

05_modelado_simulacion

June 19, 2026

1 Tema 5 - Modelado y Simulación

Fundamentos de Control - 2º GIERM

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Obtener el modelo matemático (EDO) de sistemas físicos mecánicos, eléctricos, hidráulicos y térmicos
 - Aplicar el procedimiento de **7 pasos** para linealizar sistemas no lineales
 - Obtener la **función de transferencia** a partir de la EDO linealizada
 - Simular sistemas no lineales con `solve_ivp` y comparar con el modelo linealizado
 - Comprender las **analogías electromecánicas** entre dominios físicos
 - Identificar cuándo el modelo linealizado es válido y cuándo diverge del real
-

1.2 1. Introducción al modelado de sistemas físicos

Modelar un sistema físico consiste en obtener las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento dinámico. En control, necesitamos estas ecuaciones para:

- **Predecir** cómo responderá el sistema ante entradas conocidas
- **Diseñar controladores** que modifiquen el comportamiento del sistema
- **Simular** escenarios sin necesidad de construir prototipos físicos

La mayoría de los sistemas reales son **no lineales**, pero trabajamos con modelos **linealizados** porque disponemos de herramientas analíticas potentes (Laplace, funciones de transferencia, diagramas de Bode, etc.).

Analogía clave: linealizar es como aproximar una curva por su recta tangente en un punto. Cerca del punto la aproximación es excelente; lejos, puede fallar.

1.3 2. Procedimiento de modelado en 7 pasos

1.3.1 2.1 Los 7 pasos

Paso 1 — Formular la EDO no lineal: Aplicar leyes físicas (Newton, Kirchhoff, balance de masa/energía) para obtener la ecuación diferencial que gobierna el sistema.

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Paso 2 — Encontrar el punto de equilibrio: Resolver $f(x_{eq}, u_{eq}) = 0$ para hallar el estado estacionario.

Paso 3 — Definir variables incrementales: Expresar las variables como perturbaciones respecto al equilibrio:

$$\delta x = x - x_{eq}, \quad \delta u = u - u_{eq}$$

Paso 4 — Expansión en serie de Taylor: Expandir $f(x, u)$ alrededor del punto de equilibrio:

$$f(x, u) \approx f(x_{eq}, u_{eq}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{eq} \delta u + \text{términos de orden superior}$$

Paso 5 — Descartar términos de orden superior: Como $f(x_{eq}, u_{eq}) = 0$ y los términos cuadráticos y superiores son despreciables cerca del equilibrio:

$$\delta \dot{x} = a \cdot \delta x + b \cdot \delta u$$

donde $a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq}$ y $b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{eq}$.

Paso 6 — Aplicar la transformada de Laplace: Con condiciones iniciales nulas:

$$s \cdot \Delta X(s) = a \cdot \Delta X(s) + b \cdot \Delta U(s)$$

Paso 7 — Obtener la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b}{s - a}$$

1.3.2 2.2 Resumen en recuadro

Paso	Acción	Resultado
1	Leyes físicas	EDO no lineal: $\dot{x} = f(x, u)$
2	$f(x_{eq}, u_{eq}) = 0$	Punto de equilibrio
3	$\delta x = x - x_{eq}$	Variables incrementales
4	Taylor 1er orden	Aproximación lineal
5	Eliminar $O(\delta^2)$	EDO lineal: $\delta \dot{x} = a \delta x + b \delta u$
6	Laplace	Ecuación algebraica en s
7	Despejar $G(s)$	Función de transferencia

Truco para el examen: si el sistema ya es lineal (todos los términos son lineales en x y u), se puede ir directamente del Paso 1 al Paso 6 sin necesidad de linealizar.

1.4 3. Ejemplo mecánico: masa-resorte-amortiguador

1.4.1 3.1 Descripción del sistema

Una masa m se conecta a una pared mediante un resorte de constante k y un amortiguador viscoso de coeficiente b . Se aplica una fuerza externa $F(t)$.

Paso 1 — EDO (2ª ley de Newton):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

Este sistema ya es **lineal**, así que no necesita linealización.

Paso 6-7 — Laplace y función de transferencia:

$$ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

1.4.2 3.2 Forma canónica

Dividiendo por k :

$$G(s) = \frac{1/k}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}$$

Identificando: $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$, ganancia estática $K = 1/k$.

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

El sistema con $\zeta = 0.125 < 1$ es **subamortiguado**: oscila antes de estabilizarse en el valor final $x_\infty = F/k = 1/4 = 0.25$ m.

1.5 4. Ejemplo eléctrico: circuito RLC serie

1.5.1 4.1 Descripción del sistema

Un circuito serie con resistencia R , inductancia L y capacitancia C , alimentado por una tensión $v(t)$. La salida es la corriente $i(t)$.

Paso 1 — EDO (Ley de Kirchhoff de tensiones):

$$v(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt$$

Derivando para eliminar la integral:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dv}{dt}$$

Si la salida es la tensión en el condensador v_C , con $i = C \frac{dv_C}{dt}$:

$$LC \ddot{v}_C + RC \dot{v}_C + v_C = v(t)$$

Paso 6-7 — Función de transferencia (salida: v_C):

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

1.5.2 4.2 Analogía con el sistema mecánico

La estructura es idéntica al masa-resorte-amortiguador: $L \leftrightarrow m$, $R \leftrightarrow b$, $1/C \leftrightarrow k$.

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

1.6 5. Ejemplo hidráulico: tanque con válvula no lineal

1.6.1 5.1 Modelo no lineal

Un tanque cilíndrico de sección A recibe un caudal de entrada Q_i y descarga por una válvula de salida con ley $Q_o = c\sqrt{h}$, donde h es la altura del líquido.

Paso 1 — Balance de masa:

$$A \frac{dh}{dt} = Q_i - c\sqrt{h}$$

Esta EDO es no lineal por el término $\sqrt{h}$.

1.6.2 5.2 Linealización (7 pasos completos)

Paso 2 — Equilibrio: En régimen permanente, $dh/dt = 0$:

$$Q_{i,eq} = c\sqrt{h_{eq}} \Rightarrow h_{eq} = \left(\frac{Q_{i,eq}}{c} \right)^2$$

Paso 3 — Variables incrementales:

$$\delta h = h - h_{eq}, \quad \delta Q_i = Q_i - Q_{i,eq}$$

Paso 4 — Taylor de $\sqrt{h}$ alrededor de h_{eq} :

$$\sqrt{h} \approx \sqrt{h_{eq}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{eq}}} \delta h$$

Paso 5 — EDO linealizada: Sustituyendo y cancelando términos de equilibrio:

$$A \frac{d(\delta h)}{dt} = \delta Q_i - \frac{c}{2\sqrt{h_{eq}}} \delta h$$

Definiendo la **resistencia hidráulica** $R_h = \frac{2\sqrt{h_{eq}}}{c} = \frac{2h_{eq}}{Q_{i,eq}}$:

$$A \frac{d(\delta h)}{dt} = \delta Q_i - \frac{\delta h}{R_h}$$

Paso 6-7 — Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_i(s)} = \frac{R_h}{AR_h s + 1} = \frac{R_h}{\tau s + 1}$$

donde $\tau = AR_h$ es la constante de tiempo del sistema linealizado.

Nota importante: la resistencia R_h depende del punto de equilibrio h_{eq} . Si cambiamos el punto de operación, cambia el modelo linealizado.

Con una perturbación pequeña ($\Delta Q_i = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$, un 10% del caudal de equilibrio), ambos modelos coinciden casi perfectamente. El modelo linealizado es un sistema de **primer orden** con constante de tiempo $\tau = A \cdot R_h$.

1.7 6. Ejemplo térmico: habitación con calefactor

1.7.1 6.1 Modelo

Una habitación de capacidad térmica C_{th} se calienta con un calefactor de potencia P y pierde calor al exterior (a temperatura T_{ext}) a través de paredes con conductancia térmica K .

Paso 1 — Balance de energía:

$$C_{th} \frac{dT}{dt} = P - K(T - T_{ext})$$

Este sistema ya es **lineal** en T y P (la temperatura exterior T_{ext} es una perturbación constante).

Reescribiendo:

$$C_{th} \frac{dT}{dt} + KT = P + K \cdot T_{ext}$$

Paso 6-7 — Función de transferencia (entrada: P , salida: T , con T_{ext} constante):

Usando variables incrementales $\delta T = T - T_{eq}$, $\delta P = P - P_{eq}$:

$$G(s) = \frac{\Delta T(s)}{\Delta P(s)} = \frac{1/K}{\frac{C_{th}}{K}s + 1} = \frac{R_{th}}{\tau_{th}s + 1}$$

donde $R_{th} = 1/K$ es la resistencia térmica y $\tau_{th} = C_{th}/K$ es la constante de tiempo térmica.

Equilibrio: $T_{eq} = T_{ext} + P_{eq}/K$

1.7.2 6.2 Analogía eléctrica

Es análogo a un circuito RC: $C_{th} \leftrightarrow C$, $K \leftrightarrow 1/R$, $T \leftrightarrow v_C$, $P \leftrightarrow i$.

1.8 7. Comparación no lineal vs lineal: efecto del tamaño de la perturbación

El modelo linealizado es una aproximación local. Veamos cómo se comporta con perturbaciones de distinto tamaño usando el ejemplo del tanque hidráulico.

Conclusiones clave:

- Con perturbaciones **pequeñas** (5-10% del valor de equilibrio), el modelo linealizado es una excelente aproximación
- Con perturbaciones **grandes** (>50%), el error se hace significativo
- El modelo no lineal siempre llega a un equilibrio **diferente** al que predice el linealizado para perturbaciones grandes
- **Regla práctica:** el modelo linealizado es fiable para perturbaciones de hasta un 10-20% del valor de equilibrio

1.9 8. Analogías electromecánicas

Las ecuaciones que gobiernan sistemas de distintos dominios físicos tienen la **misma estructura matemática**. Esto permite trasladar conocimiento de un dominio a otro.

1.9.1 8.1 Analogía fuerza-tensión

Mecánico (traslación)	Eléctrico	Hidráulico	Térmico
Fuerza F	Tensión v	Presión P (o ρgh)	Temperatura T
Velocidad $\dot{x}$	Corriente i	Caudal Q	Flujo de calor $\dot{Q}$
Desplazamiento x	Carga q	Volumen V	Calor Q
Masa m	Inductancia L	Inertancia $I = \rho l/A$	—

Mecánico (traslación)	Eléctrico	Hidráulico	Térmico
Amortiguador b	Resistencia R	Resistencia hidr. R_h	Resistencia tér. $R_{th} = 1/K$
Resorte $1/k$	Capacitancia C	Capacitancia hidr. $C_h = A$	Capacidad tér. C_{th}

1.9.2 8.2 Ecuación unificada de 2º orden

Todos los sistemas de segundo orden se describen con:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 \cdot u(t)$$

Parámetro	Mecánico	Eléctrico (RLC)
ω_n	$\sqrt{k/m}$	$1/\sqrt{LC}$
ζ	$b/(2\sqrt{mk})$	$(R/2)\sqrt{C/L}$
Ganancia DC	$1/k$	1

1.9.3 8.3 Ecuación unificada de 1er orden

Los sistemas de primer orden siguen:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K \cdot u(t)$$

Parámetro	Hidráulico (tanque)	Térmico (habitación)	Eléctrico (RC)
τ	$A \cdot R_h$	C_{th}/K	RC
K (ganancia)	R_h	$1/K_{th}$	1

1.10 9. Ejercicios resueltos

1.10.1 Ejercicio 9.1: Péndulo simple — modelado y linealización

Datos: Péndulo de longitud $l = 0.5$ m, masa $m = 0.2$ kg, fricción viscosa $b = 0.05$ Nm · s/rad, $g = 9.81$ m/s².

Paso 1 — EDO no lineal (2ª ley de Newton rotacional):

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = \tau_{ext}$$

Paso 2 — Equilibrio: $\theta_{eq} = 0$, $\tau_{ext,eq} = 0$.

Paso 3 — Variables incrementales: $\delta\theta = \theta - 0 = \theta$.

Paso 4 — Taylor de $\sin(\theta)$ alrededor de $\theta = 0$:

$$\sin(\theta) \approx \theta \quad (\text{para } \theta \text{ pequeño})$$

Paso 5 — EDO linealizada:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\theta = \tau_{ext}$$

Paso 6-7 — Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{T_{ext}(s)} = \frac{1}{ml^2s^2 + bs + mgl}$$

Sustitución numérica:

$$ml^2 = 0.2 \times 0.5^2 = 0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$mgl = 0.2 \times 9.81 \times 0.5 = 0.981 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$G(s) = \frac{1}{0.05s^2 + 0.05s + 0.981}$$

Parámetros característicos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.81}{0.5}} = 4.43 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{b}{2ml^2\omega_n} = \frac{0.05}{2 \times 0.05 \times 4.43} = 0.113$$

El sistema es **subamortiguado** ($\zeta < 1$): el péndulo oscila antes de estabilizarse.

1.10.2 Ejercicio 9.2: Motor DC — modelado electromecánico

Datos: $R_a = 2 \Omega$, $L_a = 0.01 \text{ H}$, $K_t = 0.1 \text{ Nm/A}$ (constante de par), $K_e = 0.1 \text{ V} \cdot \text{s/rad}$ (constante de fuerza contra-electromotriz), $J = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $b = 0.001 \text{ Nm} \cdot \text{s/rad}$.

Paso 1 — Ecuaciones del motor:

Circuito de armadura:

$$V_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_e \dot{\theta}$$

Ecuación mecánica:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = K_t i_a$$

Paso 6 — Laplace (ambas ecuaciones):

$$V_a(s) = (L_a s + R_a)I_a(s) + K_e s\Theta(s)$$

$$(Js + b)s\Theta(s) = K_t I_a(s)$$

Paso 7 — Eliminar $I_a(s)$:

De la ecuación mecánica: $I_a(s) = \frac{(Js+b)s\Theta(s)}{K_t}$

Sustituyendo en la eléctrica:

$$V_a(s) = (L_a s + R_a) \frac{(Js + b)s\Theta(s)}{K_t} + K_e s\Theta(s)$$

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{s[(L_a s + R_a)(Js + b) + K_t K_e]}$$

Sustitución numérica (despreciando L_a por ser pequeña):

$$G(s) \approx \frac{K_t}{s[R_a(Js + b) + K_t K_e]} = \frac{0.1}{s[0.02s + 0.002 + 0.01]}$$

$$G(s) = \frac{0.1}{s(0.02s + 0.012)} = \frac{8.33}{s(1.667s + 1)}$$

El motor es un sistema de **tipo 1** (un integrador): la velocidad angular alcanza un valor constante, pero el ángulo crece indefinidamente ante entrada escalón.

1.10.3 Ejercicio 9.3: Sistema de dos tanques en cascada

Datos: Dos tanques idénticos, sección $A = 1 \text{ m}^2$, coeficiente de descarga $c = 0.3 \text{ m}^{5/2}/\text{s}$. La salida del tanque 1 alimenta el tanque 2.

Paso 1 — EDOs no lineales:

$$A \frac{dh_1}{dt} = Q_i - c\sqrt{h_1}$$

$$A \frac{dh_2}{dt} = c\sqrt{h_1} - c\sqrt{h_2}$$

Paso 2 — Equilibrio: Con $Q_{i,eq} = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$:

$$c\sqrt{h_{1,eq}} = Q_{i,eq} \implies h_{1,eq} = \left(\frac{0.6}{0.3}\right)^2 = 4 \text{ m}$$

$$c\sqrt{h_{2,eq}} = c\sqrt{h_{1,eq}} \Rightarrow h_{2,eq} = h_{1,eq} = 4 \text{ m}$$

Pasos 3-5 — Linealización:

$$R_{h1} = R_{h2} = \frac{2\sqrt{4}}{0.3} = \frac{4}{0.3} = 13.33 \text{ s/m}^2$$

$$\tau_1 = \tau_2 = A \cdot R_h = 1 \times 13.33 = 13.33 \text{ s}$$

Pasos 6-7 — Funciones de transferencia:

$$\text{Tanque 1: } G_1(s) = \frac{R_h}{\tau s + 1}$$

$$\text{Tanque 2: } G_2(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \text{ (ganancia 1, porque la salida del tanque 1 ya está en m}^3/\text{s)}$$

$$G(s) = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q_i(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{R_h}{(\tau s + 1)^2}$$

El sistema total es de **segundo orden sobreamortiguado** (dos polos reales iguales).

1.10.4 Ejercicio 9.4: Sistema térmico con dos zonas

Datos: Dos habitaciones comunicadas. Habitación 1: capacidad $C_1 = 3 \times 10^5 \text{ J/K}$, calefactor P . Habitación 2: capacidad $C_2 = 2 \times 10^5 \text{ J/K}$, sin calefactor. Conductancia entre ellas: $K_{12} = 30 \text{ W/K}$. Conductancia al exterior: $K_1 = 40 \text{ W/K}$, $K_2 = 25 \text{ W/K}$. $T_{ext} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Paso 1 — Balances de energía:

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = P - K_1(T_1 - T_{ext}) - K_{12}(T_1 - T_2)$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = K_{12}(T_1 - T_2) - K_2(T_2 - T_{ext})$$

Paso 2 — Equilibrio: Con $P_{eq} = 2000 \text{ W}$ y $T_{ext} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$\text{De la ecuación 2: } K_{12}(T_{1,eq} - T_{2,eq}) = K_2 \cdot T_{2,eq} \Rightarrow T_{1,eq} = T_{2,eq}(1 + K_2/K_{12})$$

$$T_{1,eq} = T_{2,eq} \left(1 + \frac{25}{30}\right) = 1.833 \cdot T_{2,eq}$$

$$\text{De la ecuación 1: } P_{eq} = K_1 T_{1,eq} + K_{12}(T_{1,eq} - T_{2,eq}) = K_1 T_{1,eq} + K_2 T_{2,eq}$$

$$2000 = 40 \times 1.833 T_{2,eq} + 25 T_{2,eq} = (73.33 + 25) T_{2,eq} = 98.33 T_{2,eq}$$

$$\boxed{T_{2,eq} = 20.34 \text{ }^{\circ}\text{C}, \quad T_{1,eq} = 37.29 \text{ }^{\circ}\text{C}}$$

Paso 6-7 — Forma matricial en Laplace:

$$\begin{pmatrix} C_1 s + K_1 + K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & C_2 s + K_2 + K_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta P \\ 0 \end{pmatrix}$$

La función de transferencia $G(s) = \Delta T_2(s)/\Delta P(s)$ se obtiene por Cramer:

$$G(s) = \frac{K_{12}}{(C_1 s + K_1 + K_{12})(C_2 s + K_2 + K_{12}) - K_{12}^2}$$

1.10.5 Ejercicio 9.5: Identificación de FT a partir de respuesta al escalón experimental

Datos experimentales: Se aplica un escalón de amplitud $A = 2 \text{ V}$ a un sistema desconocido. Se observa: - Valor final de la salida: $y_{\infty} = 0.8 \text{ V}$ - Tiempo en alcanzar el 63.2% del valor final: $t_{63\%} = 3 \text{ s}$ - No hay sobreoscilación $\rightarrow$ **primer orden**

Paso 1 — Identificar la ganancia estática:

$$K = \frac{y_{\infty}}{A} = \frac{0.8}{2} = 0.4$$

Paso 2 — Identificar la constante de tiempo:

Para un sistema de primer orden, al 63.2% del valor final se cumple $t = \tau$:

$$\tau = t_{63\%} = 3 \text{ s}$$

Paso 3 — Función de transferencia:

$$\boxed{G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{0.4}{3s + 1}}$$

Verificación: - $y(\infty) = K \cdot A = 0.4 \times 2 = 0.8 \text{ V}$ ✓ - $y(\tau) = K \cdot A \cdot (1 - e^{-1}) = 0.8 \times 0.632 = 0.506 \text{ V}$ - $y(3\tau) = 0.8 \times 0.950 = 0.76 \text{ V}$ (95% del final) - $y(5\tau) = 0.8 \times 0.993 = 0.794 \text{ V}$ (>99%, régimen permanente)

Método alternativo para 2º orden con sobreoscilación: si se observa sobreoscilación M_p y periodo de oscilación T_d , se puede obtener ζ de $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ y $\omega_d = 2\pi/T_d$.

1.11 10. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

#	Tipo de ejercicio	Dominio	Ecuación clave	Dificultad
1	Modelar sistema mecánico (traslación)	Mecánico	$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$	Media
2	Modelar circuito eléctrico (RLC)	Eléctrico	$LC\ddot{v}_C + RC\dot{v}_C + v_C = v$	Media
3	Modelar tanque hidráulico	Hidráulico	$A\dot{h} = Q_i - c\sqrt{h}$	Media
4	Modelar sistema térmico	Térmico	$C_{th}\dot{T} = P - K(T - T_{ext})$	Baja
5	Linealizar EDO no lineal	General	Taylor + variables incrementales	Alta
6	Obtener FT desde EDO lineal	General	Laplace + despejar	Media
7	Simular NL con solve_ivp	Computacional	<code>solve_ivp(f, t_span, y0)</code>	Media
8	Comparar NL vs linealizado	Análisis	Superponer respuestas	Media
9	Aplicar analogías entre dominios	Conceptual	Tabla de equivalencias	Baja
10	Identificar FT desde respuesta experimental	Experimental	K, τ, ζ, ω_n	Alta

1.11.1 10.1 Tipo 1: Modelar sistema mecánico (traslación)

Procedimiento: 1. Dibujar diagrama de cuerpo libre 2. Aplicar 2ª ley de Newton: $\sum F = m\ddot{x}$ 3. Identificar fuerzas: resorte ($-kx$), amortiguador ($-b\dot{x}$), externas (F) 4. Aplicar Laplace y obtener $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Efecto de los parámetros: - Si m **aumenta** $\rightarrow \omega_n$ disminuye $\rightarrow$ respuesta más lenta - Si b **aumenta** $\rightarrow \zeta$ aumenta $\rightarrow$ menos oscilaciones (puede pasar de subamortiguado a sobreamortiguado) - Si k **aumenta** $\rightarrow \omega_n$ aumenta, ζ disminuye $\rightarrow$ más rápido pero con más sobreoscilación

Ejercicio resuelto: Suspensión de vehículo simplificada **Datos:** $m = 300$ kg, $k = 12000$ N/m, $b = 1500$ Ns/m, entrada: perfil de carretera $r(t)$.

Paso 1-2: $G(s) = \frac{1}{300s^2 + 1500s + 12000}$

Parámetros:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{12000}{300}} = \sqrt{40} = 6.32 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{1500}{2\sqrt{300 \times 12000}} = \frac{1500}{2 \times 1897} = 0.395$$

Resultado: Sistema subamortiguado con sobreoscilación moderada ($\zeta \approx 0.4$). Frecuencia natural $f_n = \omega_n/2\pi = 1.01$ Hz.

1.11.2 10.2 Tipo 2: Modelar circuito eléctrico (RLC)

Procedimiento: 1. Aplicar leyes de Kirchhoff (KVL/KCL) 2. Expresar en términos de una única variable 3. Laplace y obtener $G(s)$

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Efecto de los parámetros: - Si R **aumenta** $\rightarrow \zeta$ aumenta $\rightarrow$ respuesta más amortiguada - Si L **aumenta** $\rightarrow \omega_n$ disminuye, ζ disminuye $\rightarrow$ más lento y más oscilante - Si C **aumenta** $\rightarrow \omega_n$ disminuye, ζ aumenta $\rightarrow$ más lento pero más amortiguado

Ejercicio resuelto: Filtro pasa-baja RLC Datos: $R = 50 \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 1 \mu\text{F}$.

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} = 10000 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{50}{2} \sqrt{\frac{10^{-6}}{10^{-2}}} = 25 \times 10^{-2} = 0.25$$

$$G(s) = \frac{1}{10^{-8}s^2 + 5 \times 10^{-5}s + 1}$$

Resultado: Sistema subamortiguado. Frecuencia de corte aprox. $f_n = \omega_n/2\pi = 1591$ Hz.

1.11.3 10.3 Tipo 3: Modelar tanque hidráulico y linealizar

Procedimiento: 1. Balance de masa: $A\dot{h} = Q_{in} - Q_{out}$ 2. Ley de descarga: $Q_{out} = c\sqrt{h}$ (no lineal) 3. Equilibrio: $h_{eq} = (Q_{i,eq}/c)^2$ 4. Taylor: $\sqrt{h} \approx \sqrt{h_{eq}} + \frac{\delta h}{2\sqrt{h_{eq}}}$ 5. Obtener $G(s)$

$$G(s) = \frac{R_h}{\tau s + 1}, \quad R_h = \frac{2\sqrt{h_{eq}}}{c}, \quad \tau = A \cdot R_h$$

Efecto de los parámetros: - Si A **aumenta** $\rightarrow \tau$ aumenta $\rightarrow$ respuesta más lenta (más inercia) - Si c **aumenta** $\rightarrow R_h$ disminuye, τ disminuye $\rightarrow$ descarga más rápida - Si h_{eq} **aumenta** $\rightarrow R_h$ aumenta $\rightarrow$ el sistema se vuelve más lento (la válvula “pesa” menos relativamente)

Ejercicio resuelto: Tanque con punto de equilibrio alto Datos: $A = 3 \text{ m}^2$, $c = 0.2 \text{ m}^{5/2}/\text{s}$, $Q_{i,eq} = 0.8 \text{ m}^3/\text{s}$.

$$h_{eq} = \left(\frac{0.8}{0.2}\right)^2 = 16 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{2\sqrt{16}}{0.2} = \frac{8}{0.2} = 40 \text{ s/m}^2$$

$$\tau = 3 \times 40 = 120 \text{ s}$$

$$G(s) = \frac{40}{120s + 1}$$

Resultado: Constante de tiempo de 2 minutos. En $5\tau = 10$ minutos el sistema alcanza el 99% del nuevo equilibrio.

1.11.4 10.4 Tipo 4: Modelar sistema térmico

Procedimiento: 1. Balance de energía: $C_{th}\dot{T} = \sum Q_{in} - \sum Q_{out}$ 2. Pérdidas por conducción: $Q_{loss} = K(T - T_{ext})$ 3. Ya es lineal $\rightarrow$ Laplace directamente

$$G(s) = \frac{R_{th}}{\tau_{th}s + 1}, \quad R_{th} = \frac{1}{K}, \quad \tau_{th} = \frac{C_{th}}{K}$$

Efecto de los parámetros: - Si C_{th} **aumenta** $\rightarrow \tau$ aumenta $\rightarrow$ la habitación tarda más en calentarse/enfriarse - Si K **aumenta** (peor aislamiento) $\rightarrow R_{th}$ disminuye, τ disminuye $\rightarrow$ respuesta más rápida pero equilibrio a menor temperatura

Ejercicio resuelto: Horno industrial Datos: $C_{th} = 10^4 \text{ J/K}$, $K = 5 \text{ W/K}$, $T_{ext} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $P = 500 \text{ W}$.

$$R_{th} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ K/W}$$

$$\tau_{th} = \frac{10^4}{5} = 2000 \text{ s} = 33.3 \text{ min}$$

$$T_{eq} = T_{ext} + P \cdot R_{th} = 20 + 500 \times 0.2 = 120 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$G(s) = \frac{0.2}{2000s + 1}$$

1.11.5 10.5 Tipo 5: Linealizar una EDO no lineal genérica

Procedimiento general: 1. Identificar la no linealidad: $f(x)$ (puede ser $\sqrt{x}$, x^2 , $\sin(x)$, e^x , etc.) 2. Calcular la derivada: $f'(x_{eq})$ 3. Aproximar: $f(x) \approx f(x_{eq}) + f'(x_{eq}) \cdot \delta x$

Linealizaciones frecuentes:

No linealidad	$f(x_{eq})$	$f'(x_{eq})$	Aproximación
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x_{eq}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x_{eq}}}$	$\sqrt{x_{eq}} + \frac{\delta x}{2\sqrt{x_{eq}}}$
x^2	x_{eq}^2	$2x_{eq}$	$x_{eq}^2 + 2x_{eq} \cdot \delta x$
$\sin(x)$	$\sin(x_{eq})$	$\cos(x_{eq})$	$\sin(x_{eq}) + \cos(x_{eq}) \cdot \delta x$
e^x	$e^{x_{eq}}$	$e^{x_{eq}}$	$e^{x_{eq}}(1 + \delta x)$
$1/x$	$1/x_{eq}$	$-1/x_{eq}^2$	$\frac{1}{x_{eq}} - \frac{\delta x}{x_{eq}^2}$
$x \cdot y$	$x_{eq}y_{eq}$	—	$x_{eq}y_{eq} + y_{eq}\delta x + x_{eq}\delta y$

Error frecuente: olvidar que la linealización de un producto $x \cdot y$ genera **dos términos**, no uno. Hay que aplicar Taylor en ambas variables.

1.11.6 10.6 Tipo 6: Obtener FT desde EDO lineal

Procedimiento: 1. Tomar la EDO lineal con coeficientes constantes 2. Aplicar Laplace con condiciones iniciales nulas: $\dot{x} \rightarrow sX(s)$, $\ddot{x} \rightarrow s^2X(s)$ 3. Despejar $G(s) = Y(s)/U(s)$

Regla general: si la EDO es $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

Ejercicio resuelto EDO: $2\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = 4\dot{u} + u$

$$G(s) = \frac{4s + 1}{2s^2 + 3s + 5}$$

Polos: $s = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 40}}{4} = \frac{-3 \pm j\sqrt{31}}{4} = -0.75 \pm j1.39$

Cero: $s = -1/4 = -0.25$

1.11.7 10.7 Tipo 7: Simular sistema no lineal con solve_ivp

Procedimiento en Python: 1. Definir la función $f(t, y, \dots)$ que devuelve $\dot{y}$ 2. Especificar t_{span} , condición inicial y_0 , y t_{eval} 3. Llamar `solve_ivp(f, t_span, y0, t_eval=t_eval, args=(...))` 4. Graficar `sol.t` vs `sol.y[0]`

Plantilla:

```
def sistema(t, y, param1, param2):
    dydt = f(y[0], param1, param2) # EDO no lineal
    return [dydt]

sol = solve_ivp(sistema, (0, T_final), [y0],
                t_eval=np.linspace(0, T_final, 500),
                args=(p1, p2), method='RK45')
```

Truco: para sistemas de 2º orden, convertir a sistema de ecuaciones de primer orden:
 $y_1 = x, y_2 = \dot{x}$.

1.11.8 10.8 Tipo 8: Comparar respuesta NL vs linealizada

Procedimiento: 1. Simular el sistema NL completo con `solve_ivp` 2. Simular el modelo linealizado con `signal.step` (o `signal.lsim`) 3. Superponer ambas respuestas en la misma gráfica 4. Repetir con perturbaciones de distinto tamaño

Qué observar: - **Perturbación pequeña** ($< 10\%$): curvas prácticamente superpuestas - **Perturbación media** ($10 - 30\%$): discrepancia visible pero tendencia correcta - **Perturbación grande** ($> 50\%$): divergencia significativa, valor final diferente

Causa del error: los términos de Taylor de orden ≥ 2 ya no son despreciables.

1.11.9 10.9 Tipo 9: Aplicar analogías entre dominios

Procedimiento: 1. Identificar el tipo de sistema original (mecánico, eléctrico, etc.) 2. Consultar la tabla de analogías 3. Sustituir cada variable/parámetro por su equivalente en el otro dominio 4. La FT tiene la **misma estructura**

Ejercicio resuelto: Circuito equivalente de un sistema mecánico Sistema mecánico:
 $2\ddot{x} + 6\dot{x} + 18x = F$

Equivalente eléctrico (analogía fuerza-tensión): - $m = 2 \text{ kg} \rightarrow L = 2 \text{ H}$ - $b = 6 \text{ Ns/m} \rightarrow R = 6 \Omega$ - $k = 18 \text{ N/m} \rightarrow 1/C = 18 \rightarrow C = 1/18 \text{ F}$

$$2 \frac{d^2 q}{dt^2} + 6 \frac{dq}{dt} + 18q = v(t)$$

La función de transferencia es idéntica: $G(s) = \frac{1}{2s^2 + 6s + 18}$

1.11.10 10.10 Tipo 10: Identificación de caja negra desde respuesta experimental

Procedimiento para sistema de 1er orden (sin sobreoscilación): 1. Medir la ganancia estática: $K = y_\infty/A$ (amplitud del escalón) 2. Medir τ como el tiempo en que la salida alcanza el 63.2% de y_∞ 3. $G(s) = K/(\tau s + 1)$

Procedimiento para sistema de 2º orden (con sobreoscilación): 1. Medir $K = y_\infty/A$ 2. Medir la sobreoscilación: $M_p = (y_{max} - y_\infty)/y_\infty$ 3. Calcular ζ : $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ 4. Medir el periodo de oscilación T_d y calcular $\omega_d = 2\pi/T_d$ 5. Calcular $\omega_n = \omega_d/\sqrt{1-\zeta^2}$ 6. $G(s) = K\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$

Error frecuente: confundir M_p (en tanto por uno) con el porcentaje. Si $y_{max} = 1.2$ y $y_\infty = 1.0$, entonces $M_p = 0.2$ (20%), NO $M_p = 1.2$.

1.12 11. Resumen y tablas de fórmulas clave

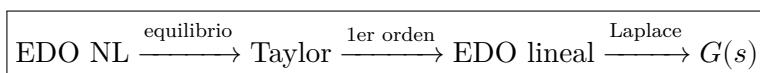
1.12.1 11.1 Modelos por dominio físico

Dominio	Sistema	EDO	FT
Mecánico	Masa-resorte-amort.	$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$	$\frac{1}{ms^2 + bs + k}$
Eléctrico	RLC serie (v_C)	$LC\ddot{v}_C + RC\dot{v}_C + v_C = v$	$\frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$
Hidráulico	Tanque + válvula	$A\dot{h} = Q_i - c\sqrt{h}$	$\frac{R_h}{\tau s + 1}$ (linealizado)
Térmico	Habitación + calefactor	$C_{th}\dot{T} = P - K(T - T_{ext})$	$\frac{R_{th}}{\tau_{th}s + 1}$

1.12.2 11.2 Linealizaciones más usadas

Función	Linealización alrededor de x_{eq}
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x_{eq}} + \frac{\delta x}{2\sqrt{x_{eq}}}$
$\sin(x)$	$\sin(x_{eq}) + \cos(x_{eq}) \cdot \delta x$
x^2	$x_{eq}^2 + 2x_{eq} \cdot \delta x$
e^x	$e^{x_{eq}}(1 + \delta x)$

1.12.3 11.3 Procedimiento de 7 pasos (resumen)



1.12.4 11.4 Parámetros clave de identificación

Parámetro	1er orden	2º orden
Ganancia K	y_∞/A	y_∞/A
Constante de tiempo	$\tau = \text{tiempo al } 63.2\%$	—
Amortiguamiento ζ	—	De $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$
Frec. natural ω_n	—	De $\omega_d = 2\pi/T_d$ y $\omega_n = \omega_d/\sqrt{1-\zeta^2}$