

09_diseño_frecuencial

June 19, 2026

1 Tema 9 - Diseño de Controladores en el Dominio de la Frecuencia

Fundamentos de Control - GIERM

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Aplicar el **criterio de Nyquist** para determinar la estabilidad de un sistema realimentado
 - Calcular e interpretar los **márgenes de ganancia y fase** a partir de diagramas de Bode y Nyquist
 - Diseñar **compensadores en adelanto** (lead) para mejorar el margen de fase
 - Diseñar **compensadores en atraso** (lag) para mejorar el margen de ganancia
 - Analizar el efecto de controladores P, PI, PD y PID en el dominio frecuencial
 - Relacionar especificaciones frecuenciales con especificaciones temporales
-

1.2 1. Criterio de Nyquist

El **criterio de Nyquist** permite determinar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir de la respuesta frecuencial en lazo abierto $G(j\omega)H(j\omega)$.

1.2.1 1.1 Enunciado del criterio

Sea $G_{BA}(s) = G(s)H(s)$ la función de transferencia en **bucle abierto** con P polos en el semiplano derecho (SPD). El número de polos inestables del sistema en **lazo cerrado** es:

$$Z = N + P$$

donde: - Z = número de ceros de $1 + G_{BA}(s)$ en el SPD (polos inestables en lazo cerrado) - N = número de **encirculamientos** del punto $(-1, 0)$ en sentido horario - P = número de polos de $G_{BA}(s)$ en el SPD

Para estabilidad en lazo cerrado: $Z = 0 \implies N = -P$

- Si $G_{BA}(s)$ es **estable en lazo abierto** ($P = 0$): el sistema en lazo cerrado es estable si y solo si $N = 0$ (no hay encirculamientos de $(-1, 0)$)
- Si $G_{BA}(s)$ tiene polos en el SPD ($P > 0$): necesitamos $N = -P$ encirculamientos en sentido **antihorario**

1.2.2 1.2 Conteo de encirculamientos

Para contar N , se traza un vector desde $(-1,0)$ hasta un punto del diagrama de Nyquist y se sigue la curva completa: - Cada vuelta completa **horaria** suma $+1$ a N - Cada vuelta completa **antihoraria** suma -1 a N

Truco para el examen: Si la curva de Nyquist deja el punto $(-1,0)$ a su **derecha** al recorrerla en el sentido de ω creciente, hay un encirculamiento horario.

1.3 2. Criterio de Nyquist reducido (sistemas de fase mínima)

Para **sistemas de fase mínima** (sin polos ni ceros en el SPD, sin retardos puros), el criterio se simplifica:

$$\text{Estable en LC} \iff (-1,0) \text{ queda a la IZQUIERDA de la curva de Nyquist}$$

Esto equivale a decir que la curva de Nyquist **no encierra** el punto $(-1,0)$.

Procedimiento práctico: 1. Trazar solo la parte $\omega \geq 0$ del diagrama de Nyquist 2. Observar dónde la curva cruza el eje real negativo 3. Si el cruce ocurre **antes** de -1 (más a la derecha), el sistema es estable 4. Si el cruce ocurre **después** de -1 (más a la izquierda), el sistema es inestable

Error frecuente: Este criterio reducido NO aplica si hay polos en el SPD o retardos puros. En esos casos hay que usar el criterio completo.

1.4 3. Márgenes de estabilidad

Los márgenes de estabilidad cuantifican **cuánto margen** tiene un sistema antes de volverse inestable.

1.4.1 3.1 Margen de ganancia (MG)

Se evalúa en la **frecuencia de cruce de fase** ω_{pc} , donde la fase vale -180° :

$$MG = -20 \log_{10} |G(j\omega_{pc})| \text{ dB}$$

- Si $MG > 0$ dB $\rightarrow$ el sistema es estable (la ganancia puede aumentar MG dB antes de inestabilidad)
- Si $MG < 0$ dB $\rightarrow$ el sistema es inestable

1.4.2 3.2 Margen de fase (MF)

Se evalúa en la **frecuencia de cruce de ganancia** ω_{gc} , donde $|G(j\omega_{gc})| = 1$ (0 dB):

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$$

- Si $MF > 0^\circ$ $\rightarrow$ el sistema es estable (la fase puede disminuir MF grados antes de inestabilidad)

- Si $MF < 0^\circ \rightarrow$ el sistema es inestable

1.4.3 3.3 Valores típicos recomendados

Especificación	Valor típico	Notas
MG	> 6 dB (mejor > 12 dB)	Margen frente a variaciones de ganancia
MF	$30^\circ - 60^\circ$ (ideal $\approx 45^\circ$)	Relacionado con el amortiguamiento

Relación con amortiguamiento: Para sistemas de segundo orden, $MF \approx 100\zeta$ para $\zeta < 0.7$.

1.5 4. Especificaciones frecuenciales y su relación con el dominio temporal

1.5.1 4.1 Ancho de banda (ω_{BW})

El **ancho de banda** es la frecuencia a la cual la magnitud de la función de transferencia en lazo cerrado cae 3 dB respecto a su valor en $\omega = 0$:

$$|T(j\omega_{BW})| = |T(0)| - 3 \text{ dB}$$

- Mayor $\omega_{BW} \rightarrow$ respuesta más rápida (menor t_r)
- Para un sistema de 2º orden: $\omega_{BW} \approx \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$

1.5.2 4.2 Pico de resonancia (M_p)

El **pico de resonancia** es el valor máximo de $|T(j\omega)|$ en lazo cerrado:

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- Mayor $M_p \rightarrow$ mayor sobreoscilación en el tiempo
- Se recomienda $M_p < 1.5$ (equivale a $\zeta > 0.4$)

1.5.3 4.3 Tabla de relaciones frecuencia-tiempo

Especificación temporal	Especificación frecuencial	Relación
Tiempo de subida t_r	Ancho de banda ω_{BW}	$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_{BW}}$
Sobreoscilación M_p	Pico de resonancia M_r	Ambos dependen de ζ

Especificación temporal	Especificación frecuencial	Relación
Error en régimen permanente	Ganancia DC $ T(0) $	$e_{ss} = 1 - T(0) $ para escalón
Tiempo de establecimiento t_s	ω_{BW} y MF	Mayor ω_{BW} $\rightarrow$ menor t_s

1.6 5. Compensador en adelanto (*Lead*)

1.6.1 5.1 Función de transferencia

$$C(s) = K_c \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}, \quad \alpha < 1$$

- Tiene un **cero** en $s = -1/\tau$ y un **polo** en $s = -1/(\alpha\tau)$
- Como $\alpha < 1$, el polo está más a la izquierda que el cero
- **Efecto principal:** añade **fase positiva** en la zona de cruce de ganancia $\rightarrow$ aumenta MF
- **Efecto secundario:** aumenta la ganancia a altas frecuencias (amplifica ruido)

1.6.2 5.2 Máxima fase añadida

La fase máxima se produce a la frecuencia ω_m :

$$\phi_{max} = \arcsin\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right)$$

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

1.6.3 5.3 Procedimiento de diseño (5 pasos)

Paso 1: Ajustar K_c para cumplir la especificación de error en régimen permanente.

Paso 2: Con la ganancia K_c fijada, obtener el Bode de $K_c G(s)$ y medir el MF actual.

Paso 3: Calcular la fase adicional necesaria:

$$\phi_{max} = MF_{deseado} - MF_{actual} + \text{margen de seguridad (5°-12°)}$$

Paso 4: Calcular α a partir de ϕ_{max} :

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_{max})}{1 + \sin(\phi_{max})}$$

Paso 5: Colocar ω_m en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. La ganancia del compensador en ω_m es $1/\sqrt{\alpha}$, por lo que la nueva ω_{gc} es donde $|K_c G(j\omega)| = -10 \log_{10}(1/\alpha)$ dB. Calcular $\tau = 1/(\omega_m \sqrt{\alpha})$.

Ejercicio resuelto: Diseño de compensador en adelanto Datos: Planta $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$.
Especificaciones: $MF \geq 45^\circ$, $K_v \geq 20 \text{ s}^{-1}$.

Paso 1: Ajustar K_c para la constante de velocidad:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K_c \cdot G(s) = K_c \cdot \frac{4}{2} = 2K_c$$

$$2K_c \geq 20 \implies \boxed{K_c = 10}$$

Paso 2: Con $K_c = 10$, se obtiene el Bode de $10G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$. El margen de fase actual resulta ser muy pequeño (el sistema está cerca de la inestabilidad).

Paso 3: Fase adicional necesaria:

$$\phi_{max} = 45^\circ - MF_{actual} + 10^\circ \text{ (margen de seguridad)}$$

Paso 4: Cálculo de α :

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_{max})}{1 + \sin(\phi_{max})}$$

Paso 5: Ubicar ω_m donde $|K_c G(j\omega)| = -10 \log_{10}(1/\alpha) \text{ dB}$ y calcular $\tau = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$.

Resultado: El compensador en adelanto añade fase positiva en la zona de cruce, elevando el margen de fase hasta superar los 45° requeridos.

1.7 6. Compensador en atraso (*Lag*)

1.7.1 6.1 Función de transferencia

$$\boxed{C(s) = K_c \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}, \quad \beta > 1}$$

- Tiene un **cero** en $s = -1/\tau$ y un **polo** en $s = -1/(\beta\tau)$
- Como $\beta > 1$, el polo está más cerca del origen que el cero
- **Efecto principal:** reduce la ganancia a **altas frecuencias** sin afectar la fase en la zona de cruce $\rightarrow$ aumenta MG
- **Efecto secundario:** añade fase negativa a bajas frecuencias (se coloca lejos de ω_{gc})

1.7.2 6.2 Procedimiento de diseño

Paso 1: Ajustar K_c para cumplir la especificación de error en régimen permanente.

Paso 2: Obtener el Bode de $K_c G(s)$ y encontrar la frecuencia ω_{gc}^{nueva} donde la fase es $-180^\circ + MF_{deseado} + 5^\circ$ (margen de seguridad).

Paso 3: Calcular β como la atenuación necesaria:

$$\beta = 10^{|K_c G(j\omega_{gc}^{nueva})|/20}$$

Paso 4: Colocar el cero una década por debajo de ω_{gc}^{nueva} :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{gc}^{nueva}}{10} \Rightarrow \tau = \frac{10}{\omega_{gc}^{nueva}}$$

Paso 5: El polo queda en $1/(\beta\tau)$.

Ejercicio resuelto: Diseño de compensador en atraso Datos: Planta $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$.
Especificaciones: $MF \geq 40^\circ$, $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$.

Paso 1: Constante de velocidad:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K_c \cdot G(s) = K_c \cdot \frac{1}{1 \cdot 5} = \frac{K_c}{5}$$

$$\frac{K_c}{5} \geq 5 \Rightarrow \boxed{K_c = 25}$$

Paso 2: Con $K_c = 25$, obtener el Bode y buscar la frecuencia donde la fase es $-180^\circ + 40^\circ + 5^\circ = -135^\circ$. Esta será la nueva ω_{gc} .

Paso 3: La atenuación necesaria en la nueva ω_{gc} es la magnitud actual en dB:

$$\beta = 10^{|K_c G(j\omega_{gc}^{nueva})|_{dB}/20}$$

Paso 4: Cero del compensador una década por debajo de ω_{gc}^{nueva} :

$$\tau = \frac{10}{\omega_{gc}^{nueva}}$$

Resultado: El compensador en atraso reduce la ganancia a altas frecuencias sin alterar significativamente la fase en la zona de cruce, logrando el $MF \geq 40^\circ$ deseado.

1.8 7. Compensador adelanto-atraso (*Lead-Lag*)

Cuando se necesita mejorar **simultáneamente** el margen de fase y cumplir especificaciones de error en régimen permanente que requieren alta ganancia, se utiliza un compensador **adelanto-atraso**:

$$C(s) = K_c \underbrace{\frac{\tau_1 s + 1}{\alpha \tau_1 s + 1}}_{\text{Adelanto}} \cdot \underbrace{\frac{\tau_2 s + 1}{\beta \tau_2 s + 1}}_{\text{Atraso}}$$

con $\alpha < 1$ y $\beta > 1$.

1.8.1 Procedimiento de diseño

1. **Parte de atraso:** Se diseña primero para cumplir la especificación de error permanente y reducir la ganancia a la zona deseada
2. **Parte de adelanto:** Se diseña sobre el sistema ya compensado con atraso para añadir la fase necesaria

Ventajas: - La parte de **atraso** proporciona alta ganancia DC (bajo error permanente) y reduce ganancia a altas frecuencias - La parte de **adelanto** añade fase positiva en la zona de cruce - Se evita el aumento excesivo de ancho de banda que produce el lead solo

Error frecuente: Diseñar primero el adelanto y luego el atraso. El orden correcto es **atraso primero, adelanto después**, ya que el atraso modifica la ganancia que afecta al diseño del adelanto.

1.9 8. Controladores P, PI, PD, PID en el dominio frecuencial

1.9.1 8.1 Efecto de cada controlador en el Bode

Controlador	$C(s)$	Efecto en magnitud	Efecto en fase
P	K_p	Sube/baja uniformemente	Sin efecto
PI	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$	+20 dB/dec a bajas freq	-90° a baja freq, se recupera
PD	$K_p(1 + T_d s)$	+20 dB/dec a altas freq	+90° a alta freq
PID	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$	Combina PI + PD	Combina PI + PD

1.9.2 8.2 Interpretación frecuencial

- **P:** Desplaza la curva de magnitud arriba/abajo. No cambia la fase → no mejora MF directamente.
- **PI:** Añade un polo en el origen (integrador) → aumenta el tipo del sistema → reduce error permanente. **Pero** añade -90° de fase a bajas frecuencias, lo que puede **reducir MF**.
- **PD:** Añade un cero → añade fase positiva → **aumenta MF**. Pero amplifica ruido a altas frecuencias.
- **PID:** Combina las ventajas: integrador para error permanente + derivador para fase → mejora MF y reduce error.

1.10 9. Ejercicios resueltos

1.10.1 Ejercicio 9.1: Estabilidad mediante Nyquist

Enunciado: Determinar la estabilidad en lazo cerrado de $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+5)}$ para $K = 60$ y $K = 200$.

Solución:

El sistema en lazo abierto es estable ($P = 0$), por lo que necesitamos $N = 0$ para estabilidad en LC.

Frecuencia de cruce de fase: La fase de $G(j\omega)$ alcanza -180° cuando:

$$\angle G(j\omega_{pc}) = -\arctan(\omega) - \arctan(\omega/3) - \arctan(\omega/5) = -180^\circ$$

Resolviendo numéricamente: $\omega_{pc} \approx 5.57$ rad/s

Magnitud en ω_{pc} :

$$|G(j\omega_{pc})| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{pc}^2} \cdot \sqrt{9 + \omega_{pc}^2} \cdot \sqrt{25 + \omega_{pc}^2}}$$

Para $K = 60$: $|G(j\omega_{pc})| < 1 \rightarrow$ la curva de Nyquist **no encierra** $(-1, 0) \rightarrow N = 0 \rightarrow$ ESTABLE

Para $K = 200$: $|G(j\omega_{pc})| > 1 \rightarrow$ la curva de Nyquist **encierra** $(-1, 0) \rightarrow N = 1 \rightarrow$ INESTABLE

1.10.2 Ejercicio 9.2: Cálculo de márgenes desde Bode

Enunciado: Para $G(s) = \frac{50}{(s+2)(s+5)(s+10)}$, calcular MG y MF .

Solución:

Frecuencia de cruce de ganancia (ω_{gc}): Se busca $|G(j\omega_{gc})| = 1$ (0 dB).

$$|G(j\omega)| = \frac{50}{\sqrt{4 + \omega^2} \cdot \sqrt{25 + \omega^2} \cdot \sqrt{100 + \omega^2}} = 1$$

Resolviendo numéricamente: $\omega_{gc} \approx 1.65$ rad/s

Fase en ω_{gc} :

$$\angle G(j\omega_{gc}) = -\arctan\left(\frac{\omega_{gc}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_{gc}}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_{gc}}{10}\right)$$

$$\angle G(j1.65) \approx -39.5^\circ - 18.3^\circ - 9.4^\circ = -67.2^\circ$$

$$MF = 180^\circ + (-67.2^\circ) = 112.8^\circ$$

Frecuencia de cruce de fase (ω_{pc}): Se busca $\angle G(j\omega_{pc}) = -180^\circ$.

Resolviendo: $\omega_{pc} \approx 12.25$ rad/s

$$|G(j\omega_{pc})| \approx 0.032 \Rightarrow |G|_{dB} = 20 \log_{10}(0.032) \approx -29.9 \text{ dB}$$

$$MG = -(-29.9) = 29.9 \text{ dB}$$

Ambos márgenes son amplios $\rightarrow$ el sistema es **muy estable** en lazo cerrado.

1.10.3 Ejercicio 9.3: Diseño completo de compensador en adelanto

Enunciado: Para la planta $G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$, diseñar un compensador en adelanto tal que $MF \geq 50^\circ$ y $K_v \geq 10 \text{ s}^{-1}$.

Paso 1: Constante de velocidad:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K_c \cdot \frac{10}{s(s+2)(s+8)} = K_c \cdot \frac{10}{16} = \frac{5K_c}{8}$$

$$\frac{5K_c}{8} \geq 10 \implies K_c \geq 16 \implies \boxed{K_c = 16}$$

Paso 2: Obtener el Bode de $16G(s) = \frac{160}{s(s+2)(s+8)}$ y medir el margen de fase actual.

Paso 3: Si $MF_{actual} \approx 10^\circ$, la fase adicional necesaria es:

$$\phi_{max} = 50^\circ - 10^\circ + 10^\circ = 50^\circ$$

Paso 4:

$$\alpha = \frac{1 - \sin(50^\circ)}{1 + \sin(50^\circ)} = \frac{1 - 0.766}{1 + 0.766} = \frac{0.234}{1.766} = 0.1325$$

Paso 5: Buscar ω_m donde $|K_c G(j\omega)| = -10 \log_{10}(1/0.1325) = -8.78 \text{ dB}$. Calcular $\tau = 1/(\omega_m \sqrt{0.1325})$.

$$\boxed{C(s) = 16 \cdot \frac{\tau s + 1}{0.1325\tau s + 1}}$$

1.10.4 Ejercicio 9.4: Diseño de compensador en atraso

Enunciado: Para $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$, diseñar un compensador en atraso con $MF \geq 40^\circ$ y $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$.

Paso 1:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K_c \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_c}{2}$$

$$\frac{K_c}{2} \geq 5 \implies \boxed{K_c = 10}$$

Paso 2: Bode de $10G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$. Buscar ω donde fase $= -180^\circ + 40^\circ + 5^\circ = -135^\circ$.

Paso 3: En esa frecuencia, la magnitud es positiva (en dB), por lo que necesitamos atenuar:

$$\beta = 10^{\text{mag}_{dB}/20}$$

Paso 4: Cero una década por debajo: $\tau = 10/\omega_{gc}^{nueva}$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}$$

1.10.5 Ejercicio 9.5: Análisis frecuencial completo

Enunciado: Para $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$ en lazo cerrado unitario, determinar:

- a) MG y MF
- b) ω_{BW} y M_p en lazo cerrado
- c) Estabilidad mediante Nyquist

Solución parte a):

$$|G(j\omega)| = \frac{100}{\sqrt{1+\omega^2} \cdot \sqrt{100+\omega^2}}$$

Para $|G(j\omega_{gc})| = 1$:

$$(1+\omega^2)(100+\omega^2) = 10000$$

$$\omega^4 + 101\omega^2 + 100 = 10000$$

$$\omega^4 + 101\omega^2 - 9900 = 0$$

$$\text{Resolviendo: } \omega^2 = \frac{-101 \pm \sqrt{101^2 + 4 \cdot 9900}}{2} = \frac{-101 \pm \sqrt{49801}}{2} = \frac{-101 \pm 223.2}{2} = 61.1$$

$$\omega_{gc} \approx 7.82 \text{ rad/s}$$

$$\angle G(j7.82) = -\arctan(7.82) - \arctan(7.82/10) = -82.7^\circ - 38.0^\circ = -120.7^\circ$$

$$MF = 180^\circ - 120.7^\circ = 59.3^\circ$$

Para la fase de cruce (-180°): con solo 2 polos (sin integradores) la fase máxima negativa es -180° (asintótica), por lo que $\omega_{pc} \rightarrow \infty$ y $|G(j\omega_{pc})| \rightarrow 0$.

$$MG = \infty$$

Solución parte b): El sistema en lazo cerrado tiene polos dominantes de segundo orden. Con $MF \approx 59^\circ$, se estima $\zeta \approx 0.59$. Esto da $M_p \approx 1/(2 \cdot 0.59 \cdot \sqrt{1-0.59^2}) \approx 1.05$.

Solución parte c): Con solo 2 polos en el SPD izquierdo, la curva de Nyquist no puede encerrar $(-1, 0) \rightarrow$ ESTABLE para cualquier ganancia positiva.

1.10.6 Ejercicio 9.6: Diseño frecuencial completo con verificación

Enunciado: Para $G(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+5)}$, diseñar un controlador para que $MF \geq 45^\circ$, $K_v \geq 30 \text{ s}^{-1}$ y $\omega_{BW} \geq 5 \text{ rad/s}$.

Análisis: Se necesita alta ganancia ($K_v = 30$) y alto ancho de banda, lo que sugiere un compensador **adelanto-atraso** (lead-lag).

Paso 1 (Ganancia):

$$K_v = K_c \cdot \frac{5}{1 \cdot 5} = K_c \implies K_c = 30$$

Paso 2 (Parte lag): Con $K_c = 30$, el Bode muestra un MF muy pequeño. Se busca la frecuencia donde la fase es aproximadamente $-180^\circ + 45^\circ + 5^\circ + 10^\circ = -120^\circ$ (el extra de 10° compensa la fase negativa residual del lag). Se calcula β y τ_2 según el procedimiento del lag.

Paso 3 (Parte lead): Sobre el sistema compensado con lag, se calcula la fase adicional necesaria y se diseña el lead con α y τ_1 .

$$C(s) = 30 \cdot \frac{\tau_1 s + 1}{\alpha \tau_1 s + 1} \cdot \frac{\tau_2 s + 1}{\beta \tau_2 s + 1}$$

1.11 10. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

#	Tipo	Herramientas	Ecuación/criterio clave	Dificultad
1	Estabilidad por Nyquist (fase mínima)	Nyquist, conteo de encirculamientos	$Z = N + P$	Media
2	Estabilidad por Nyquist (con polos en SPD)	Nyquist completo	$N = -P$ para estabilidad	Alta
3	Cálculo de MG y MF desde Bode	Bode, ω_{gc} , ω_{pc}	$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$	Baja
4	Ganancia crítica desde Bode	Bode, ω_{pc}	$K_{cr} = 1/ G(j\omega_{pc}) $	Media

#	Tipo	Herramientas	Ecuación/criterio clave	Dificultad
5	Diseño de compensador lead	5 pasos lead	$\alpha = \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}$	Alta
6	Diseño de compensador lag	5 pasos lag	$\beta = 10^{ G _{dB}/20}$	Alta
7	Diseño lead-lag	Combinar lag + lead	Ambos procedimientos	Muy alta
8	Relación MF - ζ -sobreoscilación temporal	Bode + especificaciones	$MF \approx 100\zeta$	Media
9	Efecto de controlador P en MG/MF	Bode con K variable	Solo desplaza magnitud	Baja
10	Efecto de PI: error permanente vs MF	Bode con integrador	Añade -90° a baja freq	Media
11	Efecto de PD: mejora de MF	Bode con derivador	Añade fase positiva	Media
12	Análisis completo: Bode + Nyquist + diseño	Todas las herramientas	Combinar criterios	Muy alta

1.11.1 10.1 Tipo 1: Estabilidad por Nyquist (fase mínima)

Si $P = 0$ y la curva NO encierra $(-1, 0) \Rightarrow$ Estable en LC

Procedimiento: 1. Verificar que $G_{BA}(s)$ no tiene polos en el SPD ($P = 0$) 2. Evaluar $G_{BA}(j\omega)$ para $\omega \in [0, \infty)$ 3. Trazar el diagrama de Nyquist 4. Observar si $(-1, 0)$ queda encerrado

Cómo afecta la ganancia: - Si K **aumenta** $\rightarrow$ la curva de Nyquist se **escala** hacia afuera $\rightarrow$ más probable encerrar $(-1, 0) \rightarrow$ más probable inestabilidad - Si K **disminuye** $\rightarrow$ la curva se contrae $\rightarrow$ más estable

1.11.2 10.2 Tipo 2: Estabilidad por Nyquist (polos en SPD)

$$Z = N + P, \quad \text{necesitamos } N = -P \text{ (encirculamientos antihorarios)}$$

Procedimiento: 1. Contar los polos de $G_{BA}(s)$ en el SPD: P 2. Trazar Nyquist completo (incluyendo cierre al infinito) 3. Contar encirculamientos N (horario = +1, antihorario = -1) 4. Calcular $Z = N + P$ 5. Si $Z = 0 \rightarrow$ estable. Si $Z > 0 \rightarrow$ inestable con Z polos en SPD

Error frecuente: Olvidar que para sistemas con polos en el eje imaginario (integradores), se necesita una indentación (*indentation*) del contorno de Nyquist.

1.11.3 10.3 Tipo 3: Cálculo de MG y MF desde Bode

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$$

$$MG = -20 \log_{10} |G(j\omega_{pc})|$$

Procedimiento: 1. Trazar el Bode de magnitud y fase de $G(j\omega)$ 2. En el Bode de magnitud, encontrar ω_{gc} donde $|G| = 0$ dB 3. Leer la fase en $\omega_{gc} \rightarrow$ calcular MF 4. En el Bode de fase, encontrar ω_{pc} donde fase = -180° 5. Leer la magnitud en $\omega_{pc} \rightarrow$ calcular MG

Truco para el examen: Si $\omega_{gc} < \omega_{pc}$ y ambos márgenes son positivos $\rightarrow$ el sistema es estable.

1.11.4 10.4 Tipo 4: Ganancia crítica

$$K_{cr} = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$$

La **ganancia crítica** es el valor de K que hace $MG = 0$ dB, es decir, el límite de estabilidad.

Procedimiento: 1. Encontrar ω_{pc} donde $\angle G(j\omega_{pc}) = -180^\circ$ 2. Calcular $|G(j\omega_{pc})|$ 3. $K_{cr} = 1/|G(j\omega_{pc})|$ 4. Para $K < K_{cr}$: estable. Para $K > K_{cr}$: inestable

1.11.5 10.5 Tipo 5: Diseño de compensador en adelante (lead)

$$C(s) = K_c \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}, \quad \alpha < 1$$

Procedimiento completo (5 pasos):

1. K_c desde especificación de error permanente
2. Bode de $K_c G(s) \rightarrow$ medir MF_{actual}
3. $\phi_{max} = MF_{deseado} - MF_{actual} + \text{margen } (5^\circ\text{-}12^\circ)$
4. $\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_{max})}{1 + \sin(\phi_{max})}$
5. ω_m donde $|K_c G| = -10 \log(1/\alpha)$ dB, $\tau = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$

Cómo afectan los parámetros: - Si α **disminuye** $\rightarrow$ más fase añadida $\rightarrow$ pero más amplificación de ruido - Si τ **aumenta** $\rightarrow$ el compensador actúa a frecuencias más bajas - Límite práctico: $\phi_{max} \leq 65^\circ$ con un solo lead. Para más, usar dos en cascada

1.11.6 10.6 Tipo 6: Diseño de compensador en atraso (lag)

$$C(s) = K_c \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}, \quad \beta > 1$$

Procedimiento:

1. K_c desde error permanente
2. Buscar nueva ω_{gc} donde fase = $-180^\circ + MF_{deseado} + 5^\circ$
3. $\beta = 10^{|K_c G(j\omega_{gc}^{nueva})|_{dB}/20}$
4. $\tau = 10/\omega_{gc}^{nueva}$ (cero una década por debajo)
5. Polo en $1/(\beta\tau)$

Cómo afectan los parámetros: - Si β **aumenta** $\rightarrow$ más atenuación a altas frecuencias $\rightarrow$ pero respuesta más lenta - El compensador lag **reduce** el ancho de banda (respuesta más lenta)

1.11.7 10.7 Tipo 7: Diseño lead-lag

$$C(s) = K_c \cdot \frac{\tau_1 s + 1}{\alpha \tau_1 s + 1} \cdot \frac{\tau_2 s + 1}{\beta \tau_2 s + 1}$$

Procedimiento: 1. Fijar K_c por error permanente 2. Diseñar parte lag (atenuar ganancia) 3. Diseñar parte lead sobre el sistema ya compensado con lag (añadir fase) 4. Verificar que el sistema final cumple todas las especificaciones

Cuándo usar lead-lag: - Cuando el lead solo necesitaría $\phi_{max} > 65^\circ$ (impracticable) - Cuando se necesita alta ganancia DC + buen margen de fase - Cuando se quiere limitar el ancho de banda (el lag lo reduce)

1.11.8 10.8 Tipo 8: Relación MF-amortiguamiento-sobreoscilación

$$MF \approx 100\zeta \text{ (para } \zeta < 0.7)$$

$$\%OS = 100 \cdot e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Procedimiento: 1. Desde la especificación de sobreoscilación, calcular ζ 2. Desde ζ , estimar $MF_{deseado} \approx 100\zeta$ 3. Usar el $MF_{deseado}$ como especificación para el diseño frecuencial

MF	ζ aprox.	$\%OS$ aprox.
30°	0.30	37%
45°	0.45	21%
60°	0.60	10%
70°	0.70	5%

1.11.9 10.9 Tipo 9: Efecto de controlador P en márgenes

$$C(s) = K_p$$

Efecto en Bode: - Magnitud: se desplaza $20 \log_{10}(K_p)$ dB uniformemente - Fase: **sin cambio**

Consecuencia: - Si K_p aumenta $\rightarrow \omega_{gc}$ se desplaza a la derecha $\rightarrow$ la fase en la nueva ω_{gc} es más negativa $\rightarrow$ **MF disminuye** - Si K_p aumenta $\rightarrow |G(j\omega_{pc})|$ aumenta $\rightarrow$ **MG disminuye** -

Compromiso: aumentar K_p reduce el error permanente pero empeora la estabilidad

1.11.10 10.10 Tipo 10: Efecto de controlador PI

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \frac{T_i s + 1}{T_i s}$$

Efecto en Bode: - Añade un polo en el origen $\rightarrow +20$ dB/dec a bajas frecuencias - Añade un cero en $s = -1/T_i \rightarrow$ la pendiente vuelve a la original para $\omega > 1/T_i$ - Fase: -90° a $\omega \rightarrow 0$, se recupera a 0° pasado el cero

Consecuencia: - **Elimina error permanente** al escalón (aumenta el tipo del sistema) - **Reduce MF** por la fase negativa añadida - Se coloca $1/T_i$ bien por debajo de ω_{gc} para minimizar la pérdida de MF

1.11.11 10.11 Tipo 11: Efecto de controlador PD

$$C(s) = K_p(1 + T_d s)$$

Efecto en Bode: - Añade un cero en $s = -1/T_d \rightarrow +20$ dB/dec a altas frecuencias - Fase: 0° a baja freq, sube hasta $+90^\circ$ a alta freq

Consecuencia: - **Aumenta MF** por la fase positiva - **Amplifica ruido** a altas frecuencias (la magnitud crece indefinidamente) - En la práctica se añade un polo de alta frecuencia: $C(s) = K_p \frac{T_d s + 1}{T_d s/N + 1}$ con $N \approx 10$

1.11.12 10.12 Tipo 12: Análisis completo (Bode + Nyquist + diseño)

Este es el tipo de problema más completo y habitual en exámenes:

Procedimiento: 1. **Trazar Bode** de $G(j\omega)$ (o $K \cdot G(j\omega)$ si se da la ganancia) 2. **Calcular MG y MF** $\rightarrow$ determinar estabilidad actual 3. **Trazar Nyquist** y verificar consistencia con Bode 4. **Comparar** márgenes con especificaciones 5. **Diseñar compensador** (lead, lag, o lead-lag según necesidad) 6. **Verificar** que el sistema compensado cumple todas las especificaciones 7. **Comprobar** la respuesta temporal (opcional, para confirmar)

Decisión de qué compensador usar: - Solo falta **MF** $\rightarrow$ **lead** - Solo falta ganancia DC $\rightarrow$ **lag** - Falta ambos $\rightarrow$ **lead-lag** - Error permanente inaceptable $\rightarrow$ **PI** o **lag**

1.12 11. Tablas resumen

1.12.1 Tabla 1: Fórmulas clave

Fórmula	Uso
$Z = N + P$	Criterio de Nyquist
$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$	Margen de fase
$MG = -20 \log_{10} G(j\omega_{pc}) $	Margen de ganancia
$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}}$	Parámetro α del lead
$\phi_{max} = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$	Fase máxima del lead
$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$	Frecuencia de máxima fase (lead)
$\beta = 10^{ G _{dB}/20}$	Parámetro β del lag
$MF \approx 100\zeta$	Relación margen de fase - amortiguamiento
$K_{cr} = 1/ G(j\omega_{pc}) $	Ganancia crítica

1.12.2 Tabla 2: Comparación de compensadores

Compensador	Mejora MF	Mejora MG	Error perm.	Ancho de banda	Ruido
Lead ($\alpha < 1$)	Sí	No directamente	No cambia	Aumenta	Empeora
Lag ($\beta > 1$)	No directamente	Sí	Mejora	Disminuye	Mejora
Lead-Lag	Sí	Sí	Mejora	Controlable	Moderado
P	No	No	Mejora con K	Aumenta con K	Neutro
PI	Reduce	Puede reducir	Elimina	Disminuye	Mejora
PD	Sí	Puede mejorar	No cambia	Aumenta	Empeora
PID	Sí	Puede mejorar	Elimina	Aumenta	Moderado

1.12.3 Tabla 3: Valores típicos de referencia

Parámetro	Valor recomendado	Notas
MG	> 6 dB (ideal > 12 dB)	Robustez frente a variaciones de ganancia
MF	$30^\circ - 60^\circ$ (ideal $\approx 45^\circ$)	Buen compromiso rapidez/amortiguamiento
α (lead)	$0.05 - 0.5$	Menor α = más fase pero más ruido

Parámetro	Valor recomendado	Notas
β (lag)	2 – 20	Mayor β = más atenuación pero más lento
Margen de seguridad (lead)	$5^\circ - 12^\circ$	Compensa desplazamiento de ω_{gc}
Cero del lag	1 década bajo ω_{gc}^{nueva}	Minimiza efecto de fase negativa