

# 04\_respuesta\_frecuencial

June 19, 2026

## 1 Tema 4 - Análisis de la Respuesta Frecuencial

### Fundamentos de Control - GIERM

---

#### 1.1 Objetivos de aprendizaje

- Comprender el concepto de respuesta frecuencial: cómo un sistema lineal modifica la amplitud y fase de una señal sinusoidal
- Construir diagramas de Bode (magnitud y fase) a partir de los bloques básicos: ganancia, integrador, polos y ceros reales, polos complejos
- Dibujar diagramas de Bode asintóticos y compararlos con la curva real
- Trazar diagramas de Nyquist e interpretar su significado
- Analizar el efecto del retardo puro en la respuesta frecuencial
- Identificar las frecuencias de cruce de ganancia y de fase

Configuración lista.

---

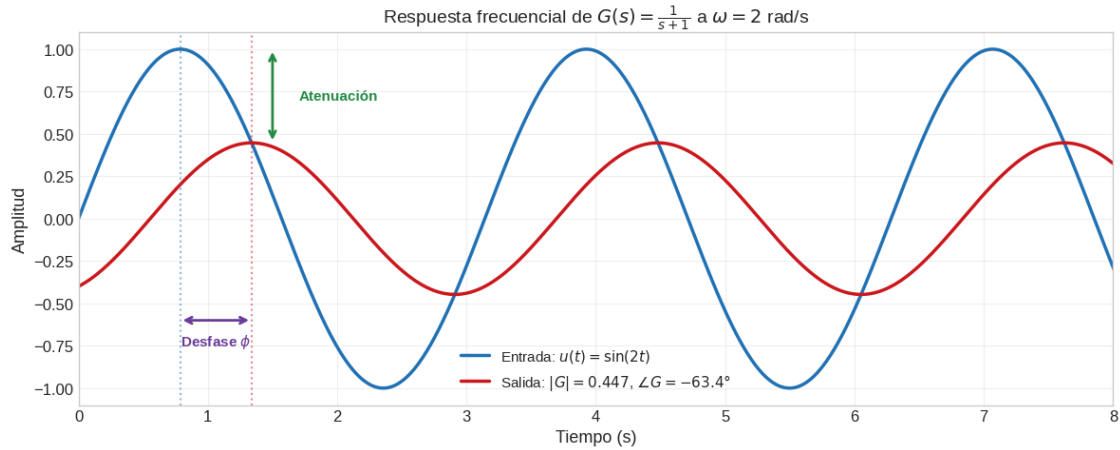
#### 1.2 1. Concepto de respuesta frecuencial

Cuando aplicamos una **entrada sinusoidal**  $u(t) = A \sin(\omega t)$  a un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) con función de transferencia  $G(s)$ , la **salida en régimen permanente** es también una senoide de la misma frecuencia, pero con amplitud y fase modificadas:

$$y_{ss}(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Donde: -  $|G(j\omega)|$  es la **magnitud** de la función de transferencia evaluada en  $s = j\omega \rightarrow$  factor de escala de la amplitud -  $\angle G(j\omega)$  es la **fase**  $\rightarrow$  desfase entre entrada y salida

**Idea clave:** La respuesta frecuencial describe *cómo el sistema filtra cada frecuencia*. Frecuencias que el sistema amplifica tendrán  $|G(j\omega)| > 1$ ; las que atenúa,  $|G(j\omega)| < 1$ .



### 1.3 2. Diagrama de Bode: fundamentos

El **diagrama de Bode** consiste en dos gráficas con eje de frecuencia logarítmico:

1. **Magnitud** en decibelios:  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$  vs  $\log \omega$
2. **Fase** en grados:  $\angle G(j\omega)$  vs  $\log \omega$

**Ventaja clave:** al usar escalas logarítmicas, la multiplicación de funciones de transferencia se convierte en **suma de diagramas individuales**:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \Rightarrow \begin{cases} |G|_{\text{dB}} = |G_1|_{\text{dB}} + |G_2|_{\text{dB}} \\ \angle G = \angle G_1 + \angle G_2 \end{cases}$$

Esto permite construir el Bode de cualquier sistema **sumando los bloques básicos**.

### 1.4 3. Bloques básicos del diagrama de Bode

Todo sistema racional se descompone en estos bloques:

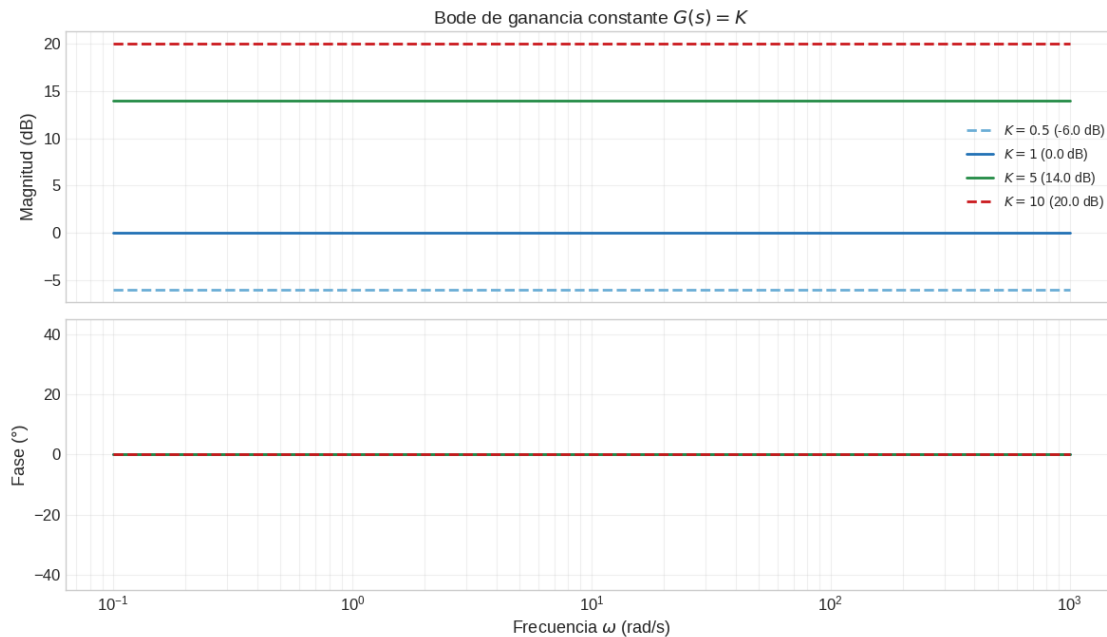
| Bloque     | Forma                  | Magnitud                                               | Fase                                              |
|------------|------------------------|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Ganancia   | $K$                    | $20 \log  K $ dB (constante)                           | $0^\circ$ si $K > 0$ ,<br>$-180^\circ$ si $K < 0$ |
| Integrador | $\frac{1}{s}$          | $-20$ dB/dec                                           | $-90^\circ$ constante                             |
| Derivador  | $s$                    | $+20$ dB/dec                                           | $+90^\circ$ constante                             |
| Polo real  | $\frac{1}{\tau s + 1}$ | $0$ dB hasta $\omega = 1/\tau$ , luego<br>$-20$ dB/dec | $0^\circ$ a $-90^\circ$                           |
| Cero real  | $\tau s + 1$           | $0$ dB hasta $\omega = 1/\tau$ , luego<br>$+20$ dB/dec | $0^\circ$ a $+90^\circ$                           |

| Bloque          | Forma                                              | Magnitud                         | Fase                     |
|-----------------|----------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------|
| Polos complejos | $\frac{1}{s^2/\omega_n^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1}$ | Pico de resonancia en $\omega_n$ | $0^\circ$ a $-180^\circ$ |

### 1.4.1 3.1 Ganancia constante $K$

$$G(s) = K$$

- **Magnitud:** línea horizontal a  $20 \log_{10}(K)$  dB
- **Fase:**  $0^\circ$  (si  $K > 0$ ) o  $-180^\circ$  (si  $K < 0$ )

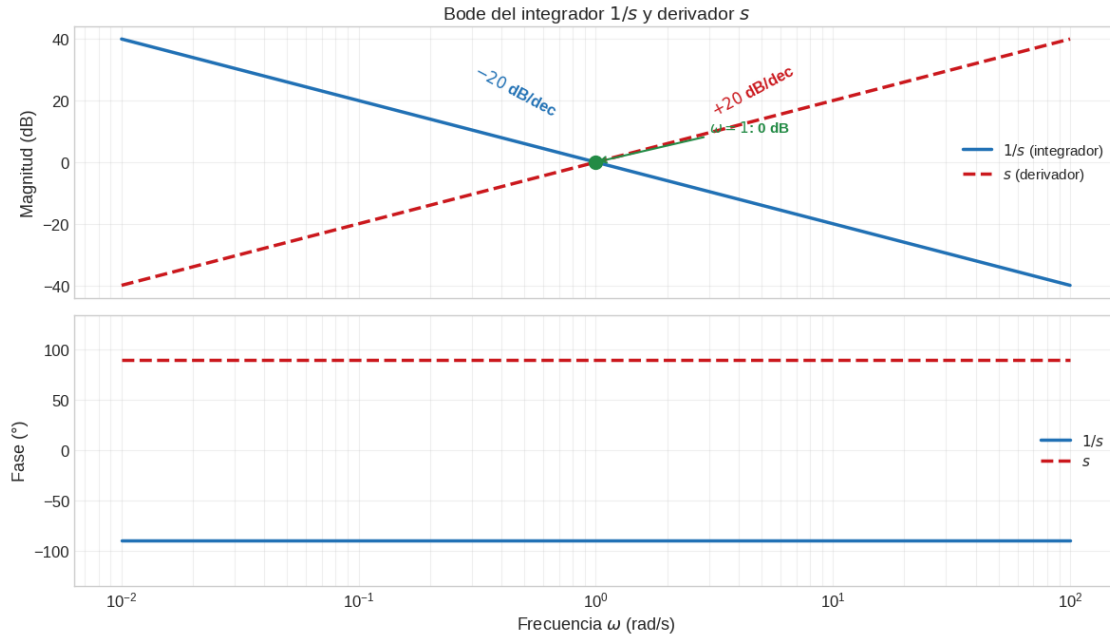


### 1.4.2 3.2 Integrador $1/s$ y derivador $s$

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10}(\omega), \quad \angle G = -90^\circ$$

- La magnitud es una recta con pendiente  $-20$  dB/dec que pasa por 0 dB en  $\omega = 1$  rad/s
- La fase es constante a  $-90^\circ$

Para el **derivador**  $G(s) = s$ : pendiente  $+20$  dB/dec, fase  $+90^\circ$ .



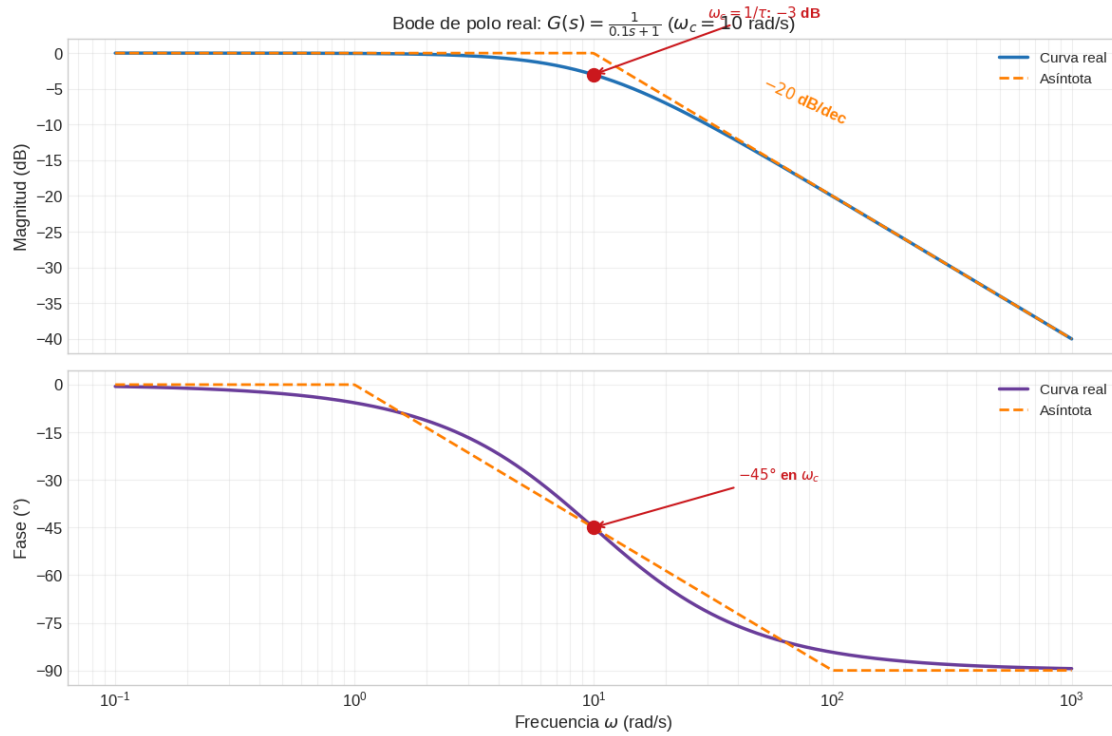
### 1.4.3 3.3 Polo real: $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$

La frecuencia de corte (o de esquina) es  $\omega_c = 1/\tau$ .

**Asíntotas de magnitud:** -  $\omega \ll \omega_c$ :  $|G| \approx 1 \rightarrow 0$  dB -  $\omega \gg \omega_c$ :  $|G| \approx 1/(\omega\tau) \rightarrow$  pendiente  $-20$  dB/dec - En  $\omega = \omega_c$ : error de la asíntota =  $-3$  dB

**Fase:** -  $\omega \ll \omega_c/10$ :  $\approx 0^\circ$  -  $\omega = \omega_c$ :  $-45^\circ$  -  $\omega \gg 10\omega_c$ :  $\approx -90^\circ$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

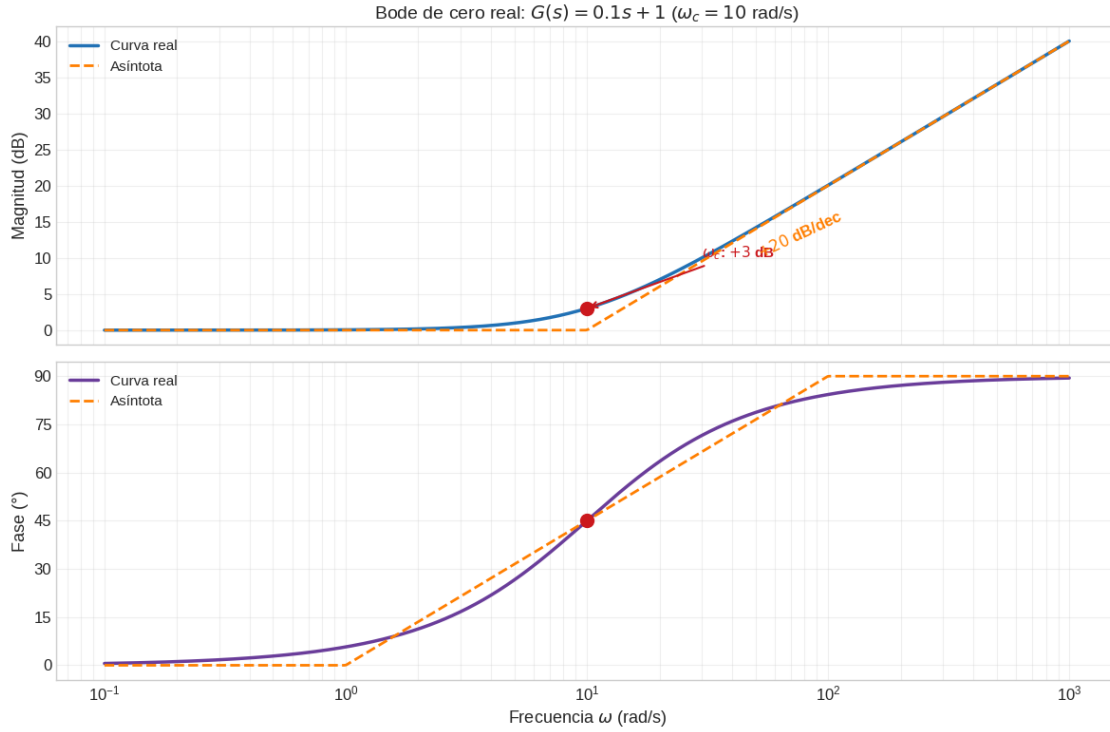


#### 1.4.4 3.4 Cero real: $G(s) = \tau s + 1$

Es el **inverso del polo real**: las asíntotas y la fase tienen signo contrario.

- $\omega \ll 1/\tau$ : 0 dB, fase  $\approx 0^\circ$
- $\omega \gg 1/\tau$ : pendiente +20 dB/dec, fase  $\approx +90^\circ$
- En  $\omega = 1/\tau$ : magnitud +3 dB sobre la asíntota, fase =  $+45^\circ$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}, \quad \angle G(j\omega) = +\arctan(\omega\tau)$$



#### 1.4.5 3.5 Polos complejos conjugados

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

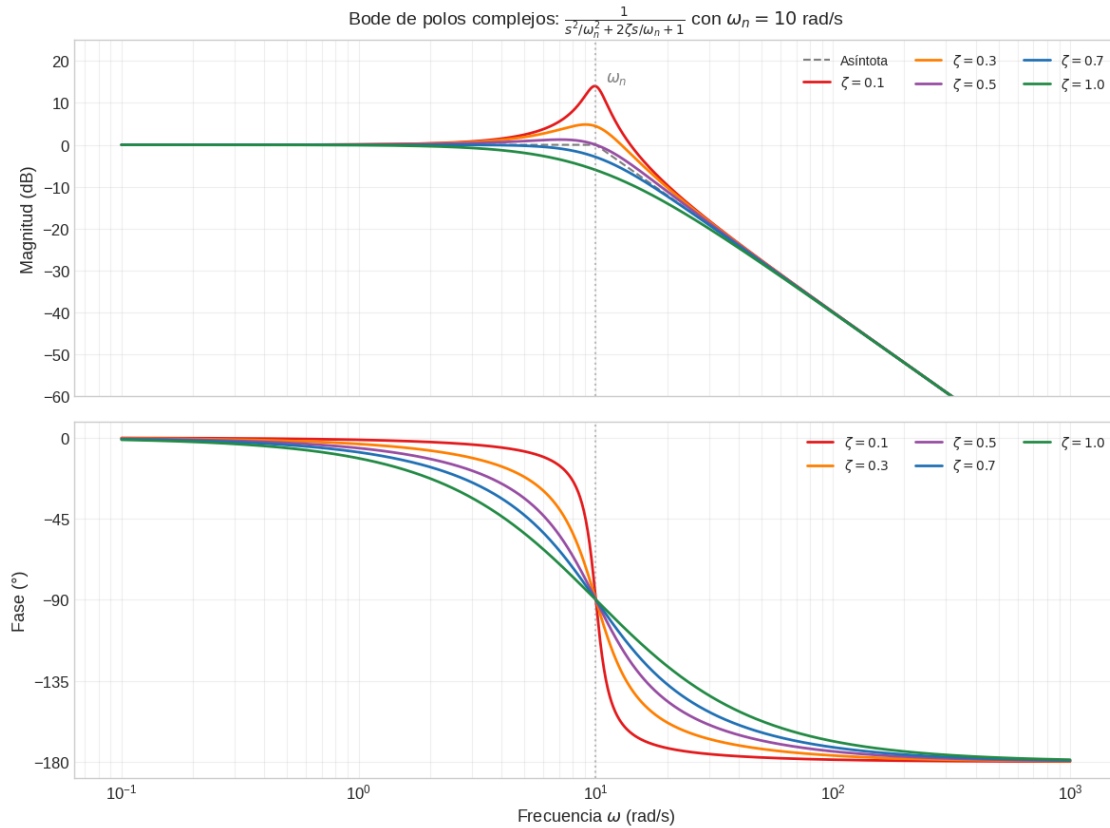
El comportamiento depende críticamente del **factor de amortiguamiento**  $\zeta$ :

- $\zeta < 0.707$ : aparece un **pico de resonancia** en la magnitud
- $\zeta = 0.707$ : la curva pasa suavemente por la frecuencia  $\omega_n$  (sin pico)
- $\zeta \rightarrow 0$ : pico infinito (sistema oscilatorio)

**Asíntotas de magnitud:** -  $\omega \ll \omega_n$ : 0 dB -  $\omega \gg \omega_n$ : pendiente  $-40$  dB/dec (doble polo)

**Fase:** transición de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  centrada en  $\omega_n$ , tanto más brusca cuanto menor sea  $\zeta$ .

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{pico de resonancia, para } \zeta < 0.707)$$



### 1.4.6 3.6 Reglas de construcción del Bode asintótico

**Regla de magnitud:** - Cada **polo** en  $\omega_c$  aporta  $-20$  dB/dec a partir de  $\omega_c$  - Cada **cero** en  $\omega_c$  aporta  $+20$  dB/dec a partir de  $\omega_c$  - Cada **integrador** ( $1/s$ ) aporta  $-20$  dB/dec desde el inicio - La **ganancia**  $K$  desplaza toda la curva verticalmente  $20 \log_{10}(K)$  dB

**Regla de fase:** - Cada polo aporta  $-90^\circ$  (transición centrada en su  $\omega_c$ , de  $\omega_c/10$  a  $10\omega_c$ ) - Cada cero aporta  $+90^\circ$  (misma transición) - Cada integrador aporta  $-90^\circ$  constantes

**Procedimiento:** 1. Poner  $G(s)$  en forma estándar (factorizada con  $\tau s + 1$ ) 2. Calcular la ganancia en baja frecuencia 3. Ordenar las frecuencias de corte  $\omega_{c_1} < \omega_{c_2} < \dots$  4. En cada  $\omega_{c_i}$ , cambiar la pendiente  $\pm 20$  dB/dec según sea polo o cero 5. Sumar las contribuciones de fase

## 1.5 4. Ejemplo completo de construcción de Bode

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+10)(s+100)}$$

**Paso 1: Forma estándar** (factores  $\tau s + 1$ )

$$G(s) = \frac{10 \cdot 1 \cdot (s + 1)}{s \cdot 10 \cdot (0.1s + 1) \cdot 100 \cdot (0.01s + 1)} = \frac{10}{1000} \cdot \frac{(s + 1)}{s \cdot (0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{0.01 \cdot (s + 1)}{s \cdot (0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

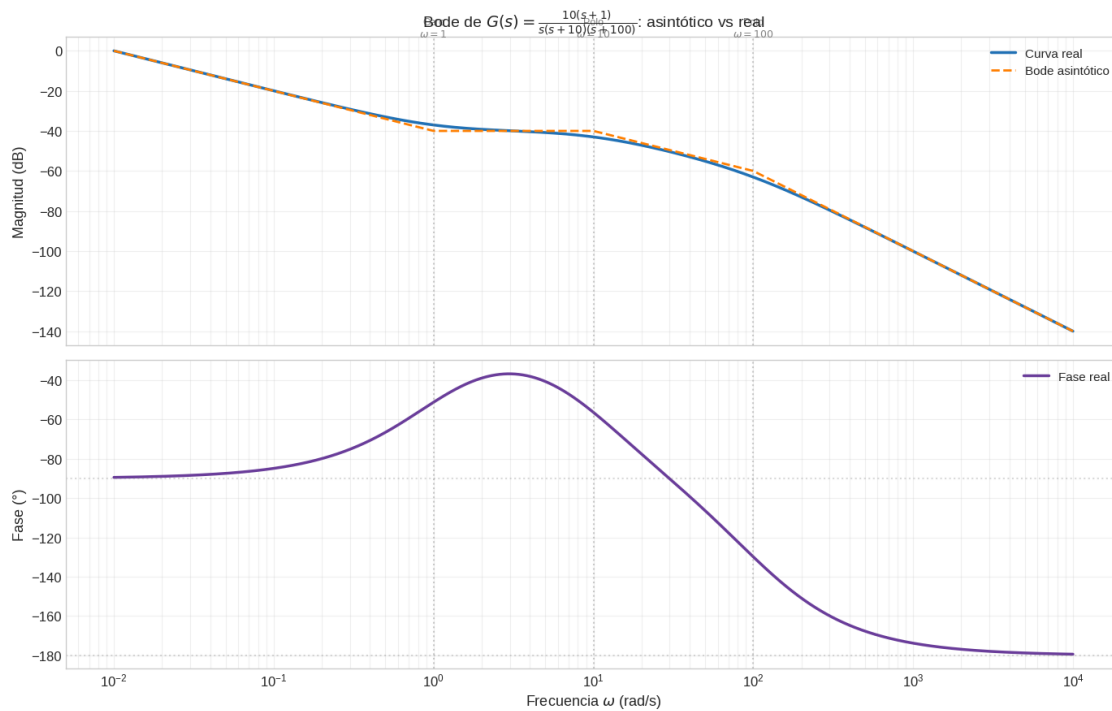
**Paso 2: Ganancia estática**  $K = 0.01 \rightarrow 20 \log_{10}(0.01) = -40$  dB

**Paso 3: Frecuencias de corte** (ordenadas)

| Elemento        | Tipo       | $\omega_c$ | Efecto en pendiente        |
|-----------------|------------|------------|----------------------------|
| $1/s$           | Integrador | –          | –20 dB/dec desde el inicio |
| $(s + 1)$       | Cero       | 1 rad/s    | +20 dB/dec                 |
| $1/(0.1s + 1)$  | Polo       | 10 rad/s   | –20 dB/dec                 |
| $1/(0.01s + 1)$ | Polo       | 100 rad/s  | –20 dB/dec                 |

**Paso 4: Pendiente acumulada**

| Rango de $\omega$   | Pendiente                          |
|---------------------|------------------------------------|
| $\omega < 1$        | –20 dB/dec (solo integrador)       |
| $1 < \omega < 10$   | –20 + 20 = 0 dB/dec (cero cancela) |
| $10 < \omega < 100$ | 0 – 20 = –20 dB/dec                |
| $\omega > 100$      | –20 – 20 = –40 dB/dec              |





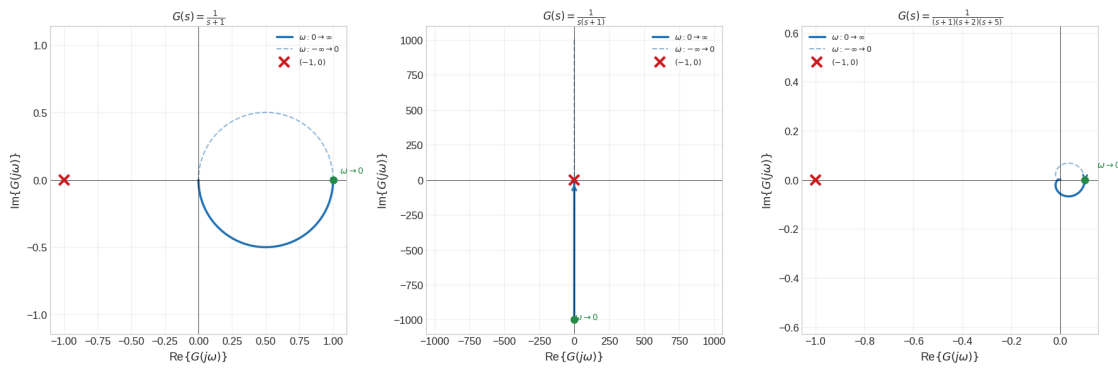
## 1.6 5. Diagrama de Nyquist

El **diagrama de Nyquist** representa  $G(j\omega)$  como una curva en el **plano complejo** cuando  $\omega$  varía de 0 a  $\infty$ .

- Eje horizontal:  $\text{Re}\{G(j\omega)\}$
- Eje vertical:  $\text{Im}\{G(j\omega)\}$

Cada punto de la curva corresponde a una frecuencia  $\omega$ . La distancia al origen es  $|G(j\omega)|$  y el ángulo es  $\angle G(j\omega)$ .

**Importancia:** el criterio de estabilidad de Nyquist analiza cuántas veces la curva rodea el punto  $(-1, 0)$ .



## 1.7 6. Sistemas con retardo puro

Un **retardo puro** de  $T$  segundos tiene función de transferencia:

$$G_{\text{retardo}}(s) = e^{-Ts}$$

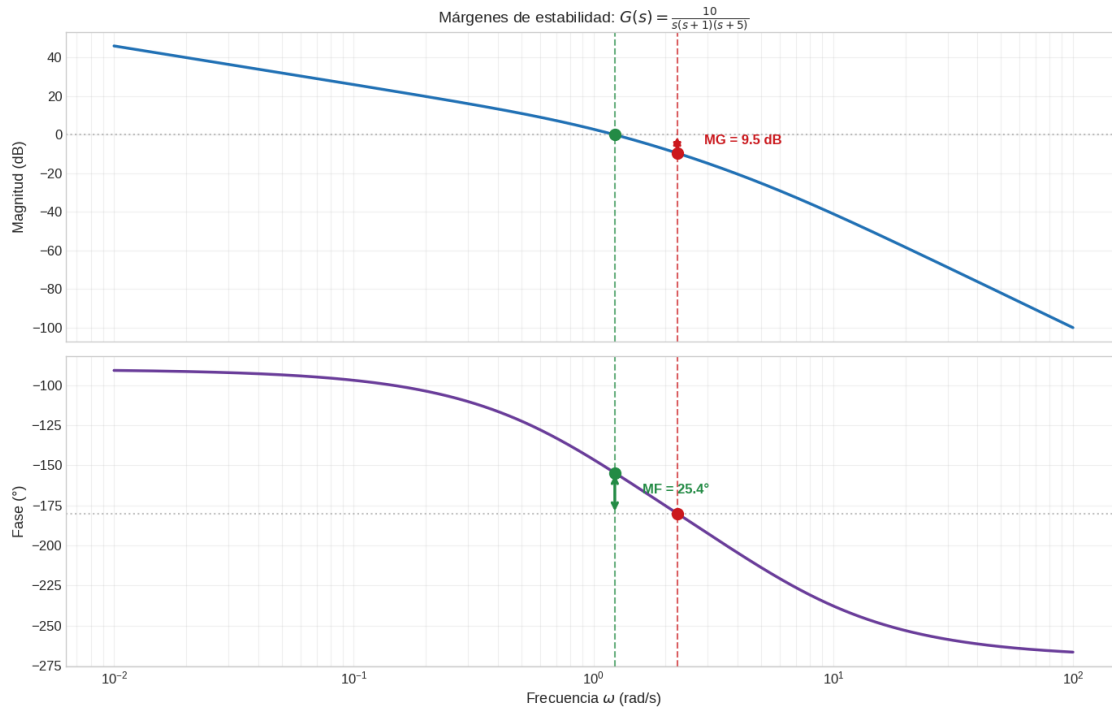
En frecuencia ( $s = j\omega$ ):

$$|e^{-jT\omega}| = 1 \quad (\text{magnitud sin cambio}), \quad \angle e^{-jT\omega} = -T\omega \text{ rad} = -\frac{180T\omega}{\pi}^\circ$$

**Efecto en el Bode:** - **Magnitud:** no cambia en absoluto - **Fase:** se resta  $T\omega$  radianes (la fase decrece linealmente con  $\omega$ , cada vez más negativa)

Esto hace que el retardo sea especialmente peligroso para la estabilidad, ya que no afecta la magnitud pero degrada la fase.





## 1.9 8. Ejercicios resueltos

**Ejercicio resuelto 1: Diagrama de Bode de sistema con polo e integrador** Enunciado:

Dibujar el diagrama de Bode asintótico y real de  $G(s) = \frac{5}{s(s+10)}$ .

**Paso 1:** Forma estándar

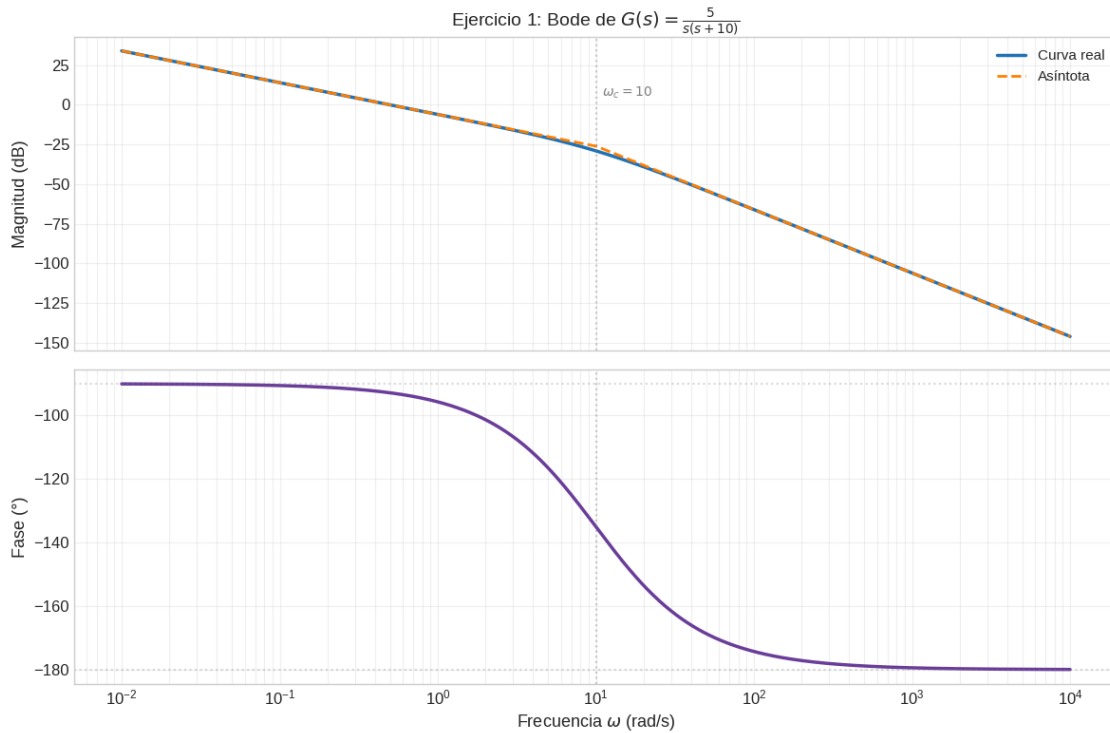
$$G(s) = \frac{5}{s \cdot 10 \cdot (0.1s + 1)} = \frac{0.5}{s(0.1s + 1)}$$

**Paso 2:** Elementos

| Elemento       | Tipo       | $\omega_c$                      |
|----------------|------------|---------------------------------|
| $K = 0.5$      | Ganancia   | $20 \log(0.5) = -6 \text{ dB}$  |
| $1/s$          | Integrador | $-20 \text{ dB/dec}, -90^\circ$ |
| $1/(0.1s + 1)$ | Polo real  | $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$   |

**Paso 3:** Asíntotas de magnitud -  $\omega < 10$ : pendiente  $-20 \text{ dB/dec}$  (integrador). En  $\omega = 1$ :  $-6 \text{ dB}$   
-  $\omega > 10$ : pendiente  $-20 - 20 = -40 \text{ dB/dec}$  (integrador + polo)

**Paso 4:** Fase asintótica -  $\omega \ll 1$ :  $-90^\circ$  (solo integrador) -  $\omega = 10$ :  $-90^\circ - 45^\circ = -135^\circ$  -  $\omega \gg 100$ :  
 $-90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$



**Ejercicio resuelto 2: Calcular  $|G(j\omega)|$  y fase a una frecuencia específica** Enunciado:

Para  $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$ , calcular  $|G(j\omega)|$  y  $\angle G(j\omega)$  en  $\omega = 5$  rad/s.

**Paso 1:** Sustituir  $s = j\omega = j5$

$$G(j5) = \frac{100}{(j5+1)(j5+10)}$$

**Paso 2:** Calcular cada factor

$$j5+1 = 1+j5 \Rightarrow |1+j5| = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26} \approx 5.099$$

$$\angle(1+j5) = \arctan(5/1) = 78.69^\circ$$

$$j5+10 = 10+j5 \Rightarrow |10+j5| = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} \approx 11.18$$

$$\angle(10+j5) = \arctan(5/10) = 26.57^\circ$$

**Paso 3:** Magnitud y fase del sistema

$$|G(j5)| = \frac{100}{5.099 \times 11.18} = \frac{100}{57.01} = 1.754$$

$$|G(j5)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(1.754) = 4.88 \text{ dB}$$

$$\angle G(j5) = 0^\circ - 78.69^\circ - 26.57^\circ = -105.26^\circ$$

**Ejercicio resuelto 3: Identificar  $G(s)$  desde Bode asintótico** **Enunciado:** Un diagrama de Bode asintótico tiene las siguientes características: - Magnitud: comienza con pendiente  $-20$  dB/dec, en  $\omega = 2$  pasa a  $0$  dB/dec, en  $\omega = 20$  pasa a  $-20$  dB/dec - En  $\omega = 1$ , la magnitud es  $6$  dB

**Paso 1:** Interpretar las pendientes

- Pendiente inicial  $-20$  dB/dec  $\rightarrow$  hay un **integrador**  $1/s$
- En  $\omega = 2$ : pendiente pasa a  $0$   $\rightarrow$  se añade  $+20$  dB/dec  $\rightarrow$  hay un **cero** en  $\omega = 2$
- En  $\omega = 20$ : pendiente pasa a  $-20$   $\rightarrow$  se añade  $-20$  dB/dec  $\rightarrow$  hay un **polo** en  $\omega = 20$

**Paso 2:** Forma general

$$G(s) = \frac{K \cdot (s/2 + 1)}{s \cdot (s/20 + 1)}$$

**Paso 3:** Determinar  $K$

En  $\omega = 1$  (zona de solo integrador):  $|G(j1)| = K/1 = K \rightarrow 20 \log(K) = 6 \text{ dB} \rightarrow K = 10^{6/20} = 2$

**Resultado:**

$$G(s) = \frac{2(0.5s + 1)}{s(0.05s + 1)} = \frac{2(s + 2)}{s(s + 20)}$$

**Ejercicio resuelto 4: Diagrama de Nyquist** **Enunciado:** Dibujar el diagrama de Nyquist de  $G(s) = \frac{2}{(s + 1)(s + 3)}$ .

**Paso 1:** Evaluar en puntos clave

- $\omega = 0$ :  $G(0) = \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3} \approx 0.667$  (punto real, positivo)
- $\omega \rightarrow \infty$ :  $|G| \rightarrow 0$ , fase  $\rightarrow -180^\circ$  (se acerca al origen desde el tercer cuadrante)
- $\omega = 1$ :  $G(j1) = \frac{2}{(j + 1)(j + 3)} = \frac{2}{(1 + j)(3 + j)} = \frac{2}{3 + j + 3j + j^2} = \frac{2}{2 + 4j}$

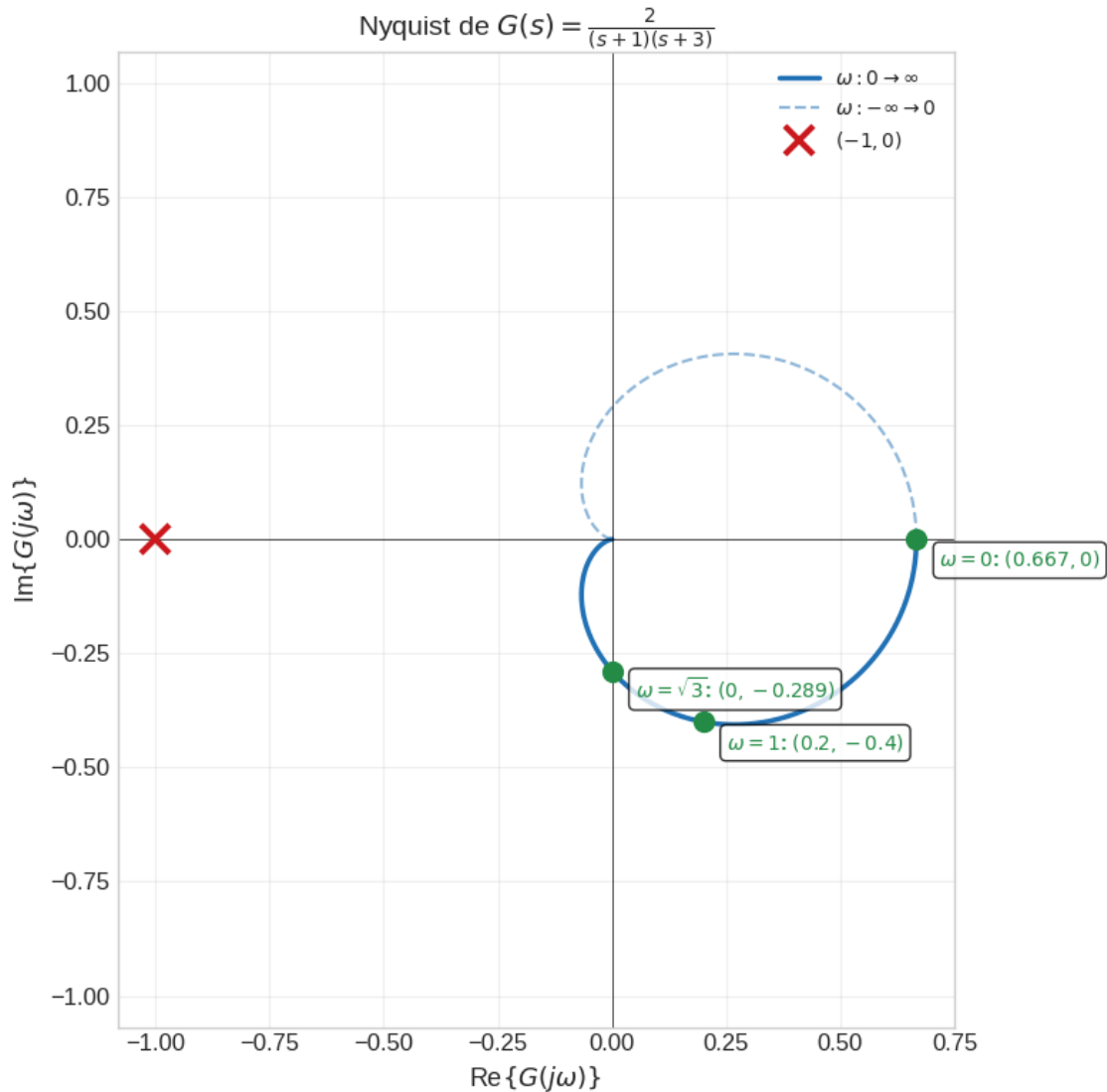
$$G(j1) = \frac{2}{2 + 4j} = \frac{2(2 - 4j)}{(2 + 4j)(2 - 4j)} = \frac{4 - 8j}{4 + 16} = \frac{4 - 8j}{20} = 0.2 - 0.4j$$

- $\omega = \sqrt{3}$ :  $G(j\sqrt{3}) = \frac{2}{(j\sqrt{3} + 1)(j\sqrt{3} + 3)}$

$$= \frac{2}{(1 + j\sqrt{3})(3 + j\sqrt{3})} = \frac{2}{3 + j\sqrt{3} + 3j\sqrt{3} + j^2 \cdot 3} = \frac{2}{0 + 4j\sqrt{3}} = \frac{2}{4\sqrt{3}j} = \frac{-j}{2\sqrt{3}}$$

Esto da un punto puramente imaginario negativo:  $(0, -0.289)$ .

**Paso 2:** La curva va desde  $(0.667, 0)$  hacia abajo (parte imaginaria negativa), cruza el eje imaginario y se acerca al origen.



**Ejercicio resuelto 5: Frecuencia de cruce de ganancia** Enunciado: Para  $G(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+10)}$ , encontrar la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_{cg}$  (donde  $|G(j\omega)| = 1$ , es decir 0 dB).

**Paso 1:** Calcular  $|G(j\omega)|$

$$|G(j\omega)| = \frac{20}{\omega \cdot |j\omega + 2| \cdot |j\omega + 10|} = \frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4}\sqrt{\omega^2 + 100}}$$

**Paso 2:** Igualar a 1

$$\frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4}\sqrt{\omega^2 + 100}} = 1$$

$$\omega^2(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 100) = 400$$

**Paso 3:** Resolución aproximada (tanteo o numérica)

Probemos  $\omega = 1.5$ :

$$1.5^2(1.5^2 + 4)(1.5^2 + 100) = 2.25 \times 6.25 \times 102.25 = 1438 \gg 400$$

Probemos  $\omega = 0.9$ :

$$0.81 \times 4.81 \times 100.81 = 392.7 \approx 400$$

$$\boxed{\omega_{cg} \approx 0.91 \text{ rad/s}}$$

**Paso 4:** Verificación:  $|G(j \cdot 0.91)| = \frac{20}{0.91 \times \sqrt{4.828} \times \sqrt{100.828}} = \frac{20}{0.91 \times 2.197 \times 10.041} \approx \frac{20}{20.08} \approx 0.996 \approx 1 \checkmark$

**Ejercicio resuelto 6: Bode de sistema con retardo** **Enunciado:** Dibujar el Bode de  $G(s) = \frac{e^{-0.2s}}{s + 5}$  y comparar con  $G_0(s) = \frac{1}{s + 5}$  (sin retardo).

**Paso 1:** Sin retardo, tenemos un polo en  $\omega_c = 5 \text{ rad/s}$  con  $K = 1/5 = 0.2$ .

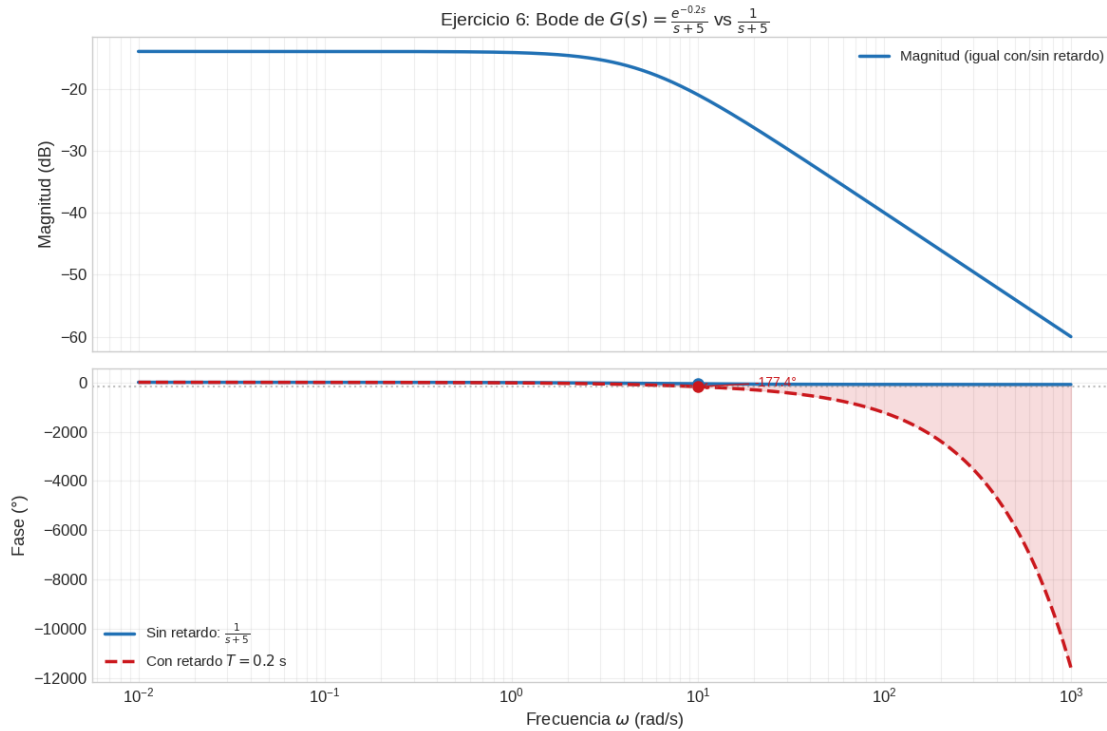
$$|G_0(j\omega)| = \frac{0.2}{\sqrt{1 + (\omega/5)^2}}, \quad \angle G_0 = -\arctan(\omega/5)$$

**Paso 2:** El retardo  $T = 0.2 \text{ s}$  solo afecta la fase:

$$\angle G(j\omega) = \angle G_0(j\omega) - 0.2\omega \text{ (rad)} = \angle G_0(j\omega) - \frac{0.2 \times 180}{\pi} \omega \text{ (}^\circ\text{)}$$

**Paso 3:** Ejemplo en  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ : - Sin retardo:  $\angle G_0(j10) = -\arctan(10/5) = -\arctan(2) = -63.43^\circ$  - Retardo adicional:  $-0.2 \times 10 = -2 \text{ rad} = -114.59^\circ$  - Total:  $-63.43^\circ - 114.59^\circ = -178.02^\circ$  (muy cerca de  $-180^\circ$ !)

El retardo degrada significativamente la fase a frecuencias altas.



## 1.10 9. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

| #  | Tipo de ejercicio                             | Herramienta principal                             | Dificultad |
|----|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------|
| 1  | Dibujar Bode asintótico de $G(s)$ dada        | Descomposición en bloques                         | Media      |
| 2  | Dibujar Bode real de $G(s)$                   | <code>scipy.signal.bode</code> + asíntotas        | Media      |
| 3  | Calcular $ G(j\omega) $ a frecuencia dada     | Sustitución $s = j\omega$                         | Baja       |
| 4  | Calcular fase a frecuencia dada               | $\angle G(j\omega) = \sum \angle \text{factores}$ | Baja       |
| 5  | Identificar $G(s)$ desde Bode asintótico      | Lectura de pendientes y frecuencias               | Alta       |
| 6  | Bode de sistema con retardo                   | $\text{Fase} = \angle G_0 - T\omega$              | Media      |
| 7  | Diagrama de Nyquist de sistema simple         | Evaluar $G(j\omega)$ en plano complejo            | Media      |
| 8  | Frecuencia de cruce de ganancia $\omega_{cg}$ | $ G(j\omega)  = 1$                                | Media      |
| 9  | Frecuencia de cruce de fase $\omega_{cf}$     | $\angle G(j\omega) = -180^\circ$                  | Media      |
| 10 | Margen de ganancia y margen de fase           | Combinar $\omega_{cg}$ y $\omega_{cf}$            | Alta       |



| #  | Tipo de ejercicio                   | Herramienta principal                                 | Dificultad |
|----|-------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------|
| 11 | Bode de sistema con polos complejos | Identificar $\zeta$ y $\omega_n$ , pico de resonancia | Alta       |
| 12 | Bode con múltiples ceros y polos    | Construcción paso a paso                              | Alta       |

### 1.10.1 9.1 Tipo 1: Dibujar Bode asintótico

**Método:** 1. Poner  $G(s)$  en forma estándar  $\frac{K \prod (\tau_i s + 1)}{s^n \prod (\tau_j s + 1)}$  2. Calcular ganancia en baja frecuencia:  $20 \log |K|$  dB 3. Pendiente inicial:  $-20n$  dB/dec (por los  $n$  integradores) 4. Listar frecuencias de corte  $\omega_{c_k} = 1/\tau_k$  de menor a mayor 5. En cada  $\omega_{c_k}$ : sumar  $+20$  dB/dec por cero,  $-20$  dB/dec por polo

Pendiente acumulada =  $-20n + 20(\text{n}^\circ \text{ ceros pasados}) - 20(\text{n}^\circ \text{ polos pasados})$  dB/dec

**Error frecuente:** Olvidar normalizar los factores a la forma  $\tau s + 1$  (dividir numerador y denominador para que los términos independientes sean 1).

### 1.10.2 9.2 Tipo 2: Dibujar Bode real

Igual que el Tipo 1, pero además: - En cada frecuencia de corte de polo: la curva real pasa  $-3$  dB por debajo de la asíntota - En cada frecuencia de corte de cero: la curva real pasa  $+3$  dB por encima - Para polos complejos con  $\zeta < 0.707$ : hay un pico de resonancia de altura  $M_r = 1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$

**Truco para el examen:** Si solo piden asintótico, no perder tiempo con la curva real. Si piden ambas, dibujar primero las asíntotas y luego suavizar.

### 1.10.3 9.3 Tipo 3: Calcular $|G(j\omega)|$ a frecuencia dada

**Método directo:**

$$|G(j\omega)| = \frac{|\text{Numerador}(j\omega)|}{|\text{Denominador}(j\omega)|} = \frac{\prod |\text{factores numerador}|}{\prod |\text{factores denominador}|}$$

Para cada factor: -  $|j\omega + a| = \sqrt{a^2 + \omega^2}$  -  $|j\omega| = \omega$  -  $|K| = |K|$

**Resultado en dB:**  $|G|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G|$

### 1.10.4 9.4 Tipo 4: Calcular fase a frecuencia dada

**Método:**

$$\angle G(j\omega) = \sum \angle(\text{factores numerador}) - \sum \angle(\text{factores denominador})$$

Para cada factor: -  $\angle(j\omega + a) = \arctan(\omega/a)$  -  $\angle(j\omega) = 90^\circ$  -  $\angle K = 0^\circ$  si  $K > 0$ ,  $180^\circ$  si  $K < 0$

**Cuidado con el retardo:** si hay  $e^{-Ts}$ , añadir  $-T\omega$  radianes ( $= -180T\omega/\pi$  grados).

### 1.10.5 9.5 Tipo 5: Identificar $G(s)$ desde Bode asintótico

**Método (lectura inversa):**

1. **Pendiente inicial**  $\rightarrow$  número de integradores:  $-20$  dB/dec  $\rightarrow$  1 integrador,  $-40 \rightarrow 2$ , etc.
2. **Cada cambio de pendiente** identifica una frecuencia de corte:
  - $+20$  dB/dec  $\rightarrow$  cero en esa frecuencia
  - $-20$  dB/dec  $\rightarrow$  polo en esa frecuencia
3. **Ganancia  $K$** : leer la magnitud en una frecuencia conocida (normalmente  $\omega = 1$  o en baja frecuencia) y despejar  $K$

$$K = 10^{|G(j\omega_0)|_{\text{dB}}/20} \cdot \omega_0^n \cdot \prod \frac{\omega_{c,\text{polos pasados}}}{\omega_{c,\text{ceros pasados}}}$$

**Error frecuente:** Confundir la ganancia en forma estándar  $(\tau s + 1)$  con la ganancia en forma polinómica  $(s + a)$ .

### 1.10.6 9.6 Tipo 6: Bode de sistema con retardo

**Método:** 1. Dibujar el Bode de  $G_0(s)$  (sin retardo) de forma normal 2. La **magnitud no cambia** 3. A la fase, **restar**  $T\omega$  radianes:  $\angle G = \angle G_0 - T\omega$

**Consecuencia:** la fase se hace más negativa a frecuencias altas, lo que reduce el margen de fase y puede desestabilizar el sistema.

$$\text{Fase con retardo} = \angle G_0(j\omega) - \frac{180T\omega}{\pi} \circ$$

### 1.10.7 9.7 Tipo 7: Diagrama de Nyquist de sistema simple

**Método:** 1. Evaluar  $G(j\omega)$  en puntos clave:  $\omega = 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ , y 2-3 frecuencias intermedias 2. Para  $\omega = 0$ : calcular  $G(0)$  (valor real) 3. Para  $\omega \rightarrow \infty$ :  $|G| \rightarrow 0$ , fase  $\rightarrow$  fase final del Bode 4. Encontrar dónde cruza el eje real ( $\text{Im} = 0$ ) o el eje imaginario ( $\text{Re} = 0$ ) 5. Unir los puntos con una curva suave

**Regla:** Para sistemas con integrador,  $G(0) \rightarrow \infty$  y la curva empieza en el infinito.

### 1.10.8 9.8 Tipo 8: Frecuencia de cruce de ganancia $\omega_{cg}$

**Método:** 1. Calcular  $|G(j\omega)|^2$  en función de  $\omega$  2. Igualar a 1:  $|G(j\omega)|^2 = 1$  3. Resolver la ecuación resultante (generalmente polinómica en  $\omega^2$ )

**Truco:** A veces es más rápido usar el Bode asintótico para estimar  $\omega_{cg}$  y luego refinar.

### 1.10.9 9.9 Tipo 9: Frecuencia de cruce de fase $\omega_{cf}$

**Método:** 1. Calcular  $\angle G(j\omega) = \sum \arctan$  de cada factor 2. Igualar a  $-180^\circ$  3. Resolver (puede requerir métodos numéricos o tanteo)

**Para sistemas tipo**  $\frac{K}{s(s+a)(s+b)}$ :

$$\angle G = -90^\circ - \arctan(\omega/a) - \arctan(\omega/b) = -180^\circ$$

$$\arctan(\omega/a) + \arctan(\omega/b) = 90^\circ$$

Usando la identidad  $\arctan(x) + \arctan(y) = 90^\circ$  cuando  $xy = 1$ :

$$\frac{\omega}{a} \cdot \frac{\omega}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{\omega_{cf} = \sqrt{ab}}$$

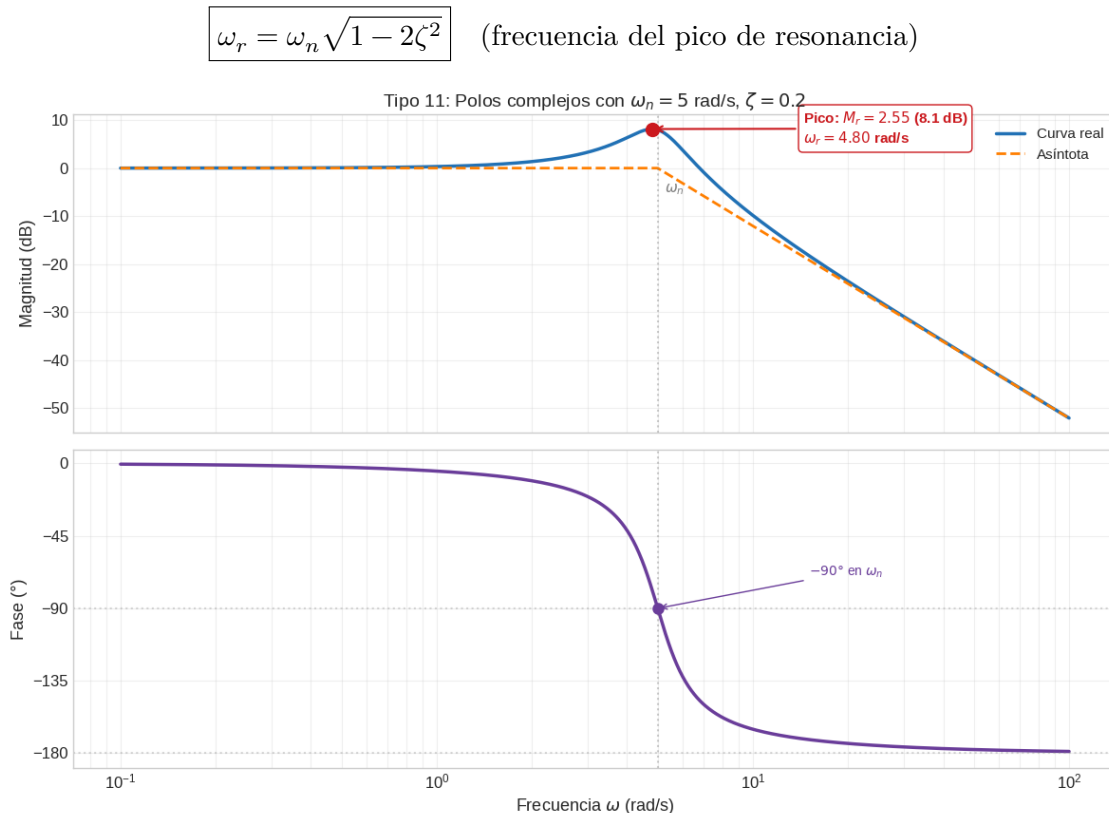
#### 1.10.10 9.10 Tipo 10: Margen de ganancia y margen de fase

**Método combinado:** 1. Encontrar  $\omega_{cg}$  (Tipo 8)  $\rightarrow$  calcular  $\angle G(j\omega_{cg}) \rightarrow \text{MF} = 180^\circ + \angle G(j\omega_{cg})$   
 2. Encontrar  $\omega_{cf}$  (Tipo 9)  $\rightarrow$  calcular  $|G(j\omega_{cf})|_{\text{dB}} \rightarrow \text{MG} = -|G(j\omega_{cf})|_{\text{dB}}$

**Interpretación:** - MG y MF **positivos**  $\rightarrow$  sistema estable en lazo cerrado - MG y MF **negativos**  $\rightarrow$  sistema inestable en lazo cerrado - Valores recomendados: MG  $> 6$  dB, MF  $> 30^\circ$  a  $60^\circ$

#### 1.10.11 9.11 Tipo 11: Bode de sistema con polos complejos

**Método:** 1. Identificar  $\omega_n$  y  $\zeta$  del par de polos complejos 2. Si  $\zeta < 0.707$ : hay pico de resonancia de altura  $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$  3. En el Bode asintótico: la transición es brusca, pasar de 0 dB a  $-40$  dB/dec en  $\omega_n$  4. La fase pasa de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  centrada en  $\omega_n$



### 1.10.12 9.12 Tipo 12: Bode con múltiples ceros y polos

**Método:** Aplicar la técnica del Tipo 1, pero con más elementos. Ejemplo:

$$G(s) = \frac{50(s+2)}{(s+0.5)(s+10)(s+50)}$$

**Paso 1:** Forma estándar:

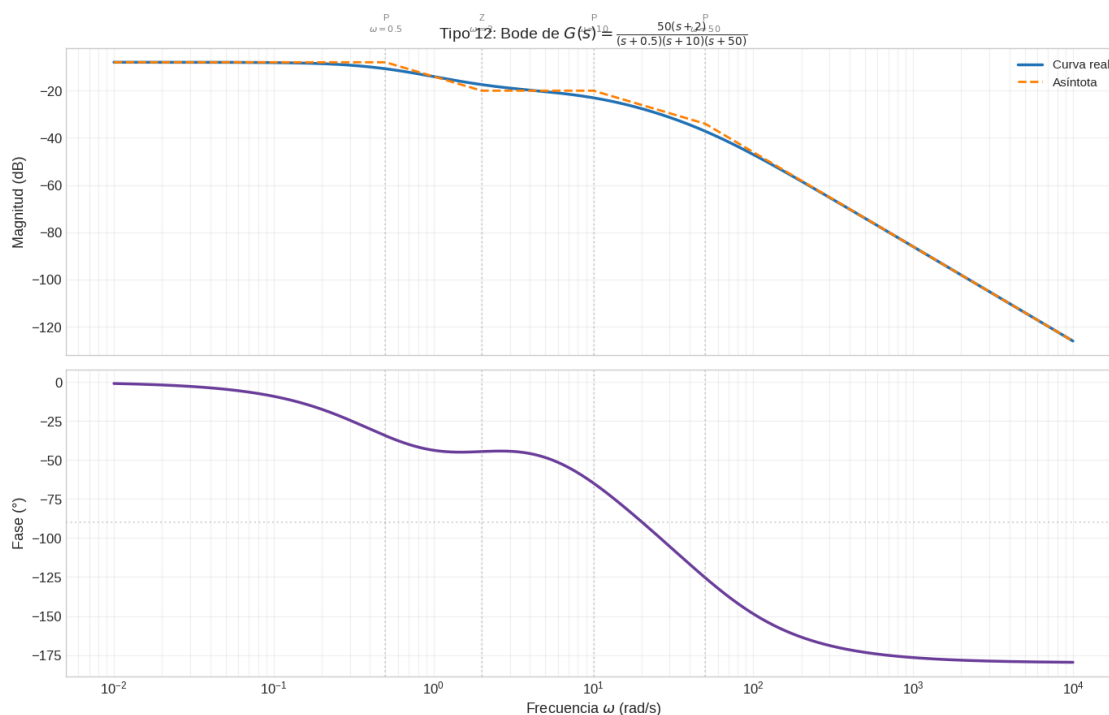
$$G(s) = \frac{50 \cdot 2 \cdot (0.5s + 1)}{0.5 \cdot 10 \cdot 50 \cdot (2s + 1)(0.1s + 1)(0.02s + 1)} = \frac{100}{250} \cdot \frac{(0.5s + 1)}{(2s + 1)(0.1s + 1)(0.02s + 1)} = 0.4 \cdot \frac{(0.5s + 1)}{(2s + 1)(0.1s + 1)(0.02s + 1)}$$

**Paso 2:**  $K = 0.4 \rightarrow 20 \log(0.4) = -7.96$  dB

**Paso 3:** Frecuencias de corte:

| $\omega_c$ | Tipo                   | Efecto     |
|------------|------------------------|------------|
| 0.5 rad/s  | Polo ( $\tau = 2$ )    | -20 dB/dec |
| 2 rad/s    | Cero ( $\tau = 0.5$ )  | +20 dB/dec |
| 10 rad/s   | Polo ( $\tau = 0.1$ )  | -20 dB/dec |
| 50 rad/s   | Polo ( $\tau = 0.02$ ) | -20 dB/dec |

**Pendiente acumulada:**  $0 \rightarrow -20 \rightarrow 0 \rightarrow -20 \rightarrow -40$  dB/dec



## 1.11 10. Tablas resumen

### 1.11.1 Bloques básicos del diagrama de Bode

| Bloque                 | Magnitud asintótica                                    | Fase                             | Observaciones                       |
|------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| $K$ ( $K > 0$ )        | $20 \log K$ dB (horizontal)                            | $0^\circ$                        | Desplaza verticalmente todo el Bode |
| $K$ ( $K < 0$ )        | $20 \log  K $ dB                                       | $-180^\circ$                     | Invierte la señal                   |
| $1/s$                  | $-20$ dB/dec, $0$ dB en $\omega = 1$                   | $-90^\circ$                      | Pendiente inicial si hay integrador |
| $1/s^2$                | $-40$ dB/dec                                           | $-180^\circ$                     | Doble integrador                    |
| $\frac{1}{\tau s + 1}$ | $0$ dB $\rightarrow -20$ dB/dec en $\omega_c = 1/\tau$ | $0^\circ \rightarrow -90^\circ$  | Error $-3$ dB en $\omega_c$         |
| $\tau s + 1$           | $0$ dB $\rightarrow +20$ dB/dec en $\omega_c = 1/\tau$ | $0^\circ \rightarrow +90^\circ$  | Error $+3$ dB en $\omega_c$         |
| Polos complejos        | $0$ dB $\rightarrow -40$ dB/dec en $\omega_n$          | $0^\circ \rightarrow -180^\circ$ | Pico si $\zeta < 0.707$             |
| $e^{-Ts}$              | Sin efecto                                             | $-T\omega$ rad                   | Solo afecta fase                    |

### 1.11.2 Fórmulas clave

| Fórmula                                                | Uso                      |
|--------------------------------------------------------|--------------------------|
| $ G(j\omega) _{\text{dB}} = 20 \log_{10}  G(j\omega) $ | Conversión a decibelios  |
| $ j\omega + a  = \sqrt{a^2 + \omega^2}$                | Magnitud de cada factor  |
| $\angle(j\omega + a) = \arctan(\omega/a)$              | Fase de cada factor      |
| $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$               | Pico de resonancia       |
| $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$                 | Frecuencia de resonancia |
| $\text{MG} = - G(j\omega_{cf}) _{\text{dB}}$           | Margen de ganancia       |
| $\text{MF} = 180^\circ + \angle G(j\omega_{cg})$       | Margen de fase           |
| $\omega_{cf} = \sqrt{ab}$ (para $K/[s(s+a)(s+b)]$ )    | Cruce de fase            |

### 1.11.3 Errores frecuentes

| Error                                    | Corrección                                              |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| No normalizar a forma $\tau s + 1$       | Siempre dividir para que el término independiente sea 1 |
| Olvidar sumar las contribuciones de fase | Cada polo/cero/integrador contribuye a la fase total    |
| Confundir dB/dec con dB/oct              | 1 década = factor 10 en $\omega$ ; 1 octava = factor 2  |

| Error                                            | Corrección                                                     |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Ignorar el retardo en la fase                    | El retardo no afecta magnitud pero degrada la fase linealmente |
| Usar pendiente $-20$ dB/dec para polos complejos | Polos complejos: $-40$ dB/dec (son dos polos)                  |