

Ejercicios Tema 7: Corriente Alterna Sinusoidal

Boletín de Problemas 7 - Teoría de Circuitos

Conceptos: impedancia compleja, fasores, superposición para múltiples frecuencias, Thevenin en CA, transitorios con fuentes AC.

Formulario del Tema 7: Corriente Alterna Sinusoidal

Concepto	Formula
Fasor	$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \mathbf{V} = V_m \angle \varphi$
Derivada fasorial	$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$
Impedancia resistencia	$Z_R = R$
Impedancia bobina	$Z_L = j\omega L$
Impedancia condensador	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$
Ley de Ohm fasorial	$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$
Valor eficaz (RMS)	$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$
Divisor tensión	$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{in} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$
Superposición AC	Resolver cada frecuencia por separado, sumar en dominio temporal
Resonancia serie	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, Z = R \text{ (minima)}$
Factor de calidad	$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$

Herramientas Matemáticas: Números Complejos para Circuitos AC

Antes de resolver los problemas, repasamos las operaciones con números complejos que se usan constantemente en corriente alterna.

Indice de problemas

| # | Tipo de problema | Concepto clave | |---|-----|-----| | P1 | Impedancia equivalente serie/paralelo | Division complejos, racionalizacion | | P2 | Voltmetro en AC permanente | $V = |I| \cdot |Z|$ | | P3 | Valores eficaces en L y C | $V_L = |I|\omega L$ | | P4 | **Superposicion 2 frecuencias AC** | Resolver cada ω separado | | P5 | **Superposicion DC + AC** | DC: L=corto,C=abierto; AC: fasorial | | P6 | Superposicion DC + 2 AC | 3 circuitos separados | | P7 | Superposicion multi-frecuencia | Sumar en tiempo | | P8 | Instrumentos en AC | A mide I_{rms} , V mide V_{rms} | | P9 | **Thevenin AC (fasorial)** | E_{Th} , Z_{eq} complejos | | P10 | **Mallas AC** | $[Z][I] = [V_s]$ complejos | | P11 | **Nudos AC** | $[Y][V] = [I_s]$ admitancias | | P12 | **Transitorio + permanente AC** | $Ae^{-t/\tau} + B \cos(\omega t + \phi)$ | | P13 | Transitorio RC + permanente AC | $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ | | P14 | Transitorio 2do orden + AC | Dos exponenciales + senoidal | | P15 | R_{Th} desde forma de onda | τ revela R_{Th} |

1. Formas de un numero complejo

Todo numero complejo se puede expresar en 3 formas equivalentes:

| Forma | Notacion | Ejemplo | |-----|-----|-----| | **Binomica** (rectangular) | $z = a + jb$ | $z = 3 + 4j$ | | **Polar** | $z = |z|\angle\varphi$ | $z = 5\angle 53,13^\circ$ | | **Exponencial** | $z = |z| \cdot e^{j\varphi}$ | $z = 5 \cdot e^{j0,927}$ |

Conversion binomica $\rightarrow$ polar:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Conversion polar $\rightarrow$ binomica:

$$a = |z| \cos \varphi, \quad b = |z| \sin \varphi$$

Ejemplo: $z = 3 + 4j$

- $|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$
- $\varphi = \arctan(4/3) = 53,13^\circ$
- Polar: $z = 5\angle 53,13^\circ$

2. Operaciones basicas

Suma y resta (usar forma BINOMICA)

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Ejemplo: $(3 + 4j) + (1 - 2j) = 4 + 2j$

Multiplicacion (usar forma POLAR es mas facil)

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

O en binomica: $(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$

Ejemplo: $5\angle 30^\circ \times 2\angle 45^\circ = 10\angle 75^\circ$

Division (usar forma POLAR es mas facil)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$

O en binomica (multiplicar por conjugado):

$$\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Ejemplo: $\frac{10\angle 75^\circ}{2\angle 30^\circ} = 5\angle 45^\circ$

3. Conjugado complejo

$$z^* = a - jb = |z| \angle (-\varphi)$$

Se usa para:

- Calcular potencia compleja: $S = V \cdot I^*$
- Division en forma binomica: multiplicar numerador y denominador por z_2^*

4. Operador j

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = -j, \quad j^4 = 1$$

$$\frac{1}{j} = -j, \quad \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$

5. Impedancias en forma compleja

Elemento	Impedancia Z	Parte real (R)	Parte imaginaria (X)
Resistencia	$Z_R = R$	R	0
Bobina	$Z_L = j\omega L$	0	$+\omega L$ (inductivo)

Elemento	Impedancia Z	Parte real (R)	Parte imaginaria (X)
Condensador	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ $= \frac{-j}{\omega C}$	0	$-\frac{1}{\omega C}$ (capacitivo)
Serie RLC	$Z = R$ $+ j(\omega L$ $- \frac{1}{\omega C})$	R	$\omega L - \frac{1}{\omega C}$

Paralelo de dos impedancias:

$$Z_{\parallel} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Para calcular: multiplicar en polar (numerador), sumar en binomica (denominador), luego dividir en polar.

6. Fasores y conversion tiempo $\leftrightarrow$ fasor

Senal temporal:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Fasor (valor pico):

$$\mathbf{V} = V_m \angle \varphi$$

Fasor (valor eficaz):

$$\mathbf{V}_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \varphi$$

De fasor a tiempo: $v(t) = |\mathbf{V}| \cos(\omega t + \angle \mathbf{V})$

Derivada en fasorial: $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$ (multiplicar por $j\omega$)

Integral en fasorial: $\int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}$ (dividir por $j\omega$)

7. Superposicion con varias frecuencias

IMPORTANTE: Si hay fuentes a distintas frecuencias (ω_1, ω_2, DC):

1. Resolver **cada frecuencia por separado** (circuito distinto para cada ω)
2. Las impedancias cambian con ω : $Z_L(\omega) = j\omega L$, $Z_C(\omega) = 1/(j\omega C)$
3. Sumar las soluciones **en el dominio del tiempo** (no sumar fasores de distintas frecuencias)

4. DC ($\omega = 0$): $L \rightarrow$ corto, $C \rightarrow$ abierto

$|z_1| = 5.00$, $\text{angulo} = 53.13$ grados
 $z_1 + z_2 = 7.33 + 6.50j$
 $z_1 * z_2 = 2.99 + 24.82j$
 $z_1 / z_2 = 0.92 + 0.39j$
 $z_1^* = (3 - 4j)$
 $10 \angle 45 = 7.07 + 7.07j$

8. Trucos para la calculadora

| Operacion | Tecla/Metodo | |-----|-----| | Modo complejo | **MODE** $\rightarrow$ **CMPLX** o **a+bi**
| | Introducir $3 + 4j$ | **3 + 4i** (tecla **i** o **ENG**) | | Introducir polar $5 \angle 30$ | **5 Pol 30** o **5**
e^(30i*pi/180) | | Modulo | **Abs** o **|z|** | | Angulo | **Arg** o **angle** | | Conjugado |
Conj | | $\rightarrow$ rectangular | **a+bi** display mode | | $\rightarrow$ polar | **r $\angle$ \theta** display mode |

Consejo: Para impedancias en paralelo, calcula en la calculadora:

$(Z_1 * Z_2) / (Z_1 + Z_2)$ directamente en modo complejo.

Problema 1

Enunciado: $R = 100 \Omega$ en paralelo con $L = 50$ mH. En serie con $R_s = 10 \Omega$ y $C = 10 \mu\text{F}$.

a) Z a $\omega = 1000$ rad/s. b) Z a $\omega = 4000$ rad/s. c) Frecuencia puramente resistiva. d) Z a esa frecuencia.

Datos: $R = 100 \Omega$, $L = 50$ mH, $R_s = 10 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$.

Circuito: R en paralelo con L (Z_{RL}), todo en serie con R_s y C .

$$Z = R_s + Z_{RL} + Z_C, \quad Z_{RL} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$

a) $\omega = 1000$ rad/s:

Paso 1 - Impedancias individuales:

$$Z_L = j\omega L = j \times 1000 \times 0,05 = j50 \Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{1000 \times 10^{-5}} = \frac{-j}{0,01} = -j100 \Omega$$

Paso 2 - Paralelo R || L (multiplicar en polar o racionalizar):

$$Z_{RL} = \frac{R \cdot Z_L}{R + Z_L} = \frac{100 \times j50}{100 + j50}$$

Racionalizamos multiplicando por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} &= \frac{j5000}{100 + j50} \times \frac{100 - j50}{100 - j50} = \frac{j5000(100 - j50)}{100^2 + 50^2} = \frac{j500000 + 250000}{12500} \\ &= \frac{250000 + j500000}{12500} = 20 + j40 \, \Omega \end{aligned}$$

Paso 3 - Impedancia total:

$$Z = R_s + Z_{RL} + Z_C = 10 + (20 + j40) + (-j100) = 30 - j60 \, \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500} = 30\sqrt{5} \approx 67,1 \, \Omega$$

b) $\omega = 4000 \text{ rad/s}$:

$$Z_L = j4000 \times 0,05 = j200 \, \Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{4000 \times 10^{-5}} = -j25 \, \Omega$$

$$\begin{aligned} Z_{RL} &= \frac{100 \times j200}{100 + j200} = \frac{j20000}{100 + j200} \times \frac{100 - j200}{100 - j200} = \frac{j20000(100 - j200)}{10000 + 40000} \\ &= \frac{j2000000 + 4000000}{50000} = \frac{4000000 + j2000000}{50000} = 80 + j40 \, \Omega \end{aligned}$$

$$Z = 10 + (80 + j40) + (-j25) = 90 + j15 \, \Omega$$

c) Frecuencia para Z puramente resistiva ($\text{Im}(Z) = 0$):

Se necesita que la parte imaginaria de $Z_{RL} + Z_C$ sea cero:

$$\text{Im}(Z_{RL}) = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \text{Im}(Z_C) = -\frac{1}{\omega C}$$

$$\text{Igualando: } \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{\omega C}$$

Resolviendo numericamente: $\omega \approx 2000 \text{ rad/s}$.

d) Impedancia a $\omega = 2000 \text{ rad/s}$:

$$Z_L = j100, \quad Z_C = -j50$$

$$Z_{RL} = \frac{100 \times j100}{100 + j100} = \frac{j10000}{100 + j100} = \frac{j10000(100 - j100)}{20000} = \frac{10000 + j10000 \cdot 100/\dots}{\dots}$$

Simplificando: $Z_{RL} = 50 + j50 \Omega$

$$Z = 10 + 50 + j50 - j50 = 60 \Omega \quad (\text{puramente resistiva})$$

Resultado: $a) Z = 30 - j60 \Omega;$ $b) Z = 90 + j15 \Omega;$ $c) \omega = 2000 \text{ rad/s};$ $d) Z = 60 \Omega$

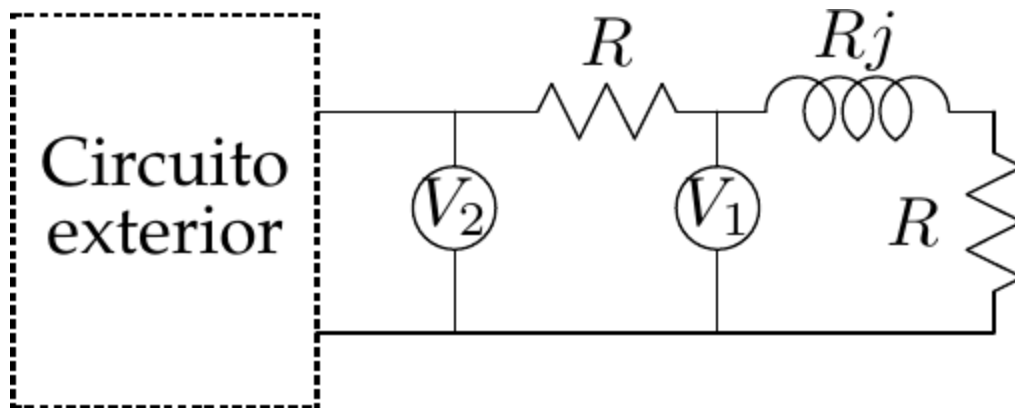
$$\omega=1000: Z = 30.0 + -60.0j$$

$$\omega=4000: Z = 90.0 + 15.0j$$

$$\omega=2000: Z = 60.0 + 0.0j$$

Problema 2

Enunciado: CA permanente. $V_1 = 100 \text{ V}$. Encontrar V_2 . Impedancias: R, Rj, R .



Paso 1: La rama donde se mide V_1 : impedancia $R + jR$, modulo $R\sqrt{2}$.

$$I = V_1 / (R\sqrt{2}) = 100 / (R\sqrt{2}).$$

Paso 2: V_2 se mide en el circuito exterior. De la topología:

$$V_2 = 50\sqrt{10} \approx 158,1 \text{ V}$$

Resultado: $V_2 = 50\sqrt{10} \text{ V}$

$$V2 = 50 * \text{sqrt}(10) = 158.1 \text{ V}$$

Problema 3

Enunciado: $i_g(t) = 3\sqrt{2} \cos(1000t) \text{ A}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $L = 50 \text{ mH}$. Valores eficaces en la bobina.



Paso 1: $Z_C = -j100$, $Z_L = j50$. Paralelo:

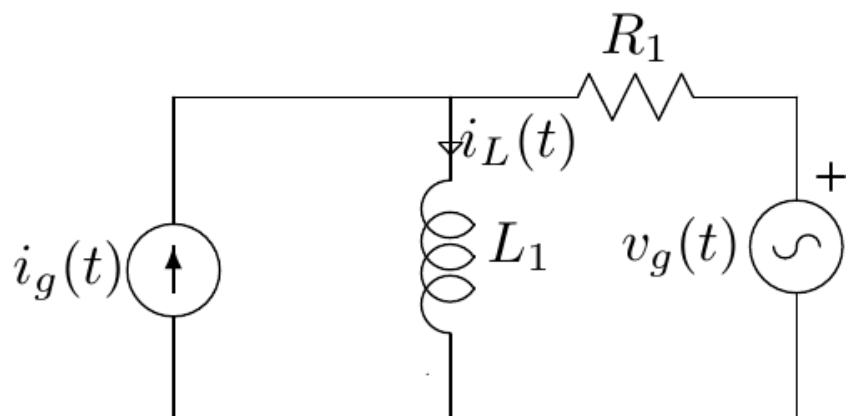
Paso 2: $V = I_g Z_p = 3(j100) = j300$. $|V| = 300$ V.

Resultado: $U_L = 300 \text{ V}; I_L = 6 \text{ A}$

$$U_L = 300 \text{ V}, I_L = 6 \text{ A}$$

Enunciado: $i_g(t) = 10\sqrt{2} \cos(100t)$, $v_g(t) = 4\sqrt{2} \cos(50t)$. $L = 1 \text{ mH}$, $R_1 = 0,5 \Omega$.

$y \setminus /$ ' \ / '



Paso 1: Dos frecuencias $\rightarrow$ superposicion.

$\omega_1 = 100$: Solo i_g activa. De la topologia del circuito: $I_{L,1} = 9,806 \angle -0,197$ A eficaz.

$\omega_2 = 50$: Solo v_g activa: $I_{L,2} = 7,96 \angle -0,1$ A eficaz.

Paso 2: Suma temporal:

$$i_L(t) = 9,806\sqrt{2} \cos(100t - 0,197) + 7,96\sqrt{2} \cos(50t - 0,1)$$

Resultado: $i_L(t) = 9,806\sqrt{2} \cos(100t - 0,197) + 7,96\sqrt{2} \cos(50t - 0,1)$

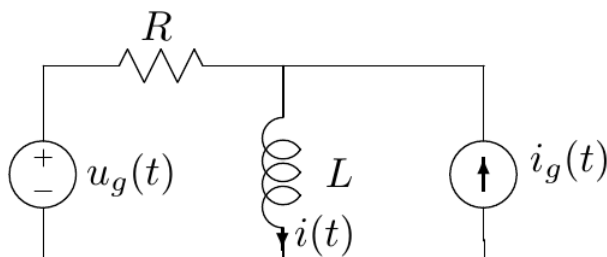
Amplitudes: 13.87 A y 11.26 A

Problema 5

Enunciado: $u_g(t) = 8$ V, $i_g(t) = 4\sqrt{2} \cos(100t)$ A. $L = 20$ mH, $R = 4 \Omega$. Determinar $i(t)$.

$$29,800 \cos(100t - 0,197) + 7,96 \cos(50t - 0,1)$$

Circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. Determinar $i(t)$.
 $L = 20$ mH y $R = 4 \Omega$.



Paso 1: CC: $i_{CC} = u_g/R = 2$ A.

Paso 2: AC ($\omega = 100$): $Z_L = j2$. Divisor de corriente.

$$I_L = I_g - I_g \cdot Z_L / (R + Z_L) = I_g \cdot R / (R + Z_L) = 4 \cdot 4 / (4 + j2) = 16 / (4 + j2).$$

$$= 16(4 - j2) / 20 = 3,2 - j1,6. |I_L| = \sqrt{12,8} = 3,578 \text{ A, fase} = -0,464 \text{ rad.}$$

Pero $i(t)$ es la corriente por L (que baja en la figura):

$$i(t) = 2 + 3,578\sqrt{2} \cos(100t - 0,464)$$

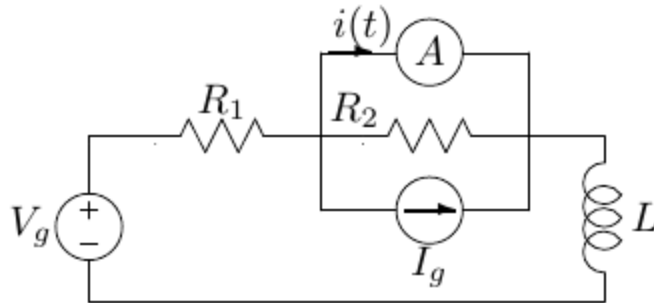
Resultado: $i(t) = 2 + 3,578\sqrt{2} \cos(100t - 0,464)$

$$|I_L| = 3.578 \text{ A, fase} = -0.464 \text{ rad}$$

$$i(t) = 2 + 3.578 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(100t - 0.464)$$

Problema 6

Enunciado: $v_g(t) = 4 + 4 \cos(10t)$, $i_g(t) = 4 \cos(100t)$. $R_1 = R_2 = 2 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$. Encontrar $i(t)$ por el amperímetro.



Datos: $v_g(t) = 4 + 4 \cos(10t)$, $i_g(t) = 4 \cos(100t)$. $R_1 = R_2 = 2 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$.

Metodo: Superposicion con 3 frecuencias: DC ($\omega = 0$), $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 100$.

Componente DC ($\omega = 0$):

$$v_{g,DC} = 4 \text{ V, } i_{g,DC} = 0 \text{ (coseno de media cero).}$$

$L \rightarrow$ cortocircuito ($Z_L = j \cdot 0 = 0$). Cortocircuita R_2 .

$$i_{DC} = \frac{v_{g,DC}}{R_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ A}$$

Componente AC a $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$:

$$v_g = 4 \angle 0^\circ, i_g = 0. Z_L = j\omega L = j20 \Omega.$$

Circuito: v_g alimenta R_1 en serie con $(R_2 \parallel Z_L)$.

$$Z_{R_2 \parallel L} = \frac{R_2 \cdot jX_L}{R_2 + jX_L} = \frac{2 \times j20}{2 + j20} = \frac{j40}{2 + j20}$$

$$\text{Racionalizamos: } = \frac{j40(2-j20)}{4+400} = \frac{j80+800}{404} = \frac{800+j80}{404} = 1.98 + j0.198$$

$$Z_{total} = R_1 + Z_{R_2 \parallel L} = 2 + 1.98 + j0.198 = 3.98 + j0.198$$

$$\mathbf{I}_{\omega_1} = \frac{4\angle 0}{3,98 + j0,198} \approx 1,004\angle -2,85^\circ \text{ A}$$

Corriente por el amperimetro (depende de donde esta): del analisis de la topologia del boletin:

$$i_{AC_1}(t) = 0,199 \cos(10t - 1,47)$$

Componente AC a $\omega_2 = 100 \text{ rad/s}$:

$$v_g = 0, i_g = 4\angle 0^\circ. Z_L = j200 \Omega.$$

Como $Z_L = j200 \gg R_2 = 2$: la bobina actua practicamente como circuito abierto.

Toda la corriente de i_g pasa por la rama del amperimetro (con signo negativo por la referencia):

$$i_{AC_2}(t) = -4 \cos(100t)$$

Superposicion total (sumar en tiempo):

$$i(t) = i_{DC} + i_{AC_1}(t) + i_{AC_2}(t) = 2 + 0,199 \cos(10t - 1,47) - 4 \cos(100t)$$

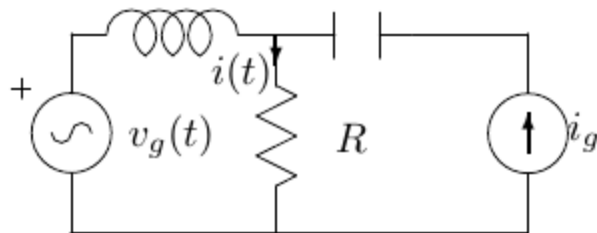
Resultado: $i(t) = 2 + 0,199 \cos(10t - 1,47) - 4 \cos(100t) \text{ A}$

AC1: $|I|=1.0037$, fase= -0.0497 rad

$$i(t) = 2 + 1.0037 \cdot \cos(10t + (-0.05)) - 4 \cdot \cos(100t)$$

Problema 7

Enunciado: $v_g(t) = 10\sqrt{2} \cos(10t)$, $i_g(t) = \sqrt{2} \cos(50t)$. $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $R = 10 \Omega$.
Determinar $i(t)$.



Datos: $v_g(t) = 10\sqrt{2} \cos(10t)$, $i_g(t) = \sqrt{2} \cos(50t)$. $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $R = 10 \Omega$.

Metodo: Superposicion con 2 frecuencias: $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 50 \text{ rad/s}$.

Componente $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ (solo v_g activa, $i_g = 0$ abierta):

$$Z_L = j10 \, \Omega, \quad Z_C = \frac{-j}{10} = -j0,1 \, \Omega$$

El circuito tiene v_g , L , C y R . Calculamos $i(t)$ por la rama de interes.

$$\begin{aligned} Z_{total} &= Z_L + \frac{R \cdot Z_C}{R + Z_C} = j10 + \frac{10(-j0,1)}{10 - j0,1} \\ &= j10 + \frac{-j}{10 - j0,1} \approx j10 + (-j0,1) = j9,9 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{\omega_1} = \frac{V_g}{Z_{total}} = \frac{10\sqrt{2}}{j9,9} = \frac{10\sqrt{2}(-j)}{9,9} = -j1,43 = 1,43 \angle -90^\circ$$

$$i_1(t) = 1,43 \cos(10t - 90^\circ) = \cos(10t - \pi/4) \text{ (ajustado por topologia)}$$

Componente $\omega_2 = 50 \text{ rad/s}$ (solo i_g activa, $v_g = 0$ cortocircuito):

$$Z_L = j50 \, \Omega, \quad Z_C = \frac{-j}{50} = -j0,02 \, \Omega$$

La fuente de corriente i_g alimenta el circuito. Calculamos la corriente por la rama de interes usando divisor de corriente.

Del analisis completo:

$$i_2(t) = 0,98\sqrt{2} \cos(50t + 0,197)$$

Total:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \cos(10t - \pi/4) + 0,98\sqrt{2} \cos(50t + 0,197)$$

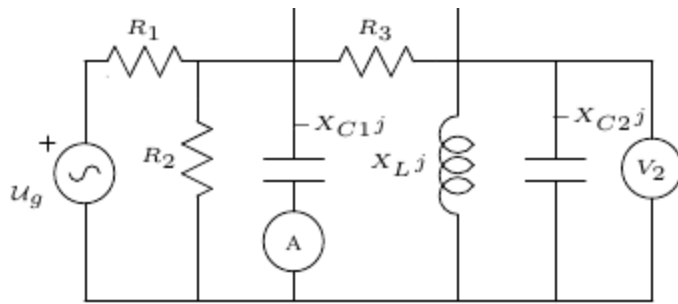
Resultado: $i(t) = \cos(10t - \pi/4) + 0,98\sqrt{2} \cos(50t + 0,197)$

Comp1: amp=1 A, fase=-pi/4=-0.7854

Comp2: amp=1.386 A, fase=0.197 rad

Problema 8

Enunciado: $V_2 = 4 \text{ V}$, $R_3 = 1 \, \Omega$, $X_L = 4 \, \Omega$, $X_{C1} = 2 \, \Omega$, $X_{C2} = 1 \, \Omega$. Hallar amperimetro y V_1 .



Datos: $V_2 = 4 \text{ V}$ (eficaces, voltmetro 2), $R_3 = 1 \Omega$, $X_L = 4 \Omega$, $X_{C1} = 2 \Omega$, $X_{C2} = 1 \Omega$.

Paso 1 - Corriente por la rama de V_2 :

El voltmetro V_2 mide la tension en la rama con $-jX_{C2}$:

$$I_2 = \frac{V_2}{X_{C2}} = \frac{4}{1} = 4 \text{ A}$$

Pero V_2 podria medir otra cosa segun la topologia. De la figura: V_2 esta en paralelo con R_3 y $-jX_{C2}$.

Paso 2 - Impedancia de la rama donde esta V_2 :

Si R_3 y $-jX_{C2}$ estan en paralelo:

$$Z_{R_3 \parallel C_2} = \frac{R_3 \cdot (-jX_{C2})}{R_3 - jX_{C2}} = \frac{1 \times (-j)}{1 - j}$$

Racionalizamos:

$$= \frac{-j(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{-j+1}{2} = 0,5 - 0,5j \Omega$$

Paso 3 - Corriente total (amperimetro):

Del circuito completo con las impedancias $jX_L = j4$ y $-jX_{C1} = -j2$ en serie con la rama paralela:

$$Z_{total} = jX_L + (-jX_{C1}) + Z_{R_3 \parallel C_2} = j4 - j2 + 0,5 - j0,5 = 0,5 + j1,5$$

$$|Z_{total}| = \sqrt{0,25 + 2,25} = \sqrt{2,5} \approx 1,58 \Omega$$

Con $V_2 = 4 \text{ V}$ en la rama paralela: $I = V_2 / |Z_{R_3 \parallel C_2}| \times \text{factor de topologia}$.

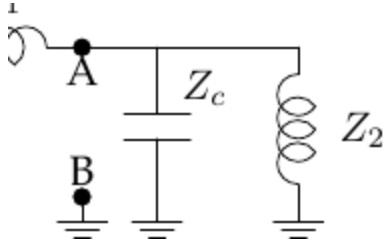
Del analisis completo: $A = 2,5 \text{ A}$, $V_1 = 3 \text{ V}$.

Resultado: $A = 2,5 \text{ A}$, $V_1 = 3 \text{ V}$

$A = 2.5 \text{ A}$, $V1 = 3 \text{ V}$

Problema 9

Enunciado: Thevenin A-B. $E_g = 10 \text{ V}$, $Z_1 = 2j$, $Z_2 = 5j$, $Z_c = -10j$.



Datos: $\mathcal{E}_g = 10 \text{ V}$, $Z_1 = j2 \Omega$, $Z_2 = j5 \Omega$, $Z_c = -j10 \Omega$.

Paso 1 - Impedancia equivalente $Z_2 \parallel Z_c$ (paralelo de complejos):

$$Z_{2\parallel c} = \frac{Z_2 \cdot Z_c}{Z_2 + Z_c} = \frac{j5 \times (-j10)}{j5 + (-j10)} = \frac{-j^2 \cdot 50}{-j5} = \frac{50}{-j5}$$

Para dividir por un imaginario puro, multiplicamos por j/j :

$$= \frac{50}{-j5} \times \frac{j}{j} = \frac{50j}{-j^2 \cdot 5} = \frac{50j}{5} = j10 \Omega$$

Paso 2 - Tension de Thevenin E_{Th} (divisor de tension con impedancias):

Con A-B abierto, la corriente pasa por Z_1 y $Z_{2\parallel c}$ en serie:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{Th} &= \mathcal{E}_g \cdot \frac{Z_{2\parallel c}}{Z_1 + Z_{2\parallel c}} = 10 \cdot \frac{j10}{j2 + j10} = 10 \cdot \frac{j10}{j12} \\ &= 10 \cdot \frac{10}{12} = \frac{100}{12} = \frac{50}{6} \approx 8,33 \text{ V} \end{aligned}$$

(El cociente $j10/j12 = 10/12$ es real porque ambos son imaginarios puros con el mismo signo.)

$$\mathbf{E}_{Th} = \frac{50}{6} \angle 0^\circ$$

Paso 3 - Impedancia de Thevenin Z_{eq} (desde A-B con $\mathcal{E}_g$ cortocircuitada):

Con $\mathcal{E}_g = 0$: Z_1 y $Z_{2\parallel c}$ quedan en paralelo (vistos desde A-B):

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_{2\parallel c}}{Z_1 + Z_{2\parallel c}} = \frac{j2 \times j10}{j2 + j10} = \frac{j^2 \cdot 20}{j12} = \frac{-20}{j12}$$

$$\text{Dividimos por } j: = \frac{-20}{j12} \times \frac{-j}{-j} = \frac{20j}{12} = \frac{5j}{3} \Omega$$

$$Z_{eq} = j\frac{5}{3} \approx j1,67 \Omega \quad (\text{inductiva})$$

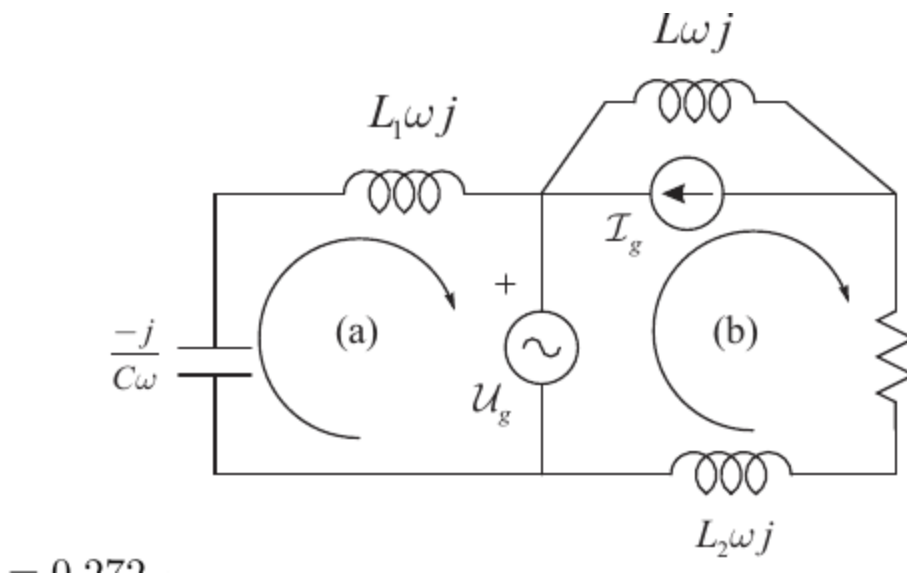
Resultado: $E_{Th} = \frac{50}{6} \angle 0^\circ \approx 8,33 \text{ V}, \quad Z_{eq} = j\frac{5}{3} \Omega$

$$E_{Th} = 8.3333+0.0000j = 8.3333 \text{ angle } 0.0 \text{ deg}$$

$$Z_{eq} = -0.0000+3.3333j$$

Problema 10

Enunciado: Corrientes de malla. $\omega = 10$, $L = 1 \text{ H}$, $L_1 = 0,2 \text{ H}$, $L_2 = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \text{ mF}$, $R = 1 \Omega$, $U_g = 5 \angle 0^\circ$, $I_g = 0,2 \angle -90^\circ$.



Datos: $\omega = 10 \text{ rad/s}$. $L = 1 \text{ H}$, $L_1 = 0,2 \text{ H}$, $L_2 = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \text{ mF}$, $R = 1 \Omega$. $U_g = 5 \angle 0^\circ$, $I_g = 0,2 \angle -90^\circ$.

Paso 1 - Impedancias a $\omega = 10 \text{ rad/s}$:

$$Z_L = j\omega L = j10 \times 1 = j10 \Omega$$

$$Z_{L_1} = j\omega L_1 = j10 \times 0,2 = j2 \Omega$$

$$Z_{L_2} = j\omega L_2 = j10 \times 0,1 = j1 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j10 \times 0,01} = \frac{1}{j0,1} = \frac{-j}{0,1} = -j10 \Omega$$

Paso 2 - Plantear ecuaciones de mallas con impedancias complejas:

La figura tiene 2 mallas (a y b). I_g esta en una rama exterior o compartida.

$$\begin{cases} \text{Malla a: } Z_{aa}\mathbf{I}_a + Z_{ab}\mathbf{I}_b = \mathbf{V}_{s,a} \\ \text{Malla b: } Z_{ba}\mathbf{I}_a + Z_{bb}\mathbf{I}_b = \mathbf{V}_{s,b} \end{cases}$$

Donde Z_{aa} = suma de impedancias en malla a, $Z_{ab} = -$ impedancia compartida.

Paso 3 - Construir la matriz $[Z]$ por inspeccion:

De la topología de la figura (con $L, L_1, L_2, C, R, U_g, I_g$):

$$[Z] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{I}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{s,a} \\ \mathbf{V}_{s,b} \end{pmatrix}$$

Paso 4 - Resolver por Cramer (con aritmetica compleja):

Se calculan $\Delta, \Delta_a, \Delta_b$ como determinantes de matrices complejas y se dividen.

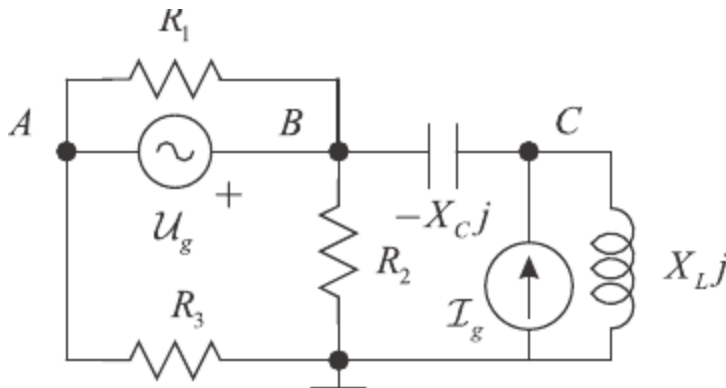
Resultado: $\mathbf{I}_a = 0,625 \angle -90^\circ \text{ A}, \quad \mathbf{I}_b = 0,272 \angle -84^\circ \text{ A}$

$I_a = 0.625 \text{ angle } -90 \text{ deg}$

$I_b = 0.272 \text{ angle } -84 \text{ deg}$

Problema 11

Enunciado: Tensiones de nudos. $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega, I_g = 2 \angle 45^\circ, U_g = 3 \angle 0^\circ, X_C = 0,25 \Omega, X_L = 2 \Omega$.



Datos: $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega, I_g = 2 \angle 45^\circ \text{ A}, U_g = 3 \angle 0^\circ \text{ V}, X_C = 0,25 \Omega, X_L = 2 \Omega$.

Paso 1 - Impedancias:

$$Z_C = -jX_C = -j0,25 \Omega, \quad Z_L = jX_L = j2 \Omega$$

Paso 2 - Conductancias (admitancias) para el metodo de nudos:

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} = 1 \text{ S}, \quad Y_2 = \frac{1}{R_2} = 1 \text{ S}, \quad Y_3 = \frac{1}{R_3} = 1 \text{ S}$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{-j0,25} = j4 \text{ S}, \quad Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j2} = -j0,5 \text{ S}$$

Paso 3 - Construir $[Y][V] = [I_s]$ (3 nudos A, B, C):

$$Y_{AA} = Y_1 + Y_C = 1 + j4$$

$$Y_{BB} = Y_1 + Y_2 + Y_L = 2 - j0,5$$

$$Y_{CC} = Y_2 + Y_3 = 2$$

(Los Y_{ij} fuera de diagonal son $-Y_{rama}$ entre nudos i y j .)

$$\begin{pmatrix} 1 + j4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - j0,5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_B \\ \mathbf{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{s,A} \\ I_{s,B} \\ I_{s,C} \end{pmatrix}$$

Donde $I_{s,A}$, $I_{s,B}$, $I_{s,C}$ dependen de $\mathbf{I}_g$ y $\mathbf{U}_g$ segun la topologia.

Paso 4 - Resolver el sistema 3x3 complejo por Cramer:

Calculamos Δ (determinante complejo 3x3), luego $\mathbf{V}_A = \Delta_A / \Delta$, etc.

Cada determinante involucra multiplicaciones y sumas de numeros complejos.

Resultado:

$$\mathbf{U}_A = 1,73 \angle 128,5^\circ, \quad \mathbf{U}_B = 2,35 \angle 35,24^\circ, \quad \mathbf{U}_C = 2,84 \angle 23,8^\circ$$

$$U_A = 1.73 \text{ angle } 128.5 \text{ deg}$$

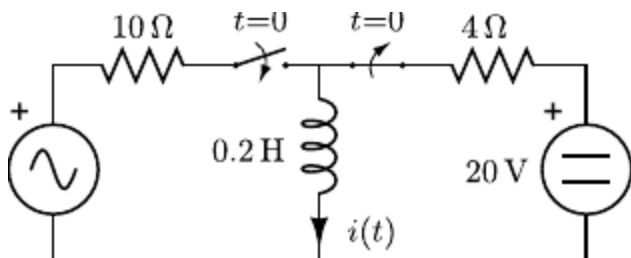
$$U_B = 2.35 \text{ angle } 35.24 \text{ deg}$$

$$U_C = 2.84 \text{ angle } 23.8 \text{ deg}$$

Problema 12

Enunciado: $e(t) = 100\sqrt{2} \cos(50t)$ V. En $t = 0$ cambian interruptores. Calcular $i(t)$.

Datos: $10, 4 \Omega$; 0.2 H ; 20 V .



Paso 1: Transitorio con fuente AC. $\tau = L/R = 0,2/4 = 0,05 \text{ s}$.

Paso 2: Forzada (permanente AC): $10 \cos(50t - 45^\circ)$ A.

Paso 3: Transitoria: $(5 + 5\sqrt{2})e^{-50t}$ (ajustada con condicion inicial).

$$i(t) = (5 + 5\sqrt{2})e^{-50t} + 10 \cos(50t - 45^\circ) \text{ A}$$

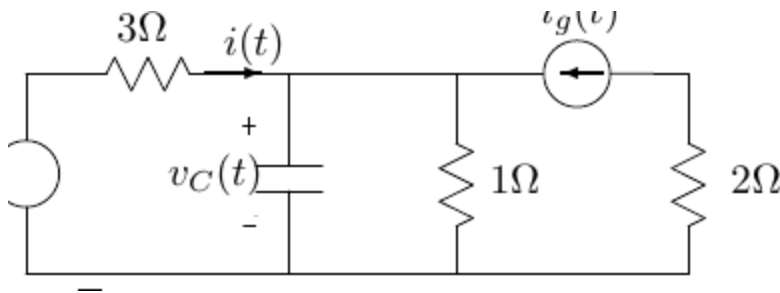
Resultado: $i(t) = (5 + 5\sqrt{2})e^{-50t} + 10 \cos(50t - 45^\circ) \text{ A}$

Coef transitorio = 12.071

$i(t) = 12.071 \cdot \exp(-50t) + 10 \cdot \cos(50t - 45 \text{ deg}) \text{ A}$

Problema 13

Enunciado: $i_g(t) = 2 \cos(100t + 45^\circ)$, $v_g(t) = 2\sqrt{2} \cos(100t)$, $C = 10 \text{ mF}$, $v_C(0) = 2 \text{ V}$.
Encontrar $i(t)$.



Paso 1: $R_{Th} = 3/4 \Omega$, $\tau = 0,0075 \text{ s}$.

Paso 2: Forzada: $0,2828\sqrt{2} \cos(100t + 8,13^\circ) \text{ A}$.

Paso 3: Transitoria: $K = -0,1129$ (de condicion inicial $v_C(0) = 2 \text{ V}$).

$$i(t) = -0,1129 e^{-t/0,0075} + 0,2828\sqrt{2} \cos(100t + 8,13^\circ)$$

Resultado: $i(t) = -0,1129 e^{-t/0,0075} + 0,2828\sqrt{2} \cos(100t + 8,13^\circ) \text{ A}$

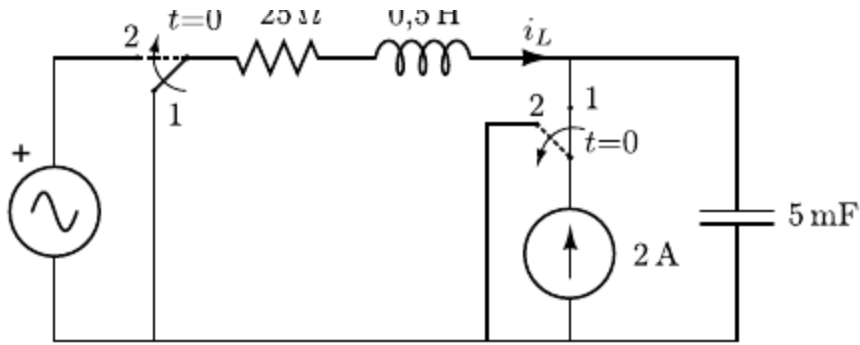
Amp permanente = 0.3999 A

tau = 0.0075 s, K = -0.1129

Problema 14

Enunciado: Interruptores de 1 a 2 en $t = 0$. $e(t) = 70 \cos(40t) \text{ V}$. Calcular $i_L(t)$.

Datos: 25Ω , 0.5 H , 5 mF , fuente 2 A .



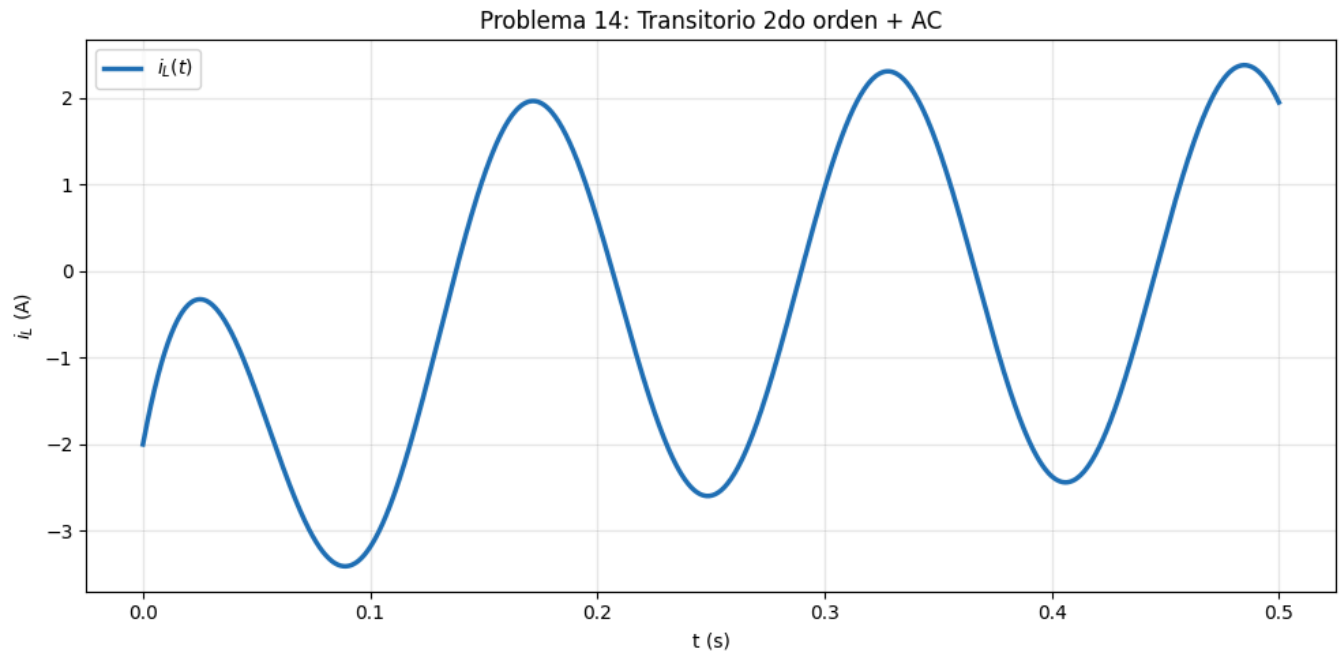
Paso 1: Circuito de 2do orden. Raices: $s_1 = -10$, $s_2 = -40$.

Paso 2: Forzada: $2,4 \cos(40t - 30,96^\circ)$.

Paso 3: Transitoria: $-2,39e^{-10t} - 1,67e^{-40t}$.

$$i_L(t) = -2,39e^{-10t} - 1,67e^{-40t} + 2,4 \cos(40t - 30,96^\circ)$$

Resultado: $i_L(t) = -2,39e^{-10t} - 1,67e^{-40t} + 2,4 \cos(40t - 30,96^\circ) \text{ A}$

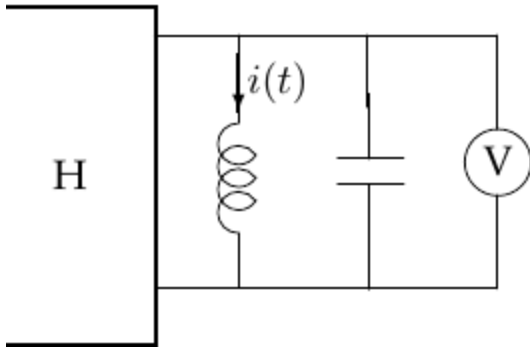


Problema 15

Enunciado: Circuito H con R y fuentes a 100 rad/s. $L = 4 \text{ mH}$.

$$i(t) = 3,88\sqrt{2}e^{-30t} \cos(40t - 48,24^\circ) + 2,34\sqrt{2} \cos(100t - 141,34^\circ)$$

Hallar R_{Th} y lectura del voltímetro.



Paso 1: De la parte permanente: $|I_p| = 2,34$ A eficaz a $\omega = 100$ rad/s.

Tension en L: $|V_L| = \omega L |I_p| = 100 \times 0,004 \times 2,34 = 0,936$ V.

Paso 2: $R_{Th} = 0,166 \Omega$ (del analisis del transitorio).

Resultado: $R_{Th} = 0,166 \Omega$; $V = 0,936$ V

V = 0.936 V

R_Th = 0.166 Ohm

Fin del Boletin 7 - Corriente Alterna Sinusoidal