_d/\sqrt{1 - \zeta^2}$	Frec. natural
Periodo de oscilación T	$\omega_d = 2\pi/T$	Frec. amortiguada

1.12.14 11.13 Tipo 13: Aproximación de sistema de orden superior

Te dan: Sistema de 3er o 4º orden.

Te piden: Modelo reducido de 2º orden y comparación de respuestas.

Paso a paso: 1. Factorizar denominador y encontrar todos los polos 2. Identificar par de polos complejos conjugados más cercanos al eje imaginario 3. Verificar que los polos restantes son al menos 5× más lejanos 4. Construir $G_{\text{aprox}}(s)$ con los polos dominantes, ajustando K para mantener la ganancia estática

Ejercicio: $G(s) = \frac{200}{(s+10)(s^2+4s+8)}$ Polos: $s_1 = -10$, $s_{2,3} = -2 \pm 2j$ (dominantes)

Verificación: $10/2 = 5 \rightarrow$ justo en el límite, pero aceptable.

Ganancia estática original: $G(0) = 200/(10 \times 8) = 2.5$

$$G_{\text{aprox}}(s) = \frac{2.5 \times 8}{s^2 + 4s + 8} = \frac{20}{s^2 + 4s + 8}$$

1.12.15 11.14 Tipo 14: Aproximación de retardo temporal (Padé)

Te dan: $G(s) \cdot e^{-Ls}$ donde L es el retardo puro.

Te piden: Aproximación racional del retardo.

La aproximación de Padé de primer orden convierte el retardo en una función racional:

$$e^{-Ls} \approx \frac{1 - Ls/2}{1 + Ls/2} = \frac{2 - Ls}{2 + Ls}$$

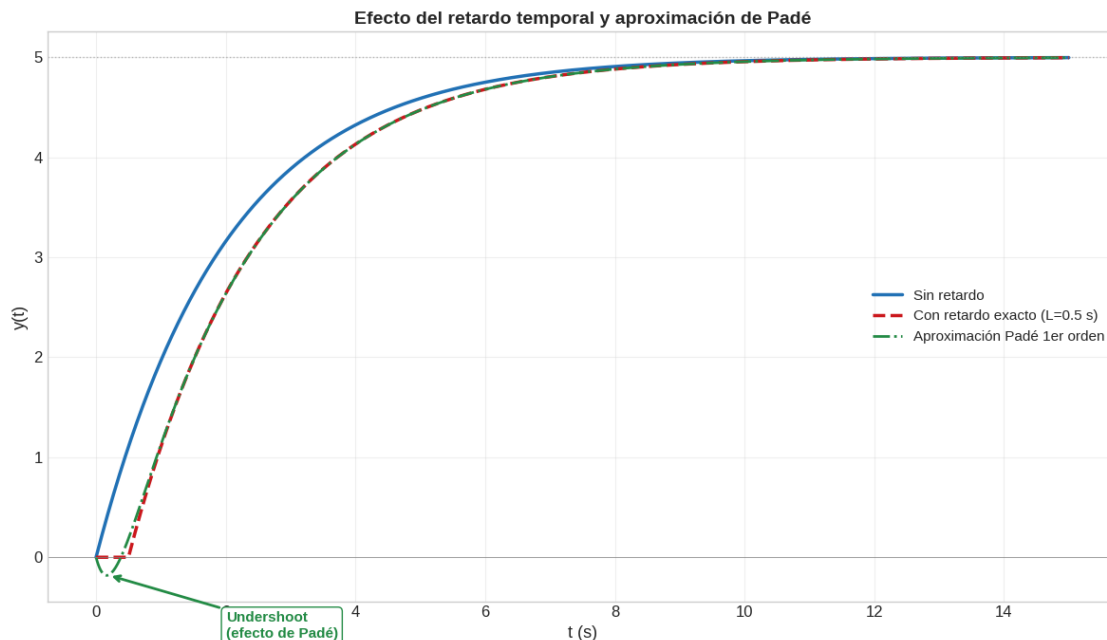
Error frecuente: El cero está en el semiplano **derecho** ($s = 2/L > 0$), lo que introduce un **undershoot** en la respuesta. El retardo NO afecta a la estabilidad del sistema en lazo abierto, pero sí reduce los márgenes de estabilidad en lazo cerrado.

Ejercicio: $G(s) = \frac{5}{2s+1} \cdot e^{-0.5s}$ Aproximación Padé: $e^{-0.5s} \approx \frac{1-0.25s}{1+0.25s}$

$$G_{\text{aprox}}(s) = \frac{5}{2s+1} \cdot \frac{1-0.25s}{1+0.25s} = \frac{5(1-0.25s)}{(2s+1)(0.25s+1)}$$

1.12.16 Tabla resumen del catálogo por tipo

#	Tipo	Lo más importante
1	Resp. 1er orden escalón	$y(t) = KA(1 - e^{-t/\tau})$, $t_s = 4\tau$
2	Resp. 2º orden escalón	Identificar ζ , ω_n , luego fórmulas
3	ζ , ω_n desde polos	$\omega_n = \ s\ $, $\zeta = \cos \theta$
4	SO% $\leftrightarrow \zeta$	Fórmula exponencial (directa e inversa)
5	t_s	$4/(\zeta\omega_n)$ al 2%, $3/(\zeta\omega_n)$ al 5%
6	Routh (numérico)	Construir tabla, contar cambios de signo
7	Routh (paramétrico)	Dejar K simbólico, resolver desigualdades
8	Polos dominantes	Regla $\times 5$, ajustar ganancia estática
9	Identificar desde curva	Leer $y(\infty)$, $y_{\max}$, t_p o $t_{63\%}$
10	Efecto de ceros	Cero cercano $\rightarrow$ más SO%, cero RHP $\rightarrow$ undershoot
11	Resp. rampa	$e_{ss} = K\tau$ (1er orden)
12	Resp. impulso	$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
13	Aprox. orden superior	Factorizar, identificar dominantes, reducir
14	Retardo (Padé)	$(2 - Ls)/(2 + Ls)$, cuidado con undershoot



1.13 12. Resumen y tablas de fórmulas clave

1.13.1 12.1 Primer orden: $G(s) = K/(\tau s + 1)$

Fórmula	Uso
$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$	Respuesta al escalón unitario
$h(t) = (K/\tau)e^{-t/\tau}$	Respuesta al impulso
$t_s(2\%) = 4\tau$	Tiempo de establecimiento
$t_s(5\%) = 3\tau$	Tiempo de establecimiento (criterio 5%)
$y(\tau) = 0.632K$	Valor a una constante de tiempo
Polo: $s = -1/\tau$	Ubicación en plano s

1.13.2 12.2 Segundo orden: $G(s) = K\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$

Fórmula	Uso
$SO\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100$	Sobrepaso máximo
$\zeta = -\ln(SO/100)/\sqrt{\pi^2 + \ln^2(SO/100)}$	ζ desde SO% (inversa)
$t_s(2\%) \approx 4/(\zeta\omega_n)$	Tiempo de establecimiento
$t_p = \pi/\omega_d$	Tiempo de pico
$t_r \approx (\pi - \arccos \zeta)/\omega_d$	Tiempo de subida
$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$	Frecuencia amortiguada
$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$	Polos
$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$	ω_n desde polos
$\zeta = \sigma/\omega_n = \cos(\theta)$	ζ desde polos

1.13.3 12.3 Estabilidad

Concepto	Condición
Estable	Todos los polos con $Re < 0$
Routh-Hurwitz	Primera columna toda positiva (o toda negativa)
Cambios de signo	= Número de polos inestables
Polos dominantes	$\ Re(p_{\text{lejano}})\ \geq 5 \cdot \ Re(p_{\text{dom}})\ $

1.13.4 12.4 Identificación

Dato medido	Fórmula	Parámetro obtenido
$y(\infty)$	$K = y(\infty)/A$	Ganancia estática
$y(t_{63\%})$	$\tau = t_{63\%}$	Constante de tiempo (1er orden)

Dato medido	Fórmula	Parámetro obtenido
$y_{\max}$	$SO\% \rightarrow \zeta$	Factor de amortiguamiento
t_p	$\omega_d = \pi/t_p$	Frecuencia amortiguada

1.13.5 12.5 Retardo temporal

Fórmula	Uso
$e^{-Ls} \approx (2 - Ls)/(2 + Ls)$	Aproximación de Padé (1er orden)