

Tema 8 - Diseño Analítico de Controladores

Asignatura: Fundamentos de Control - GIERM

Objetivos de aprendizaje

- Traducir especificaciones temporales (sobreoscilación, tiempo de establecimiento) a ubicación de polos en el plano s
 - Diseñar controladores P, PI y PID para sistemas de 1er y 2o orden
 - Comprender y trazar el lugar de las raíces (*root locus*) de un sistema
 - Analizar la cancelación polo-cero y sus riesgos
 - Evaluar el efecto de ceros adicionales en la respuesta transitoria
-

1. De especificaciones temporales a ubicación de polos

Las especificaciones de diseño más habituales son:

Especificación	Símbolo	Relación con polos
Sobreoscilación	$SO\%$	$\zeta = \frac{-\ln(SO/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(SO/100)}}$
Tiempo de establecimiento (2%)	t_s	$\zeta\omega_n = \frac{4}{t_s}$
Tiempo de pico	t_p	$\omega_d = \frac{\pi}{t_p}$
Frecuencia natural	ω_n	$\omega_n = \frac{\zeta\omega_n}{\zeta}$

Los polos dominantes deseados en el plano s son:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

donde $\sigma = \zeta\omega_n$ y $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Interpretación de la gráfica:

- La **línea vertical roja** marca $\text{Re}(s) = -\sigma_{\min} = -2$. Los polos deben estar a la **izquierda** para cumplir $t_s \leq 2$ s.
- Las **líneas diagonales azules** forman un sector angular. Los polos deben estar **dentro** del sector para cumplir $SO \leq 10\%$.
- La **zona verde sombreada** es la intersección: cualquier polo en esa región cumple ambas especificaciones.

Resumen de conversión:

$$SO\% \rightarrow \zeta \rightarrow \theta = \arccos(\zeta)$$

$$t_s \rightarrow \sigma_{\min} = \frac{4}{t_s}$$

2. Control de sistemas de 1er orden

Planta genérica de primer orden:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

2.1 Control proporcional (P)

Controlador: $C(s) = K_p$

Función de transferencia en bucle cerrado:

$$G_{BC}(s) = \frac{KK_p}{\tau s + 1 + KK_p} = \frac{\frac{KK_p}{1 + KK_p}}{\frac{\tau}{1 + KK_p}s + 1}$$

Efecto del control P:

- La **constante de tiempo** se reduce: $\tau_{BC} = \frac{\tau}{1 + KK_p} \rightarrow$ el sistema es más rápido
- La **ganancia DC** no es 1: $G_{BC}(0) = \frac{KK_p}{1 + KK_p} < 1$
- **Error en régimen permanente** ante escalón unitario:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + KK_p}$$

Conclusión: el control P **no puede eliminar** el error estacionario en un sistema de tipo 0.

2.2 Control PI (Proporcional-Integral)

Controlador:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = K_p \cdot \frac{T_I s + 1}{T_I s}$$

El PI introduce:

- Un **polo en el origen** ($s = 0$): convierte el sistema en tipo 1 $\rightarrow$ **error cero** ante escalón
- Un **cero** en $s = -1/T_I$

Estrategia de diseño: si elegimos $T_I = \tau$ (la constante de tiempo de la planta), el cero del controlador **cancela** el polo de la planta:

$$C(s) \cdot G(s) = K_p \cdot \frac{\cancel{\tau s + 1}}{T_I s} \cdot \frac{K}{\cancel{\tau s + 1}} = \frac{K K_p}{T_I s}$$

Bucle cerrado:

$$G_{BC}(s) = \frac{K K_p / T_I}{s + K K_p / T_I} = \frac{1}{\frac{T_I}{K K_p} s + 1}$$

Resultado: sistema de 1er orden con ganancia DC = 1 (error cero) y constante de tiempo $\tau_{BC} = T_I / (K K_p)$.

2.3 Ejemplo resuelto: Diseño PI para sistema de 1er orden

Ejercicio resuelto: PI para $G(s) = 2/(s + 1)$

Datos: $G(s) = \frac{2}{s + 1}$. Diseñar un PI tal que $e_{ss} = 0$ y $t_s \leq 2$ s (criterio del 2%).

Paso 1: Identificar la planta. $K = 2$, $\tau = 1$ s, polo en $s = -1$.

Paso 2: Elegir $T_I = \tau = 1$ s para cancelar el polo de la planta.

$$C(s) = K_p \cdot \frac{s + 1}{s}$$

Paso 3: Con la cancelación, el bucle cerrado queda:

$$G_{BC}(s) = \frac{2K_p}{s + 2K_p}$$

El polo de BC está en $s = -2K_p$.

Paso 4: Imponer $t_s \leq 2$ s:

$$t_s = \frac{4}{2K_p} \leq 2 \implies K_p \geq 1$$

Paso 5: Elegimos $K_p = 2$ (margen de seguridad):

$$C(s) = 2 \cdot \frac{s+1}{s} = \frac{2s+2}{s}$$

Verificación:

- $G_{BC}(s) = \frac{4}{s+4} \rightarrow$ polo en $s = -4 \rightarrow t_s = \frac{4}{4} = 1 \text{ s} \leq 2 \text{ s} \checkmark$
 - $G_{BC}(0) = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow e_{ss} = 0 \checkmark$
-

3. Control de sistemas de 2o orden

3.1 Método de asignación de polos (*pole placement*)

Para una planta de 2o orden:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Se desea que el bucle cerrado tenga polos en $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$, lo que corresponde al polinomio característico deseado:

$$D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Procedimiento:

1. Calcular ζ y ω_n a partir de las especificaciones
2. Escribir el polinomio característico deseado: $D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$
3. Escribir el polinomio característico del sistema realimentado con el controlador
4. Igualar coeficientes y resolver para los parámetros del controlador

3.2 Ejemplo resuelto: Asignación de polos en sistema de 2o orden

Ejercicio resuelto: PD para planta $G(s) = 1/(s^2 + 3s + 2)$

Datos: $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. Diseñar un controlador PD $C(s) = K_p + K_d s$ para que $SO \leq 5\%$ y $t_s \leq 1$ s.

Paso 1: Obtener ζ y σ :

$$\zeta = \frac{-\ln(0.05)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.05)}} = \frac{2.996}{\sqrt{9.870 + 8.976}} = 0.690$$

$$\sigma = \frac{4}{t_s} = \frac{4}{1} = 4$$

Paso 2: Calcular ω_n y ω_d :

$$\omega_n = \frac{\sigma}{\zeta} = \frac{4}{0.690} = 5.797 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 5.797 \times 0.724 = 4.197 \text{ rad/s}$$

Paso 3: Polinomio característico deseado:

$$D(s) = s^2 + 2(0.690)(5.797)s + 5.797^2 = s^2 + 8.0s + 33.60$$

Paso 4: Polinomio del bucle cerrado con PD:

$$1 + C(s)G(s) = 1 + \frac{(K_p + K_d s)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s^2 + (3 + K_d)s + (2 + K_p)}{s^2 + 3s + 2} = 0$$

Polinomio característico: $s^2 + (3 + K_d)s + (2 + K_p)$

Paso 5: Igualar coeficientes:

$$3 + K_d = 8.0 \implies \boxed{K_d = 5.0}$$

$$2 + K_p = 33.60 \implies \boxed{K_p = 31.60}$$

Controlador: $C(s) = 31.60 + 5.0s$

4. Lugar de las raíces (*Root Locus*)

4.1 Concepto

El **lugar de las raíces** muestra cómo se mueven los polos del bucle cerrado cuando la ganancia K varía de 0 a ∞ .

Para un sistema con función de transferencia en lazo abierto $KG(s)$, la ecuación característica es:

$$1 + KG(s) = 0 \implies G(s) = -\frac{1}{K}$$

Propiedades principales:

- Las ramas **comienzan** en los polos de $G(s)$ (cuando $K = 0$)
- Las ramas **terminan** en los ceros de $G(s)$ o en el infinito (cuando $K \rightarrow \infty$)
- Número de ramas = número de polos de $G(s)$
- El lugar es **simétrico** respecto al eje real
- Un punto del eje real pertenece al lugar si tiene un número **impar** de polos + ceros a su derecha

4.2 Cálculo numérico

Para trazar el lugar de las raíces numéricamente, resolvemos $1 + KG(s) = 0$ para muchos valores de K :

Si $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, entonces $D(s) + K \cdot N(s) = 0$ define el polinomio característico para cada K .

Análisis del lugar de las raíces:

- **3 ramas** parten de los polos $s = 0, s = -1, s = -2$
- **Puntos de separación** (*breakaway*) en $s = -0.423$ y $s = -1.577$
- **Centro de asíntotas:** $\sigma_a = \frac{0 + (-1) + (-2)}{3} = -1$
- **Ángulos de asíntotas:** $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$
- **K crítico** (cruce con eje imaginario): $K_{crit} = 6 \rightarrow$ para $K > 6$ el sistema es **inestable**

Error frecuente: olvidar que el lugar es solo para $K > 0$. Para $K < 0$ el lugar es diferente.

5. Cancelación polo-cero

5.1 Cuándo es válida

Si el controlador introduce un cero que cancela un polo de la planta:

- **Polo estable** ($\text{Re}(s) < 0$): la cancelación es **aceptable** en la práctica. El modo cancelado decae exponencialmente.

- **Polo inestable** ($\text{Re}(s) > 0$): la cancelación es **peligrosa**. Cualquier perturbación excita el modo oculto, que crece sin control.

5.2 Por qué es peligrosa con polos inestables

Aunque la FT en bucle cerrado no muestre el polo inestable, este sigue presente en la **realización interna** del sistema. Una perturbación infinitesimal lo excita y la salida diverge.

NUNCA cancelar polos inestables con ceros del controlador

6. Efecto de ceros en la respuesta del bucle cerrado

Un cero en la FT de bucle cerrado $G_{BC}(s) = \frac{(s - z) \cdots}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots}$ modifica la respuesta temporal:

Tipo de cero	Efecto
Cero negativo cercano al eje imaginario	Aumenta la sobreoscilación y acelera la respuesta
Cero negativo lejano	Efecto despreciable
Cero positivo (no mínima fase)	Produce undershoot inicial (la respuesta va primero al revés)

Regla práctica: un cero en $s = -z$ afecta significativamente si $|z|$ es del mismo orden que $|\sigma|$ de los polos dominantes.

Observaciones clave:

- **Cero cercano en SPIzq** ($s = -1$): aumenta la sobreoscilación drásticamente (de ~16% a ~50%)
- **Cero lejano en SPIzq** ($s = -10$): casi no afecta la respuesta
- **Cero en SPDer** ($s = +z$): produce *undershoot* (la salida baja antes de subir). Cuanto menor z , mayor el *undershoot*.

Truco para el examen: si tras diseñar un PI aparece un cero cercano a los polos dominantes, la sobreoscilación será **mayor** que la predicha con la fórmula de 2o orden puro.

7. Ejercicios resueltos

7.1 Ejercicio 1: Diseño PI para sistema de 1er orden

Ejercicio resuelto: PI para $G(s) = 5/(2s + 1)$

Datos: $G(s) = \frac{5}{2s + 1}$. Diseñar un PI para $e_{ss} = 0$ y $t_s \leq 1$ s.

Paso 1: Identificar planta: $K = 5$, $\tau = 2$ s, polo en $s = -0.5$.

Paso 2: Elegir $T_I = \tau = 2$ s $\rightarrow$ cancelación polo-cero.

$$C(s) = K_p \cdot \frac{2s + 1}{2s} = K_p \cdot \frac{s + 0.5}{s}$$

Paso 3: Tras cancelación:

$$G_{BC}(s) = \frac{5K_p/2}{s + 5K_p/2} = \frac{1}{\frac{2}{5K_p}s + 1}$$

Polo BC en $s = -5K_p/2$.

Paso 4: Imponer $t_s \leq 1$ s:

$$t_s = \frac{4}{5K_p/2} = \frac{8}{5K_p} \leq 1 \implies K_p \geq 1.6$$

Paso 5: Elegimos $K_p = 2$:

$$C(s) = 2 \cdot \frac{s + 0.5}{s} = \frac{2s + 1}{s}$$

Verificación: $G_{BC}(s) = \frac{5}{s + 5} \rightarrow t_s = \frac{4}{5} = 0.8$ s ≤ 1 s $\checkmark$, $e_{ss} = 0$ $\checkmark$.

7.2 Ejercicio 2: Diseño PD para sistema de 2o orden

Ejercicio resuelto: PD para $G(s) = 4/(s^2 + 2s + 5)$

Datos: $G(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 5}$. Diseñar PD $C(s) = K_p + K_d s$ para $SO \leq 2\%$ y $t_s \leq 2$ s.

Paso 1: Especificaciones $\rightarrow$ parámetros:

$$\zeta = \frac{-\ln(0.02)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.02)}} = \frac{3.912}{\sqrt{9.870 + 15.30}} = 0.780$$

$$\sigma = \frac{4}{t_s} = \frac{4}{2} = 2 \implies \omega_n = \frac{2}{0.780} = 2.564$$

Paso 2: Polinomio deseado:

$$D(s) = s^2 + 2(0.780)(2.564)s + 2.564^2 = s^2 + 4.0s + 6.576$$

Paso 3: Ecuación característica con PD:

$$s^2 + (2 + 4K_d)s + (5 + 4K_p) = 0$$

Paso 4: Igualar:

$$2 + 4K_d = 4.0 \implies \boxed{K_d = 0.5}$$

$$5 + 4K_p = 6.576 \implies \boxed{K_p = 0.394}$$

Nota: el cero del PD en $s = -K_p/K_d = -0.788$ está cerca de los polos dominantes, lo que aumentará algo la sobreoscilación real respecto al valor predicho.

7.3 Ejercicio 3: Análisis del lugar de las raíces

Ejercicio resuelto: Lugar de raíces de $G(s) = (s + 3)/[s(s + 5)]$

Datos: $G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 5)}$. Trazar el lugar de las raíces y determinar el rango de K para estabilidad.

Paso 1: Identificar polos y ceros de lazo abierto:

- Polos: $s = 0, s = -5$ (2 polos)
- Ceros: $s = -3$ (1 cero)
- $n - m = 2 - 1 = 1$ asíntota

Paso 2: Asíntota:

- Centro: $\sigma_a = \frac{(0 + (-5)) - (-3)}{2 - 1} = -2$
- Ángulo: 180°

Paso 3: Tramos en el eje real: entre $s = 0$ y $s = -3$ (1 polo+cero a la derecha = impar) y $s < -5$ (3 polos+ceros a la derecha = impar).

Paso 4: Punto de separación. $K = -\frac{D(s)}{N(s)} = -\frac{s(s + 5)}{s + 3}$. Derivar e igualar a cero:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s + 5)(s + 3) - s(s + 5)}{(s + 3)^2} = 0$$

$$s^2 + 6s + 15 = 0 \implies s = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 60}}{2}$$

Discriminante negativo $\rightarrow$ **no hay puntos de separación reales**. Las ramas van directamente del eje real al cero/infinito.

Paso 5: Estabilidad. Como todas las ramas permanecen en el semiplano izquierdo (una termina en $s = -3$ y la asíntota va a $-\infty$), el sistema es **estable para todo $K > 0$** .

7.4 Ejercicio 4: Análisis de cancelación

Ejercicio resuelto: Cancelación en $G(s) = 1/[(s - 2)(s + 4)]$ con PI

Datos: $G(s) = \frac{1}{(s - 2)(s + 4)}$. Un ingeniero propone un controlador $C(s) = K \cdot \frac{s - 2}{s}$ para cancelar el polo inestable.

Paso 1: El polo $s = 2$ está en el **semiplano derecho** $\rightarrow$ polo **inestable**.

Paso 2: Tras la "cancelación":

$$C(s)G(s) = \frac{K \cancel{(s - 2)}}{s \cancel{(s - 2)}(s + 4)} = \frac{K}{s(s + 4)}$$

La FT de BC parece estable para K apropiado.

Paso 3: Pero la realización interna conserva el modo e^{2t} . Ante la más mínima perturbación, la salida real diverge.

Conclusión:

Cancelación INVÁLIDA: el polo $s = 2$ es inestable.

Solución correcta: usar un controlador que estabilice el polo inestable mediante realimentación, no mediante cancelación. Por ejemplo, un controlador PD con ganancia suficiente para desplazar todos los polos al semiplano izquierdo.

7.5 Ejercicio 5: Diseño PID completo

Ejercicio resuelto: PID para $G(s) = 10/[(s + 1)(s + 5)]$

Datos: $G(s) = \frac{10}{(s + 1)(s + 5)}$. Diseñar PID para $e_{ss} = 0$, $SO \leq 10\%$, $t_s \leq 2$ s.

Paso 1: Especificaciones:

$$\zeta = \frac{-\ln(0.10)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.10)}} = 0.591$$

$$\sigma = \frac{4}{2} = 2 \implies \omega_n = \frac{2}{0.591} = 3.384$$

Paso 2: PID con cancelación de ambos polos:

$$C(s) = K_c \cdot \frac{(s+1)(s+5)}{s}$$

Tras cancelación:

$$G_{LA}(s) = \frac{10K_c}{s}$$

$$G_{BC}(s) = \frac{10K_c}{s + 10K_c}$$

Esto es de 1er orden con polo en $s = -10K_c$. **No hay sobreoscilación** (1er orden no oscila).

Paso 3: Imponer $t_s \leq 2$ s:

$$t_s = \frac{4}{10K_c} \leq 2 \implies K_c \geq 0.2$$

Paso 4: Elegimos $K_c = 0.3$:

$$C(s) = 0.3 \cdot \frac{(s+1)(s+5)}{s} = 0.3 \cdot \frac{s^2 + 6s + 5}{s}$$

Verificación:

- $G_{BC}(s) = \frac{3}{s+3} \rightarrow$ polo en $s = -3 \rightarrow t_s = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ s} \leq 2 \text{ s} \checkmark$
- Sistema tipo 1 (integrador en el lazo) $\rightarrow e_{ss} = 0 \checkmark$
- 1er orden $\rightarrow SO = 0\% \leq 10\% \checkmark$

Nota: la cancelación es válida porque ambos polos ($s = -1$ y $s = -5$) son **estables**.

8. Lugar de las raíces: ejemplos adicionales

8.1 Lugar de raíces con cero: $G(s) = (s+2)/[s^2(s+4)]$

8.2 Lugar de raíces con polos complejos: $G(s) = 1/(s^2 + 2s + 5)$

Observación importante: cuando los polos de LA son complejos conjugados y no hay ceros, las ramas se alejan verticalmente (asíntotas a $\pm 90^\circ$). El sistema se vuelve menos amortiguado al aumentar K pero **nunca se inestabiliza** (las ramas permanecen en el SPIzq con $\text{Re}(s) = -1$ constante).

9. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

Tabla resumen de tipos

#	Tipo de diseño	Planta	Controlador	Ecuación clave	Dificultad
1	P para 1er orden	$\frac{K}{\tau s + 1}$	K_p	$e_{ss} = \frac{1}{1 + KK_p}$	Baja
2	PI para 1er orden (cancelación)	$\frac{K}{\tau s + 1}$	$K_p \frac{\tau s + 1}{\tau s}$	$\tau_{BC} = \frac{\tau}{KK_p}$	Baja
3	PI para 1er orden (sin cancelar)	$\frac{K}{\tau s + 1}$	$K_p \frac{T_I s + 1}{T_I s}$	$s^2 + \dots$ (2o orden)	Media
4	PD para 2o orden	$\frac{K}{s^2 + as + b}$	$K_p + K_d s$	Igualar coefs. con $D(s)$	Media
5	PID cancelación total	$\frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)}$	$K_c \frac{(s + p_1)(s + p_2)}{s}$	$\tau_{BC} = \frac{1}{KK_c}$	Media
6	PID cancelación parcial	$\frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)}$	$K_c \frac{(s + p_1)(T_I s + 1)}{T_I s}$	Igualar coefs.	Alta
7	Lugar de raíces: encontrar K_{crit}	Cualquiera	K	Routh-Hurwitz	Media
8	Lugar de raíces: elegir K para specs	Cualquiera	K	Intersección LR con región	Media

#	Tipo de diseño	Planta	Controlador	Ecuación clave	Dificultad
9	Análisis de cancelación	Con polo inestable	Dado	Verificar SPIzq/SPDer	Baja
10	Efecto de ceros	Con cero adicional	Dado	Comparar con/sin cero	Baja

9.1 Tipo 1: Control P para sistema de 1er orden

$$G_{BC}(s) = \frac{KK_p}{\tau s + 1 + KK_p} \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + KK_p}$$

Cómo afectan los parámetros:

- Si K_p **aumenta** $\rightarrow \tau_{BC}$ disminuye (más rápido) $\rightarrow e_{ss}$ disminuye (pero nunca llega a 0)
- Si $K_p \rightarrow \infty \rightarrow e_{ss} \rightarrow 0$ pero la señal de control $u(t)$ crece sin límite (saturación del actuador)

Paso a paso:

1. Identificar K y τ de la planta
2. Calcular K_p para cumplir $e_{ss} \leq e_{max}$: $K_p \geq \frac{1 - e_{max}}{K \cdot e_{max}}$
3. Verificar $t_s = \frac{4\tau}{1 + KK_p}$

Limitación: no puede lograr $e_{ss} = 0$ en sistema tipo 0.

9.2 Tipo 2: PI con cancelación para 1er orden

$$C(s) = K_p \cdot \frac{\tau s + 1}{\tau s} \quad G_{BC}(s) = \frac{KK_p/\tau}{s + KK_p/\tau}$$

Cómo afectan los parámetros:

- Si K_p **aumenta** $\rightarrow$ polo BC se aleja del origen $\rightarrow$ más rápido
- $T_I = \tau$ es obligatorio para la cancelación

Paso a paso:

1. Identificar K y τ . Fijar $T_I = \tau$
2. Tras cancelación: polo BC en $s = -KK_p/\tau$
3. Imponer t_s : $K_p = \frac{4\tau}{K \cdot t_s}$

4. $e_{ss} = 0$ automáticamente (tipo 1)

Ventaja: diseño sencillo, 1 solo parámetro libre.

Desventaja: depende del conocimiento exacto de τ .

9.3 Tipo 3: PI sin cancelación para 1er orden

$$C(s) = K_p \cdot \frac{T_I s + 1}{T_I s}$$

Sin cancelación, el BC es de **2o orden**:

$$G_{BC}(s) = \frac{KK_p(T_I s + 1)}{\tau T_I s^2 + T_I(1 + KK_p)s + KK_p}$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{KK_p}{\tau T_I}}} \quad \boxed{\zeta = \frac{T_I(1 + KK_p)}{2\sqrt{\tau T_I KK_p}}}$$

Paso a paso:

1. De las specs, obtener ζ_{des} y $\omega_{n,des}$
2. De ω_n : $K_p = \frac{\tau T_I \omega_n^2}{K}$
3. De ζ : $T_I = \frac{2\zeta\sqrt{\tau T_I KK_p}}{1 + KK_p}$ (resolver iterativamente o sustituir)
4. Verificar que el cero del PI no distorsione demasiado la respuesta

Cuidado: el cero en $s = -1/T_I$ aumenta la sobreoscilación respecto a un 2o orden puro.

9.4 Tipo 4: PD para sistema de 2o orden (asignación de polos)

$$C(s) = K_p + K_d s \quad \text{EC: } s^2 + (a_1 + KK_d)s + (a_0 + KK_p) = 0$$

$$\boxed{K_d = \frac{2\zeta_{des}\omega_{n,des} - a_1}{K}} \quad \boxed{K_p = \frac{\omega_{n,des}^2 - a_0}{K}}$$

Cómo afectan los parámetros:

- K_d controla el **amortiguamiento** (coeficiente de s)
- K_p controla la **frecuencia natural** (término independiente)

Paso a paso:

1. Obtener ζ_{des} y $\omega_{n,des}$ de las specs
2. Igualar coeficientes del polinomio característico
3. Resolver para K_p y K_d
4. **Verificar** que $K_d > 0$ (realizable) y que el cero del PD no sea problemático

Limitación: no elimina el error estacionario (sistema sigue siendo tipo 0).

9.5 Tipo 5: PID con cancelación total para 2o orden

$$C(s) = K_c \cdot \frac{(s + p_1)(s + p_2)}{s} \quad \boxed{G_{BC}(s) = \frac{KK_c}{s + KK_c}}$$

Paso a paso:

1. Factorizar la planta: $G(s) = K/[(s + p_1)(s + p_2)]$
2. Los ceros del PID cancelan los polos: $C(s) = K_c(s + p_1)(s + p_2)/s$
3. Resultado: 1er orden con $\tau_{BC} = 1/(KK_c)$
4. De t_s : $K_c = \frac{4}{K \cdot t_s}$

Ventaja: diseño muy simple, sin sobreoscilación.

Requisito: ambos polos deben ser **estables** ($p_1, p_2 > 0$).

9.6 Tipo 6: PID con cancelación parcial

Se cancela solo un polo (el más lento, por ejemplo p_1):

$$C(s) = K_c \cdot \frac{(s + p_1)(T_I s + 1)}{T_I s}$$

Tras cancelar $s + p_1$:

$$G_{LA}(s) = \frac{KK_c(T_I s + 1)}{T_I s(s + p_2)}$$

El BC es de **2o orden** con un cero.

Paso a paso:

1. Cancelar el polo lento con un cero del PID
2. Elegir T_I y K_c para cumplir ζ y ω_n deseados
3. Igualar coeficientes del polinomio de 2o orden resultante
4. Considerar el efecto del cero restante ($s = -1/T_I$)

9.7 Tipo 7: Determinar K_{crit} con el lugar de las raíces

$$K_{crit} = K \text{ tal que los polos del BC cruzan el eje imaginario}$$

Paso a paso (método de Routh):

1. Escribir la ecuación característica: $D(s) + KN(s) = 0$
2. Construir la tabla de Routh
3. Encontrar K que hace cero una fila completa
4. Los polos en el eje imaginario se obtienen del polinomio auxiliar

Paso a paso (método gráfico):

1. Trazar el lugar de las raíces
2. Identificar el cruce con el eje imaginario
3. Leer K en ese punto

Ejemplo clave: para $G(s) = 1/[s(s+1)(s+2)]$, $K_{crit} = 6$ (determinado por Routh: fila de s^1 se anula con $K = 6$).

9.8 Tipo 8: Elegir K del lugar de raíces para cumplir especificaciones

Paso a paso:

1. Trazar las regiones de especificaciones en el plano s (σ_{min} , θ_ζ)
2. Trazar el lugar de las raíces
3. Encontrar la intersección del LR con la frontera de la región
4. Calcular K en ese punto: $K = \frac{|D(s_0)|}{|N(s_0)|}$ donde s_0 es la intersección

Truco: si el LR cruza la línea $\zeta = \zeta_{des}$, sustituir $s = \omega_n(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})$ en la ecuación $1 + KG(s) = 0$ y resolver K y ω_n .

9.9 Tipo 9: Análisis de cancelación polo-cero

Paso a paso:

1. Identificar si el polo que se quiere cancelar está en el **SPIzq** o **SPDer**
2. Si $\text{Re}(\text{polo}) < 0 \rightarrow$ cancelación **aceptable** (modo decae)
3. Si $\text{Re}(\text{polo}) \geq 0 \rightarrow$ cancelación **PROHIBIDA** (modo crece o no decae)

4. Incluso en cancelación aceptable: verificar que la cancelación sea razonablemente exacta. Si hay incertidumbre en el modelo, el modo "cancelado" puede persistir con amplitud no despreciable.

Regla: solo cancelar polos con $\text{Re}(s) < 0$

9.10 Tipo 10: Efecto de ceros en la respuesta

Paso a paso:

1. Identificar el cero de la FT de BC: $s = -z$
2. Comparar $|z|$ con $|\sigma|$ de los polos dominantes
3. Si $|z| \approx |\sigma|$: el cero **afecta significativamente** la respuesta
 - Cero en SPIzq: **aumenta** sobreoscilación, **reduce** tiempo de subida
 - Cero en SPDer: produce **undershoot** (respuesta inversa inicial)
4. Si $|z| \gg |\sigma|$: efecto **despreciable**

Fórmula aproximada para el efecto de un cero en SPIzq sobre la sobreoscilación:

$$SO_{\text{con cero}} \approx SO_{\text{sin cero}} \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{z}\right)$$

Tabla resumen de fórmulas por tipo

Tipo	Controlador	Ganancia BC	Polo(s) BC	Error e_{ss}
1. P + 1er orden	K_p	$\frac{KK_p}{1 + KK_p}$	$s = -\frac{1 + KK_p}{\tau}$	$\frac{1}{1 + KK_p}$
2. PI cancel. + 1er orden	$K_p \frac{\tau s + 1}{\tau s}$	1	$s = -\frac{KK_p}{\tau}$	0
4. PD + 2o orden	$K_p + K_d s$	< 1	Asignación directa	$\neq 0$
5. PID cancel. + 2o orden	$K_c \frac{(s + p_1)(s + p_2)}{s}$	1	$s = -KK_c$	0

10. Resumen y tablas de referencia

Conversión especificaciones $\rightarrow$ plano s

Especificación	Fórmula
ζ	
$SO\% \rightarrow \zeta$	$\zeta = \frac{-\ln(SO/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(SO/100)}}$
$t_s \rightarrow \sigma$	$\sigma = \frac{4}{t_s} \text{ (criterio 2\%)}$
$t_p \rightarrow \omega_d$	$\omega_d = \frac{\pi}{t_p}$
$\zeta, \sigma \rightarrow \omega_n$	$\omega_n = \frac{\sigma}{\zeta}$
Polos deseados	$s = -\sigma \pm j\omega_d$

Lugar de las raíces: reglas rápidas

Propiedad	Fórmula
Inicio	Polos de $G(s)$ (para $K = 0$)
Final	Ceros de $G(s)$ o ∞ (para $K \rightarrow \infty$)
N. de ramas	$n = \text{n. de polos}$
N. de asíntotas	$n - m$
Centro asíntotas	$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m}$
Ángulos asíntotas	$\theta_k = \frac{(2k + 1) \cdot 180^\circ}{n - m}, k = 0, 1, \dots$
Eje real	Punto $s_0 \in \text{LR}$ si n. impar de polos+ceros a su derecha
Punto separación	Resolver $\frac{dK}{ds} = 0$ donde $K = -D(s)/N(s)$

Cancelación polo-cero

Situación	Resultado
Cancelar polo estable	Aceptable (modo decae)
Cancelar polo inestable	PROHIBIDO (modo diverge)
Cancelar polo marginalmente estable ($j\omega$)	Peligroso (modo no decae)

Efecto de ceros

Tipo de cero	Efecto en la respuesta
SPIzq cercano	Aumenta $SO\%$, reduce t_r
SPIzq lejano	Despreciable
SPDer (no mínima fase)	Produce <i>undershoot</i>