

04_ecuaciones_nodos_mallas

April 3, 2026

1 Tema 4 - Ecuaciones de Nodos y Mallas para Circuitos Resistivos

Teoría de Circuitos - ETSI, Universidad de Sevilla

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Comprender el balance de incógnitas y ecuaciones en un circuito resistivo
- Formular sistemáticamente las **ecuaciones de nodos** (análisis nodal) y escribir la matriz de conductancias **G**
- Formular sistemáticamente las **ecuaciones de mallas** y escribir la matriz de resistencias **R**
- Manejar **fuentes de tensión** en análisis nodal (supernudo) y **fuentes de corriente** en análisis de mallas (supermalla)
- Incorporar **fuentes dependientes** al sistema de ecuaciones
- Resolver ejercicios tipo boletín de la asignatura con ambos métodos

Configuración lista.

1.2 1. Balance de incógnitas y ecuaciones

En un circuito con n nudos y c componentes, las incógnitas son las tensiones y corrientes de cada componente:

- **Incógnitas totales:** $2c$ (una tensión v_k y una corriente i_k por componente)
- **Ecuaciones disponibles:** $2c$

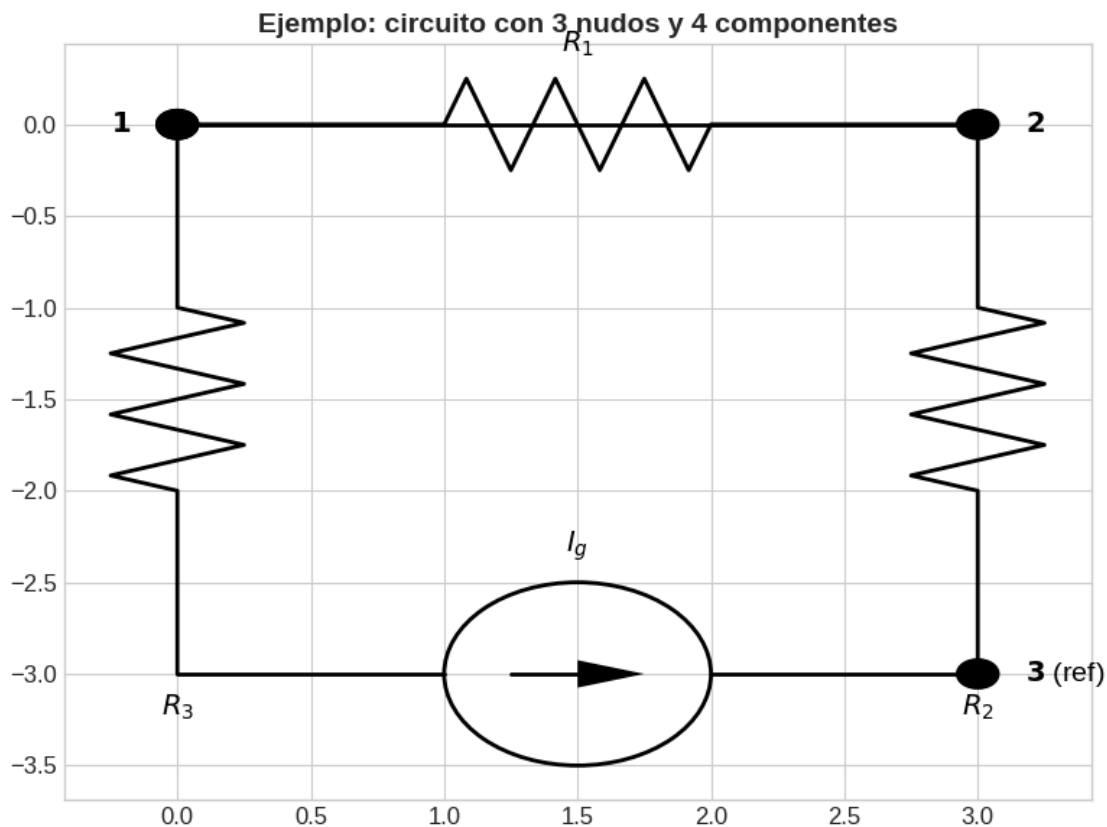
Las ecuaciones se desglosan en:

Tipo de ecuación	Cantidad	Origen
Ecuaciones de componente (V-I)	c	Ley de Ohm, relaciones de fuentes
Ecuaciones de KCL (nudos)	$n - 1$	Ley de corrientes de Kirchhoff
Ecuaciones de KVL (mallas)	$c - n + 1$	Ley de tensiones de Kirchhoff
Total	$c + (n - 1) + (c - n + 1) = 2c$	

$$2c \text{ incógnitas} = c \text{ (componente)} + (n - 1) \text{ (KCL)} + (c - n + 1) \text{ (KVL)}$$

Ejemplo: Un circuito con $n = 3$ nudos y $c = 4$ componentes tiene: $- 2 \times 4 = 8$ incógnitas - 4 ecuaciones de componente + 2 KCL + 2 KVL = 8 ecuaciones

Clave: El sistema siempre está determinado. Los métodos de nudos y mallas reducen el número de ecuaciones a resolver.



1.3 2. Ecuaciones de nudos (análisis nodal)

El método de nudos reduce el sistema a $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas (las tensiones de nudo).

1.3.1 2.1 Procedimiento sistemático

1. **Elegir un nudo de referencia** (tierra, $V_{\text{ref}} = 0$). Se elige el que tenga más conexiones.
2. **Asignar tensiones** $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ a los demás nudos.
3. **Escribir KCL en cada nudo k :** la suma de corrientes que salen del nudo es cero.
4. **Sustituir** las corrientes por las tensiones usando la ley de Ohm: $I_{kj} = G_{kj}(V_k - V_j)$.
5. **Resolver** el sistema lineal.

1.3.2 2.2 Forma matricial

Para un circuito con solo resistencias y fuentes de corriente independientes:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_s$$

donde: - $\mathbf{G}$ es la **matriz de conductancias** ($n - 1 \times n - 1$) - $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \dots, V_{n-1}]^T$ son las tensiones de nudo - $\mathbf{I}_s$ es el vector de fuentes de corriente

1.3.3 2.3 Construcción de la matriz $\mathbf{G}$

Elemento	Regla
G_{kk} (diagonal)	Suma de todas las conductancias conectadas al nudo k
G_{kj} (fuera de diagonal)	- (suma de conductancias entre nudos k y j)

$$G_{kk} = \sum_j G_{kj}^{(\text{conectadas a } k)} \quad G_{kj} = -G_{jk}^{(\text{entre } k \text{ y } j)}$$

Propiedad: La matriz $\mathbf{G}$ es **simétrica** cuando no hay fuentes dependientes: $G_{kj} = G_{jk}$.

1.3.4 2.4 Vector de fuentes $\mathbf{I}_s$

- Si una fuente de corriente I_g **entra** al nudo k : se suma $+I_g$ en la fila k
- Si una fuente de corriente I_g **sale** del nudo k : se suma $-I_g$ en la fila k

1.4 3. Ecuaciones de mallas (análisis de mallas)

El método de mallas reduce el sistema a $c - n + 1$ ecuaciones con $c - n + 1$ incógnitas (las corrientes de malla).

1.4.1 3.1 Procedimiento sistemático

1. **Identificar las mallas** independientes (ventanas del circuito).
2. **Asignar corrientes de malla** $I_1, I_2, \dots, I_m$ en sentido horario (convención).
3. **Escribir KVL en cada malla k :** la suma de caídas de tensión en sentido horario es cero.
4. **Sustituir** las tensiones por corrientes usando la ley de Ohm: $V_R = R \cdot (I_k - I_j)$.
5. **Resolver** el sistema lineal.

1.4.2 3.2 Forma matricial

Para un circuito con solo resistencias y fuentes de tensión independientes:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

donde: - $\mathbf{R}$ es la **matriz de resistencias** ($m \times m$, con $m = c - n + 1$) - $\mathbf{I} = [I_1, I_2, \dots, I_m]^T$ son las corrientes de malla - $\mathbf{V}_s$ es el vector de fuentes de tensión

1.4.3 3.3 Construcción de la matriz $\mathbf{R}$

Elemento	Regla
R_{kk} (diagonal)	Suma de todas las resistencias en la malla k
R_{kj} (fuera de diagonal)	– (suma de resistencias compartidas entre mallas k y j)

Propiedad: La matriz $\mathbf{R}$ es **simétrica** cuando no hay fuentes dependientes: $R_{kj} = R_{jk}$.

1.4.4 3.4 Vector de fuentes $\mathbf{V}_s$

- Si una fuente de tensión E_g produce una subida en el sentido de recorrido de la malla k : se suma $+E_g$ en la fila k
- Si produce una caída: se suma $-E_g$

1.5 4. Fuentes de tensión en ecuaciones de nudos: el supernudo

Cuando hay una **fuentes de tensión** E_g entre dos nudos k y j (ninguno de referencia), no podemos escribir directamente la KCL porque no conocemos la corriente por la fuente.

1.5.1 4.1 Concepto de supernudo

Se agrupan los nudos k y j en un **supernudo**. Las ecuaciones son:

1. **Ecuación de restricción** (la fuente impone la diferencia de tensión):

$$\boxed{V_k - V_j = E_g}$$

2. **KCL del supernudo** (se escribe para la superficie que engloba ambos nudos):

$$\sum \text{corrientes que salen del supernudo} = 0$$

1.5.2 4.2 Caso especial: fuente conectada a referencia

Si la fuente E_g está entre el nudo k y la referencia:

$$V_k = E_g$$

La tensión del nudo es directamente conocida. Se elimina esa incógnita y se reduce el sistema.

Truco para el examen: Antes de montar el sistema, mira si alguna fuente de tensión fija directamente una tensión de nudo. Eso simplifica mucho.

1.6 5. Fuentes de corriente en ecuaciones de mallas: la supermalla

Cuando hay una **fuentes de corriente** I_g en una rama compartida por las mallas k y j , no podemos escribir la KVL directamente porque no conocemos la tensión en bornes de la fuente.

1.6.1 5.1 Concepto de supermalla

Se combinan las mallas k y j en una **supermalla** (se recorre el contorno exterior de ambas, saltando la fuente de corriente).

1. **Ecuación de restricción** (la fuente impone la diferencia de corrientes de malla):

$$I_k - I_j = \pm I_g$$

(el signo depende de la orientación)

2. **KVL de la supermalla** (se escribe recorriendo el contorno exterior).

1.6.2 5.2 Caso especial: fuente en rama exterior

Si la fuente de corriente I_g está solo en la malla k (rama exterior):

$$I_k = \pm I_g$$

La corriente de malla es directamente conocida. Se elimina esa incógnita.

1.7 6. Fuentes dependientes

Las fuentes dependientes (controladas) añaden una relación entre la variable de control y la fuente:

Tipo	Símbolo	Relación
Fuente de tensión controlada por tensión (FTCT)	$E = \mu \cdot V_x$	Tensión $\rightarrow$ Tensión
Fuente de tensión controlada por corriente (FTCI)	$E = r \cdot I_x$	Corriente $\rightarrow$ Tensión
Fuente de corriente controlada por tensión (FICT)	$I = g \cdot V_x$	Tensión $\rightarrow$ Corriente
Fuente de corriente controlada por corriente (FICC)	$I = \alpha \cdot I_x$	Corriente $\rightarrow$ Corriente

1.7.1 6.1 Procedimiento

1. Escribir las ecuaciones de nudos o mallas **como si la fuente dependiente fuera independiente**.
2. **Expresar la variable de control** (V_x o I_x) en función de las incógnitas del sistema (tensiones de nudo o corrientes de malla).
3. **Sustituir** en las ecuaciones.
4. Reagrupar términos y resolver.

Importante: Con fuentes dependientes, la matriz **G** (o **R**) **ya no es simétrica** en general.

1.7.2 6.2 Error frecuente

No confundir la variable de control con una incógnita independiente. Siempre hay que expresarla en función de las V_k o I_k del sistema.

1.8 7. Ejercicios resueltos del boletín

A continuación se resuelven los problemas tipo del boletín de la asignatura, aplicando los métodos de nudos y mallas de forma sistemática.

1.8.1 7.1 Problema 1: Análisis nodal básico (3 nudos)

Datos: Circuito con 3 nudos (A , B , referencia). $I_g = 10$ A, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$.

La fuente de corriente I_g entra por el nudo A .

Ejercicio resuelto: Análisis nodal P1 Paso 1: Elegir el nudo inferior como referencia. Incógnitas: V_A , V_B .

Paso 2: Escribir KCL en cada nudo.

Nudo A (corrientes que salen):

$$G_1 \cdot V_A + G_2 \cdot (V_A - V_B) = I_g$$

$$\frac{1}{2}V_A + \frac{1}{4}(V_A - V_B) = 10$$

Nudo B (corrientes que salen):

$$G_2 \cdot (V_B - V_A) + G_3 \cdot V_B + G_4 \cdot V_B = 0$$

$$\frac{1}{4}(V_B - V_A) + \frac{1}{5}V_B + \frac{1}{10}V_B = 0$$

Paso 3: Forma matricial $\mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_s$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & 0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Resolver el sistema.

$$\Delta = 0.75 \times 0.55 - (-0.25)^2 = 0.4125 - 0.0625 = 0.35$$

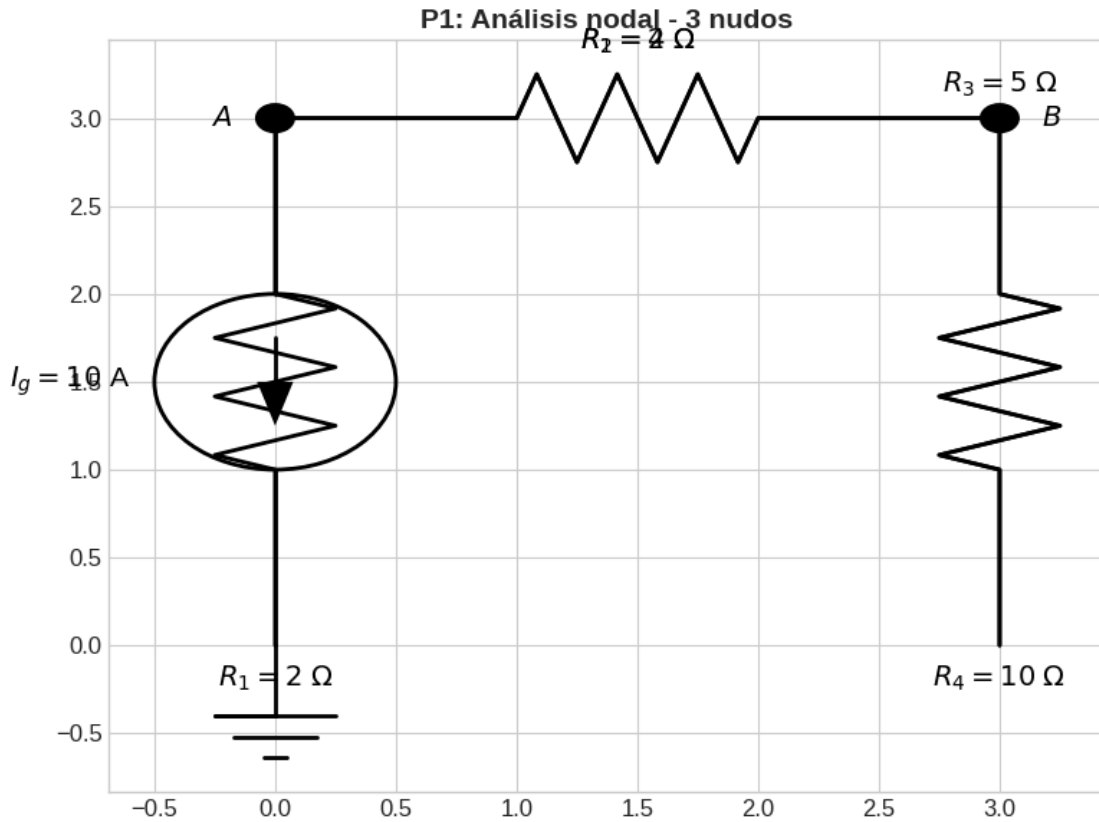
$$V_A = \frac{10 \times 0.55 - 0 \times (-0.25)}{0.35} = \frac{5.5}{0.35} = 15.71 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{0.75 \times 0 - (-0.25) \times 10}{0.35} = \frac{2.5}{0.35} = 7.14 \text{ V}$$

Paso 5: Verificación. Corriente por R_2 :

$$I_{R_2} = \frac{V_A - V_B}{R_2} = \frac{15.71 - 7.14}{4} = 2.14 \text{ A}$$

$$\boxed{V_A = 15.71 \text{ V}, \quad V_B = 7.14 \text{ V}}$$



1.8.2 7.2 Problema 2: Análisis nodal con 5 nudos

Datos: Circuito con 5 nudos. $I_g = 5$ A entra al nudo A . $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \Omega$. Encontrar V_A , V_B , V_C .

Ejercicio resuelto: Análisis nodal P2 Paso 1: Nudo de referencia: nudo D (tierra). Dos nudos adicionales E quedan en el camino. Simplificando la topología a 3 incógnitas esenciales: V_A , V_B , V_C .

Paso 2: KCL en cada nudo (todas las $G_k = 1$ S):

Nudo A:

$$3V_A - V_B - V_C = 5$$

Nudo B:

$$-V_A + 3V_B - V_C = 0$$

Nudo C:

$$-V_A - V_B + 3V_C = 0$$

Paso 3: Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Resolver (por simetría $V_B = V_C$):

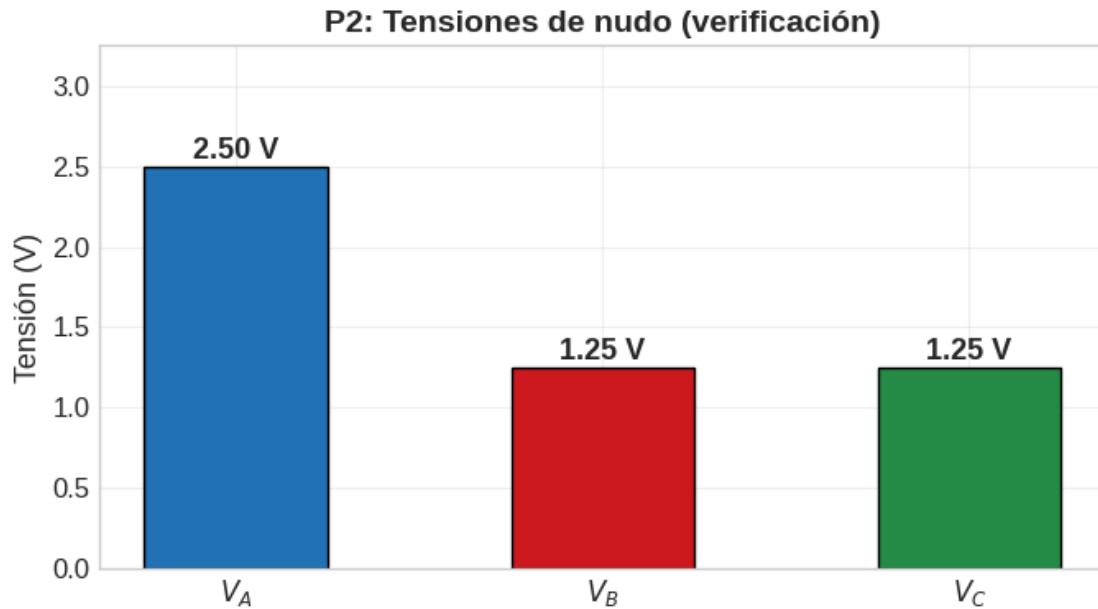
De las ecuaciones 2 y 3: $-V_A + 3V_B - V_B = 0 \Rightarrow V_B = V_C$.

Sustituyendo en ecuación 1: $3V_A - 2V_B = 5$.

De ecuación 2: $-V_A + 2V_B = 0 \Rightarrow V_A = 2V_B$.

$$3(2V_B) - 2V_B = 5 \Rightarrow 4V_B = 5 \Rightarrow V_B = 1.25 \text{ V}$$

$$V_A = 2.50 \text{ V}, \quad V_B = V_C = 1.25 \text{ V}$$



1.8.3 7.3 Problema 3: Análisis nodal con fuente de tensión (E_g)

Datos: $E_g = 12 \text{ V}$ entre nudo A y referencia, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $I_g = 4 \text{ A}$ entra a nudo B .

Ejercicio resuelto: Análisis nodal P3 Paso 1: La fuente de tensión fija directamente V_A :

$$V_A = E_g = 12 \text{ V}$$

Paso 2: Solo queda una incógnita: V_B . KCL en nudo B :

$$\frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_B}{R_3} = -I_g$$

$$\frac{V_B - 12}{3} + \frac{V_B}{6} + \frac{V_B}{2} = -4$$

Paso 3: Resolver:

$$V_B \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = -4 + \frac{12}{3}$$

$$V_B \cdot 1.0 = -4 + 4 = 0$$

$$\boxed{V_A = 12 \text{ V}, \quad V_B = 0 \text{ V}}$$

Observación: El nudo B queda a 0 V (mismo potencial que la referencia) por la combinación particular de valores.

1.8.4 7.4 Problema 4: Supernudo (fuente de tensión entre dos nudos)

Datos: $E_g = 6 \text{ V}$ entre nudos A y B ($V_A - V_B = 6 \text{ V}$). $R_1 = 2 \Omega$ (de A a ref), $R_2 = 4 \Omega$ (de B a ref), $R_3 = 3 \Omega$ (de A a C), $R_4 = 6 \Omega$ (de C a ref), $I_g = 3 \text{ A}$ entra a nudo C .

Ejercicio resuelto: Supernudo P4 Paso 1: Supernudo $\{A, B\}$. Ecuaciones:

Restricción del supernudo:

$$V_A - V_B = 6$$

KCL del supernudo (corrientes que salen de A y B juntos):

$$\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_A - V_C}{R_3} = 0$$

$$\frac{V_A}{2} + \frac{V_B}{4} + \frac{V_A - V_C}{3} = 0$$

KCL nudo C:

$$\frac{V_C - V_A}{R_3} + \frac{V_C}{R_4} = -I_g$$

$$\frac{V_C - V_A}{3} + \frac{V_C}{6} = -3$$

Paso 2: Tres ecuaciones, tres incógnitas (V_A , V_B , V_C). Sustituimos $V_A = V_B + 6$:

De KCL supernudo:

$$\frac{V_B + 6}{2} + \frac{V_B}{4} + \frac{V_B + 6 - V_C}{3} = 0$$

$$V_B \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} - \frac{V_C}{3} = 0$$

$$\frac{13}{12}V_B - \frac{V_C}{3} = -5$$

De KCL nudo C:

$$\frac{V_C - V_B - 6}{3} + \frac{V_C}{6} = -3$$

$$-\frac{V_B}{3} + \frac{V_C}{2} = -3 + 2 = -1$$

Paso 3: Resolver el sistema 2×2 :

De la segunda: $V_B = \frac{3}{2}V_C + 3$. Sustituyendo:

$$\frac{13}{12} \left(\frac{3V_C}{2} + 3 \right) - \frac{V_C}{3} = -5$$

$$\frac{13V_C}{8} + \frac{13}{4} - \frac{V_C}{3} = -5$$

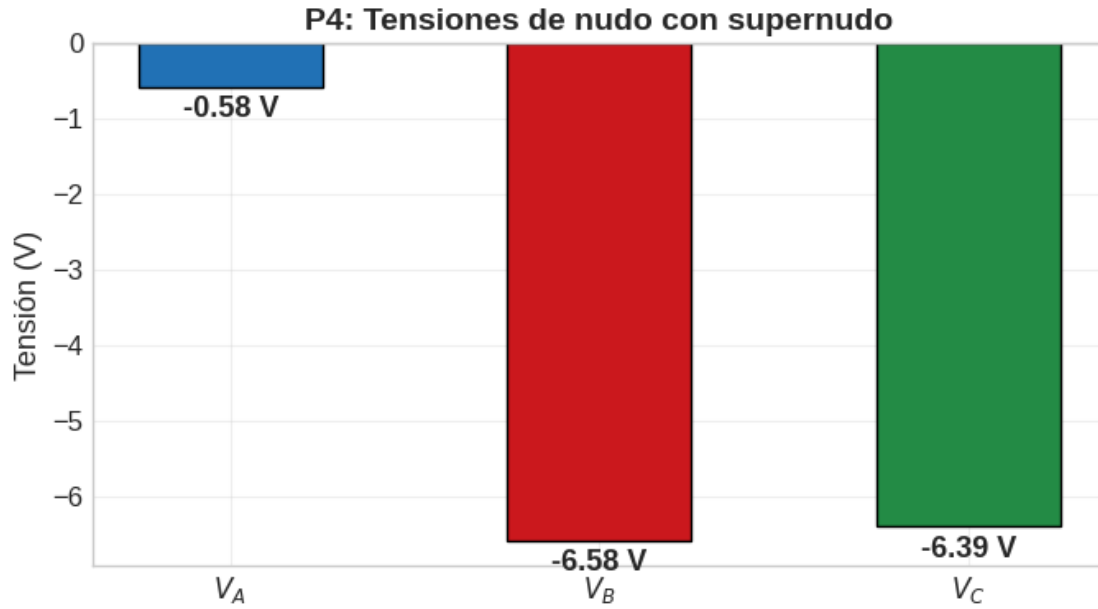
$$V_C \left(\frac{13}{8} - \frac{1}{3} \right) = -5 - 3.25 = -8.25$$

$$V_C \cdot \frac{31}{24} = -8.25 \implies V_C = \frac{-8.25 \times 24}{31} = -6.39 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{3(-6.39)}{2} + 3 = -6.58 \text{ V}$$

$$V_A = V_B + 6 = -0.58 \text{ V}$$

$V_A = -0.58 \text{ V}, \quad V_B = -6.58 \text{ V}, \quad V_C = -6.39 \text{ V}$



1.8.5 7.5 Problema 6: Análisis de mallas (2 mallas)

Datos: Dos mallas. $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 5 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$ (compartida).

Ejercicio resuelto: Análisis de mallas P6 Paso 1: Asignar corrientes de malla I_1 (horario, malla izquierda), I_2 (horario, malla derecha).

Paso 2: KVL malla 1 (sentido I_1):

$$R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot (I_1 - I_2) = E_1$$

$$2I_1 + 4(I_1 - I_2) = 10$$

$$6I_1 - 4I_2 = 10$$

KVL malla 2:

$$R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot (I_2 - I_1) = -E_2$$

$$3I_2 + 4(I_2 - I_1) = -5$$

$$-4I_1 + 7I_2 = -5$$

Paso 3: Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Resolver:

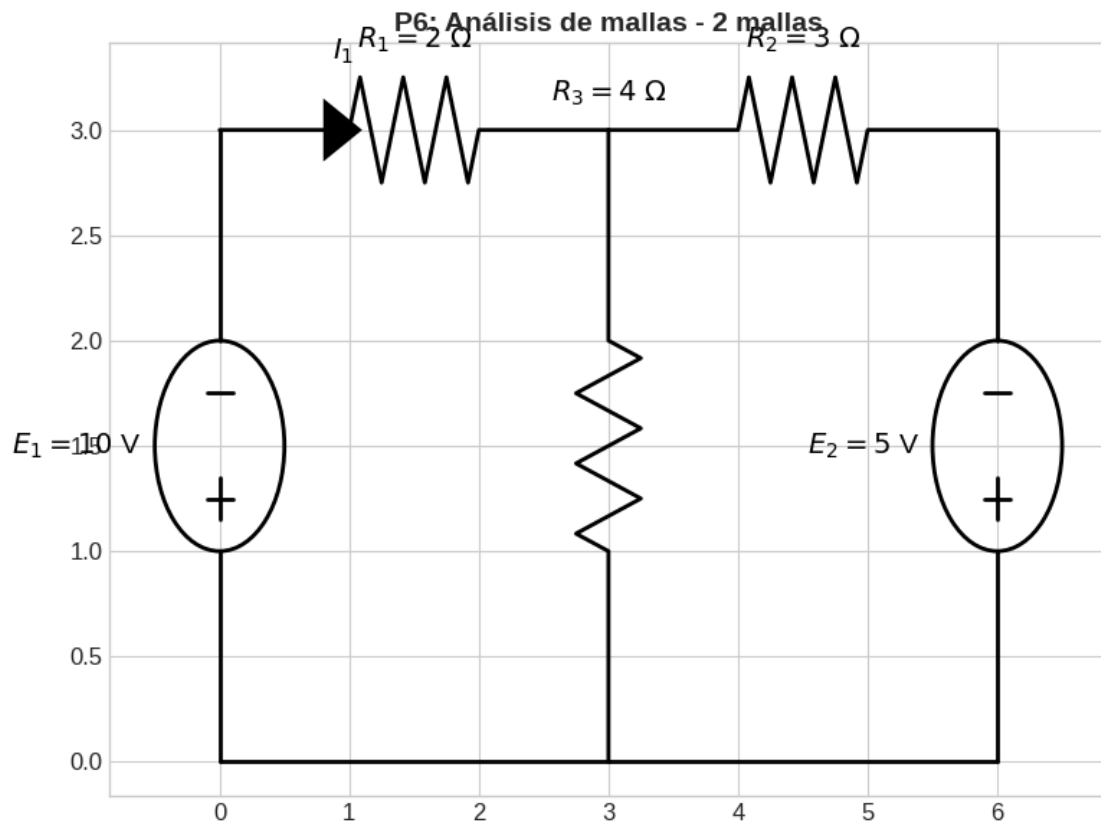
$$\Delta = 6 \times 7 - (-4)^2 = 42 - 16 = 26$$

$$I_1 = \frac{10 \times 7 - (-5)(-4)}{26} = \frac{70 - 20}{26} = \frac{50}{26} = 1.923 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{6 \times (-5) - (-4) \times 10}{26} = \frac{-30 + 40}{26} = \frac{10}{26} = 0.385 \text{ A}$$

Corriente por R_3 : $I_{R_3} = I_1 - I_2 = 1.923 - 0.385 = 1.538 \text{ A}$ (de arriba a abajo).

$I_1 = 1.923 \text{ A}, \quad I_2 = 0.385 \text{ A}$



1.8.6 7.6 Problema 7: 3 mallas con todas las R iguales

Datos: 3 mallas, todas las resistencias $R = 1 \Omega$. $E_g = 10 \text{ V}$ en la malla 1.

Ejercicio resuelto: Análisis de mallas P7 **Paso 1:** Con $R = 1 \Omega$ para todas las resistencias, la diagonal tiene la suma de resistencias en cada malla y los términos cruzados son las compartidas (con signo negativo).

Supongamos que cada malla tiene 3 resistencias y comparte una con cada malla adyacente:

Paso 2: Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Resolver:

$$\Delta = 3(3 \times 3 - 1) - (-1)(-1 \times 3) = 3 \times 8 - 3 = 21$$

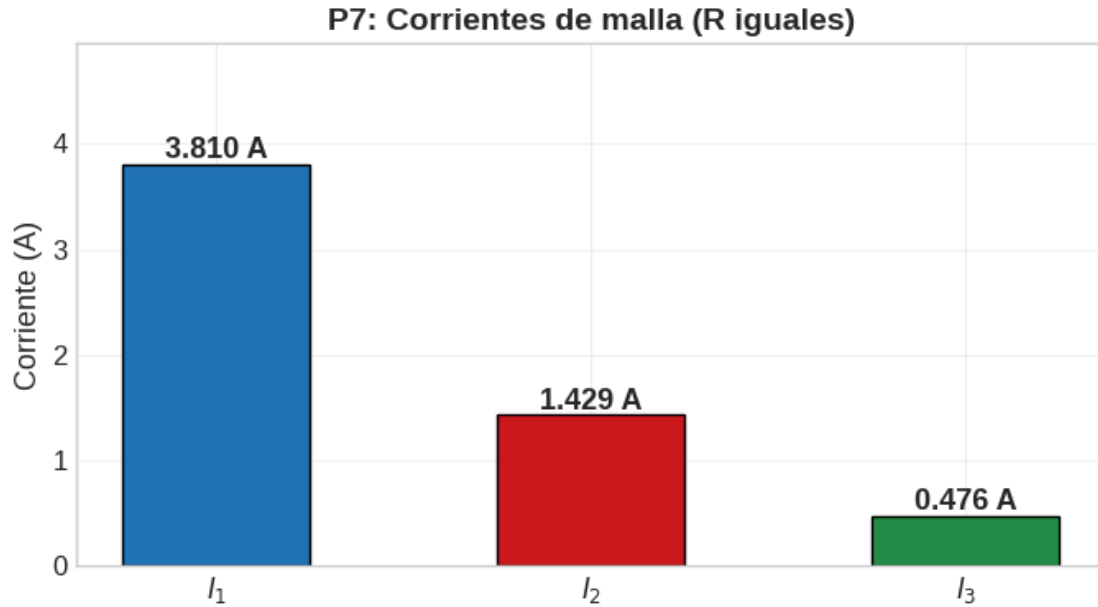
$$I_1 = \frac{10 \times 8}{21} = \frac{80}{21} = 3.810 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{10 \times 3}{21} = \frac{30}{21} = 1.429 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{10 \times 1}{21} = \frac{10}{21} = 0.476 \text{ A}$$

$$\boxed{I_1 = 3.810 \text{ A}, \quad I_2 = 1.429 \text{ A}, \quad I_3 = 0.476 \text{ A}}$$

Observación: Al estar todas las R iguales, la corriente decrece con la distancia a la fuente.



1.8.7 7.7 Problema 8: 3 mallas con fuente de corriente (supermalla)

Datos: 3 mallas. $E_g = 20$ V en malla 1, $I_g = 2$ A entre mallas 2 y 3. $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 8 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$.

Ejercicio resuelto: Supermalla P8 Paso 1: La fuente I_g entre mallas 2 y 3 crea una **supermalla** $\{2, 3\}$.

Restricción:

$$I_2 - I_3 = I_g = 2 \text{ A}$$

Paso 2: KVL malla 1:

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 - I_2) = E_g$$

$$5I_1 + 10(I_1 - I_2) = 20$$

$$15I_1 - 10I_2 = 20$$

KVL supermalla $\{2, 3\}$ (recorriendo el contorno exterior, saltando I_g):

$$R_2(I_2 - I_1) + R_3 \cdot I_2 + R_5 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_3 = 0$$

$$10(I_2 - I_1) + 4I_2 + 6I_3 + 8I_3 = 0$$

$$-10I_1 + 14I_2 + 14I_3 = 0$$

Paso 3: Sistema de 3 ecuaciones:

$$\begin{cases} 15I_1 - 10I_2 = 20 \\ -10I_1 + 14I_2 + 14I_3 = 0 \\ I_2 - I_3 = 2 \end{cases}$$

De la tercera: $I_3 = I_2 - 2$. Sustituyendo:

$$15I_1 - 10I_2 = 20$$

$$-10I_1 + 14I_2 + 14(I_2 - 2) = 0 \implies -10I_1 + 28I_2 = 28$$

De la primera: $I_1 = \frac{20+10I_2}{15}$. Sustituyendo:

$$-10 \cdot \frac{20+10I_2}{15} + 28I_2 = 28$$

$$-\frac{200+100I_2}{15} + 28I_2 = 28$$

$$-200 - 100I_2 + 420I_2 = 420$$

$$320I_2 = 620 \implies I_2 = 1.9375 \text{ A}$$

$$I_3 = 1.9375 - 2 = -0.0625 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{20 + 10(1.9375)}{15} = \frac{39.375}{15} = 2.625 \text{ A}$$

$$\boxed{I_1 = 2.625 \text{ A}, \quad I_2 = 1.938 \text{ A}, \quad I_3 = -0.063 \text{ A}}$$

1.8.8 7.8 Problema 10: Fuentes dependientes

Datos: Circuito con 2 nudos. $R_1 = 2 \Omega$ (de A a ref), $R_2 = 4 \Omega$ (de A a B), $R_3 = 8 \Omega$ (de B a ref). Fuente dependiente de corriente: $I_d = 3V_A$ (controlada por V_A), entra al nudo B . Fuente independiente: $I_g = 5 \text{ A}$ entra a nudo A .

Ejercicio resuelto: Fuentes dependientes P10 Paso 1: Ecuaciones de nudos normales, tratando I_d como fuente.

Nudo A:

$$\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} = I_g$$

$$\frac{V_A}{2} + \frac{V_A - V_B}{4} = 5$$

$$\frac{3}{4}V_A - \frac{1}{4}V_B = 5 \quad \dots (1)$$

Nudo B:

$$\frac{V_B - V_A}{R_2} + \frac{V_B}{R_3} = -I_d = -3V_A$$

$$\frac{V_B - V_A}{4} + \frac{V_B}{8} = -3V_A$$

$$-\frac{1}{4}V_A + \frac{3}{8}V_B + 3V_A = 0$$

$$\frac{11}{4}V_A + \frac{3}{8}V_B = 0 \quad \dots (2)$$

Paso 2: Observar que la matriz **no es simétrica** por la fuente dependiente:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 11/4 & 3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3: De (2): $V_B = -\frac{11/4}{3/8}V_A = -\frac{22}{3}V_A$.

Sustituyendo en (1):

$$\frac{3}{4}V_A - \frac{1}{4}\left(-\frac{22}{3}V_A\right) = 5$$

$$\frac{3}{4}V_A + \frac{22}{12}V_A = 5$$

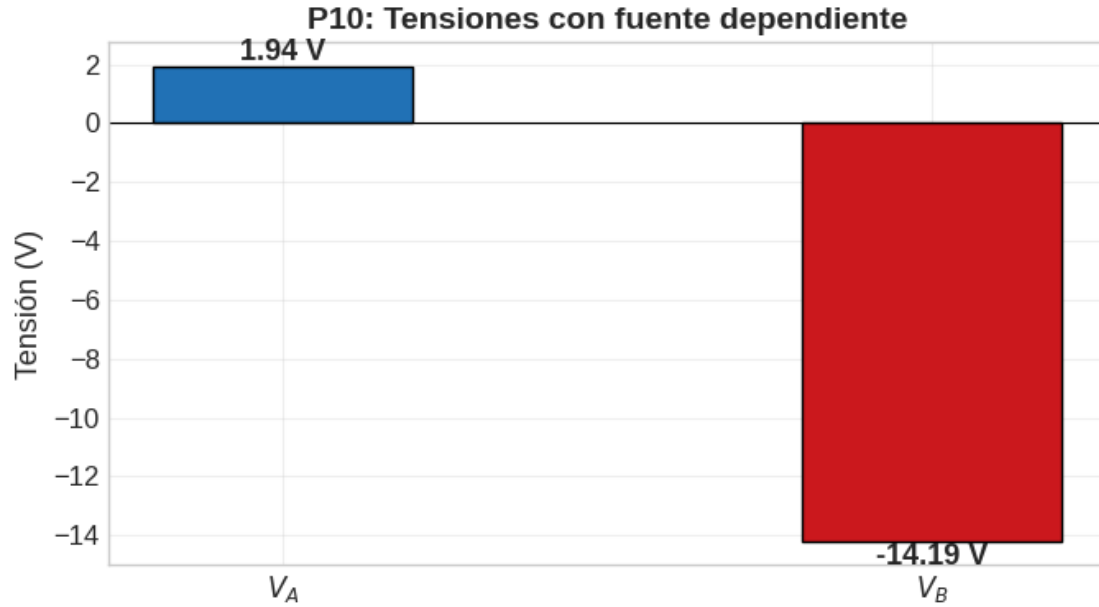
$$\frac{9 + 22}{12}V_A = 5 \implies \frac{31}{12}V_A = 5$$

$$V_A = \frac{60}{31} = 1.935 \text{ V}$$

$$V_B = -\frac{22}{3} \times 1.935 = -14.19 \text{ V}$$

$$V_A = 1.94 \text{ V}, \quad V_B = -14.19 \text{ V}$$

Nota: La asimetría de la matriz es característica de las fuentes dependientes. No se puede usar inspección directa.



1.9 8. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

#	Tipo	Método	Ecuación clave	Dificultad
1	Análisis nodal puro	Nudos	$\mathbf{GV} = \mathbf{I}_s$	Baja
2	Nodal con fuente de tensión a ref	Nudos	$V_k = E_g$ (directo)	Baja
3	Nodal con supernudo	Nudos	$V_k - V_j = E_g + \text{KCL supernudo}$	Media
4	Análisis de mallas puro	Mallas	$\mathbf{RI} = \mathbf{V}_s$	Baja
5	Mallas con fuente de corriente exterior	Mallas	$I_k = \pm I_g$ (directo)	Baja
6	Mallas con supermalla	Mallas	$I_k - I_j = I_g + \text{KVL supermalla}$	Media

#	Tipo	Método	Ecuación clave	Dificultad
7	Nodal con fuente dependiente	Nudos	$\mathbf{G}$ no simétrica	Alta
8	Mallas con fuente dependiente	Mallas	$\mathbf{R}$ no simétrica	Alta
9	Elegir nudos vs mallas	Ambos	Decidir método óptimo	Media
10	Circuito mixto (tensión + corriente)	Ambos	Combinación de técnicas	Alta

1.9.1 8.1 Tipo 1: Análisis nodal puro (solo resistencias y fuentes de corriente)

Identificación: Solo hay resistencias y fuentes de corriente independientes. No hay fuentes de tensión.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_s$$

Construcción por inspección: - G_{kk} = suma de conductancias conectadas al nudo k - $G_{kj} = -(\text{conductancia entre nudos } k \text{ y } j)$ - $I_{s,k}$ = suma de fuentes de corriente que entran a nudo k (positivas si entran)

Ventaja: La matriz es simétrica $\rightarrow$ se puede verificar rápidamente.

Error frecuente: Olvidar que las conductancias entre un nudo y la referencia también van en la diagonal.

Ejercicio resuelto: Tipo 1 Datos: 3 nudos (A , B , ref). $R_1 = 5 \Omega$ (A a ref), $R_2 = 10 \Omega$ (A a B), $R_3 = 20 \Omega$ (B a ref). $I_g = 2 \text{ A}$ entra a A .

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 0.3 \times 0.15 - 0.01 = 0.035$$

$$V_A = \frac{2 \times 0.15}{0.035} = 8.57 \text{ V}, \quad V_B = \frac{0.1 \times 2}{0.035} = 5.71 \text{ V}$$

$$V_A = 8.57 \text{ V}, \quad V_B = 5.71 \text{ V}$$

1.9.2 8.2 Tipo 2: Nodal con fuente de tensión conectada a referencia

Identificación: Hay una fuente de tensión entre un nudo y la referencia.

Truco: La tensión de ese nudo es directamente $V_k = E_g$. Se elimina una incógnita del sistema.

$$\boxed{V_k = E_g \quad (\text{se conoce directamente})}$$

Procedimiento: 1. Fijar $V_k = E_g$. 2. Escribir KCL en los demás nudos sustituyendo V_k . 3. Resolver sistema reducido de $(n - 2)$ ecuaciones.

Ejercicio resuelto: Tipo 2 Datos: $E_g = 24$ V fija $V_A = 24$ V. $R_1 = 6 \Omega$ (A a B), $R_2 = 12 \Omega$ (B a ref), $R_3 = 4 \Omega$ (B a ref).

KCL en B :

$$\frac{V_B - 24}{6} + \frac{V_B}{12} + \frac{V_B}{4} = 0$$

$$V_B \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = \frac{24}{6} = 4$$

$$V_B \cdot 0.5 = 4 \implies \boxed{V_B = 8 \text{ V}}$$

1.9.3 8.3 Tipo 3: Nodal con supernudo

Identificación: Hay una fuente de tensión entre dos nudos (ninguno es referencia).

$$\boxed{V_k - V_j = E_g \quad + \quad \text{KCL del supernudo (superficie que engloba } k \text{ y } j)}$$

Procedimiento: 1. Escribir la restricción $V_k - V_j = E_g$. 2. Dibujar una superficie cerrada que englobe ambos nudos. 3. Escribir KCL para esa superficie (sumando todas las corrientes que cruzan la frontera). 4. Escribir KCL normalmente en los demás nudos.

Error frecuente: Escribir KCL en los nudos k y j por separado (no se puede porque no conocemos la corriente por la fuente de tensión).

Ejercicio resuelto: Tipo 3 Datos: $E_g = 10$ V entre A y B ($V_A - V_B = 10$). $R_1 = 2 \Omega$ (A a ref), $R_2 = 5 \Omega$ (B a ref), $I_g = 4$ A entra al supernudo por A .

Restricción: $V_A - V_B = 10$

KCL supernudo: $\frac{V_A}{2} + \frac{V_B}{5} = 4$

Sustituimos $V_A = V_B + 10$:

$$\frac{V_B + 10}{2} + \frac{V_B}{5} = 4$$

$$V_B \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 4 - 5 = -1$$

$$V_B \cdot 0.7 = -1 \implies V_B = -1.43 \text{ V}$$

$$\boxed{V_A = 8.57 \text{ V}, \quad V_B = -1.43 \text{ V}}$$

1.9.4 8.4 Tipo 4: Análisis de mallas puro (solo resistencias y fuentes de tensión)

Identificación: Solo hay resistencias y fuentes de tensión independientes. No hay fuentes de corriente.

$$\boxed{\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}_s}$$

Construcción por inspección: - R_{kk} = suma de resistencias en la malla k - R_{kj} = -(resistencia compartida entre mallas k y j) - $V_{s,k}$ = suma algebraica de fuentes de tensión en malla k (positiva si sube en sentido de I_k)

Ejercicio resuelto: Tipo 4 Datos: 2 mallas. $E = 15 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$ (compartida), $R_3 = 9 \Omega$.

$$\begin{pmatrix} 3+6 & -6 \\ -6 & 6+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 9 \times 15 - 36 = 99$$

$$I_1 = \frac{15 \times 15}{99} = 2.273 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{6 \times 15}{99} = 0.909 \text{ A}$$

$$\boxed{I_1 = 2.273 \text{ A}, \quad I_2 = 0.909 \text{ A}}$$

1.9.5 8.5 Tipo 5: Mallas con fuente de corriente en rama exterior

Identificación: Hay una fuente de corriente en una rama que pertenece a una sola malla.

$$\boxed{I_k = \pm I_g \quad (\text{directamente conocida})}$$

Procedimiento: 1. La corriente de esa malla es conocida directamente. 2. Sustituir en las demás ecuaciones de malla. 3. Resolver el sistema reducido.

Ejercicio resuelto: Tipo 5 Datos: 2 mallas. $I_g = 3$ A en rama exterior de malla 1 $\rightarrow I_1 = 3$ A. $E = 12$ V, $R_1 = 4 \Omega$ (compartida), $R_2 = 6 \Omega$.

KVL malla 2: $R_1(I_2 - I_1) + R_2 \cdot I_2 = -E$

$$4(I_2 - 3) + 6I_2 = -12$$

$$10I_2 = -12 + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{I_2 = 0 \text{ A}}$$

1.9.6 8.6 Tipo 6: Mallas con supermalla

Identificación: Hay una fuente de corriente en una rama compartida por dos mallas.

$$\boxed{I_k - I_j = \pm I_g \quad + \quad \text{KVL de la supermalla (contorno exterior)}}$$

Procedimiento: 1. Escribir la restricción $I_k - I_j = \pm I_g$. 2. Combinar las dos mallas en una supermalla. 3. Escribir KVL recorriendo el contorno exterior (saltando la fuente de corriente).

Ejercicio resuelto: Tipo 6 Datos: 2 mallas. $I_g = 5$ A entre mallas 1 y 2 ($I_1 - I_2 = 5$). $E = 20$ V, $R_1 = 4 \Omega$ (malla 1 exterior), $R_2 = 6 \Omega$ (malla 2 exterior).

Restricción: $I_1 - I_2 = 5$

KVL supermalla (contorno exterior):

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = E$$

$$4I_1 + 6I_2 = 20$$

Sustituyendo $I_1 = I_2 + 5$:

$$4(I_2 + 5) + 6I_2 = 20 \Rightarrow 10I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 0 \text{ A}$$

$$\boxed{I_1 = 5 \text{ A}, \quad I_2 = 0 \text{ A}}$$

1.9.7 8.7 Tipo 7: Nodal con fuente dependiente

Identificación: Hay una fuente dependiente (controlada). La variable de control debe expresarse en función de las tensiones de nudo.

Procedimiento: 1. Escribir KCL como siempre, incluyendo la fuente dependiente como si fuera independiente. 2. Expresar la variable de control en función de V_k . 3. Sustituir y reagrupar.

Clave: La matriz **G** pierde la simetría.

Ejercicio resuelto: Tipo 7 Datos: 2 nudos. $R_1 = 4 \Omega$ (A a ref), $R_2 = 2 \Omega$ (A a B), $R_3 = 8 \Omega$ (B a ref). Fuente dependiente: $I_d = 2V_{AB}$ (donde $V_{AB} = V_A - V_B$), entra a B . $I_g = 6$ A entra a A .

Nudo A: $\frac{V_A}{4} + \frac{V_A - V_B}{2} = 6 \implies \frac{3}{4}V_A - \frac{1}{2}V_B = 6$

Nudo B: $\frac{V_B - V_A}{2} + \frac{V_B}{8} + 2(V_A - V_B) = 0$

$$-\frac{1}{2}V_A + \frac{1}{8}V_B + 2V_A - 2V_B = 0$$

$$\frac{3}{2}V_A - \frac{15}{8}V_B = 0 \implies V_B = \frac{4}{5}V_A$$

Sustituyendo en nudo A:

$$\frac{3}{4}V_A - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}V_A = 6$$

$$V_A \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \right) = 6 \implies V_A \cdot \frac{7}{20} = 6$$

$$\boxed{V_A = 17.14 \text{ V}, \quad V_B = 13.71 \text{ V}}$$

1.9.8 8.8 Tipo 8: Mallas con fuente dependiente

Identificación: Hay una fuente dependiente. La variable de control debe expresarse en función de las corrientes de malla.

Procedimiento: 1. Escribir KVL como siempre, incluyendo la fuente dependiente. 2. Expresar la variable de control en función de I_k . 3. Sustituir y reagrupar.

Ejercicio resuelto: Tipo 8 Datos: 2 mallas. $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$ (compartida), $R_3 = 9 \Omega$. Fuente dependiente $E_d = 4I_x$ donde $I_x = I_1$ (corriente por R_1). $E = 18$ V en malla 1.

KVL malla 1: $R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) = E + E_d = 18 + 4I_1$

$$3I_1 + 6(I_1 - I_2) = 18 + 4I_1 \implies 5I_1 - 6I_2 = 18$$

KVL malla 2: $R_2(I_2 - I_1) + R_3 I_2 = 0$

$$-6I_1 + 15I_2 = 0 \implies I_1 = 2.5I_2$$

$$5(2.5I_2) - 6I_2 = 18 \implies 6.5I_2 = 18 \implies I_2 = 2.769 \text{ A}$$

$$\boxed{I_1 = 6.923 \text{ A}, \quad I_2 = 2.769 \text{ A}}$$

1.9.9 8.9 Tipo 9: Elegir entre nudos y mallas

Regla práctica para elegir el método más eficiente:

Situación	Método recomendado	Razón
Más fuentes de corriente que de tensión	Nudos	Las fuentes de corriente van directamente al vector $\mathbf{I}_s$
Más fuentes de tensión que de corriente	Mallas	Las fuentes de tensión van directamente al vector $\mathbf{V}_s$
Pocos nudos, muchas mallas	Nudos	Menos ecuaciones ($n-1 < c-n+1$)
Pocas mallas, muchos nudos	Mallas	Menos ecuaciones
Fuente de tensión a referencia	Nudos	Elimina una incógnita directamente
Fuente de corriente en rama exterior	Mallas	Elimina una incógnita directamente
Circuito no plano	Nudos	No se pueden definir mallas en circuitos no planos

Truco para el examen: Cuenta el número de ecuaciones que tendrías con cada método. El que dé menos ecuaciones es el mejor.

Ejercicio resuelto: Tipo 9 Datos: Circuito con $n = 4$ nudos, $c = 6$ componentes, 2 fuentes de corriente y 1 fuente de tensión conectada a referencia.

- **Nudos:** $n - 1 = 3$ ecuaciones, pero la fuente de tensión a ref elimina 1 $\rightarrow$ **2 ecuaciones**.
- **Mallas:** $c - n + 1 = 3$ ecuaciones, y hay 2 fuentes de corriente que pueden complicar.

$\rightarrow$ **Método de nudos** es claramente mejor (2 ecuaciones vs 3, y las fuentes de corriente son naturales en nudos).

1.9.10 8.10 Tipo 10: Circuito mixto (fuentes de tensión y corriente simultáneas)

Identificación: El circuito tiene tanto fuentes de tensión como de corriente. Requiere supernudos/supermallas o elegir el método adecuado.

Estrategia: 1. Contar ecuaciones con cada método. 2. Ver si alguna fuente simplifica directamente una incógnita. 3. Aplicar el método elegido con las técnicas de supernudo/supermalla según corresponda.

Ejercicio resuelto: Tipo 10 Datos: 3 nudos. $E_g = 8 \text{ V}$ (de ref a A), $I_g = 3 \text{ A}$ (entra a B), $R_1 = 2 \Omega$ (A a B), $R_2 = 4 \Omega$ (B a ref).

Método de nudos (mejor opción porque E_g fija V_A directamente):

$V_A = 8 \text{ V}$ (directamente de E_g).

KCL en B :

$$\frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} = -I_g$$

$$\frac{V_B - 8}{2} + \frac{V_B}{4} = -3$$

$$V_B \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -3 + 4 = 1$$

$$V_A = 8 \text{ V}, \quad V_B = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ V}$$

1.10 9. Resumen y tabla de fórmulas clave

Concepto	Fórmula / Regla
Incógnitas	$2c$ (tensión y corriente por cada componente)
Ecuaciones	c (componente) + $(n - 1)$ (KCL) + $(c - n + 1)$ (KVL) = $2c$
Ecuaciones de nudos	$\mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_s$
G_{kk}	Suma de conductancias conectadas a nudo k
G_{kj}	-(conductancia entre nudos k y j)
Ecuaciones de mallas	$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}_s$
R_{kk}	Suma de resistencias en malla k
R_{kj}	-(resistencia compartida entre mallas k y j)
Supernudo	$V_k - V_j = E_g$ + KCL del supernudo
Supermalla	$I_k - I_j = I_g$ + KVL de la supermalla
Fuentes dependientes	Expresar variable de control en función de incógnitas; matrices no simétricas
Elegir método	Nudos si hay más fuentes de corriente; mallas si hay más fuentes de tensión

1.10.1 Errores frecuentes en examen

1. **Olvidar el signo** de G_{kj} (siempre negativo si no hay fuentes dependientes).
2. **No incluir** la conductancia entre nudo y referencia en G_{kk} .
3. **Confundir sentido** de la fuente de corriente al montar $\mathbf{I}_s$.
4. **Escribir KCL en nudos del supernudo** por separado (no se puede).
5. **No expresar** la variable de control de la fuente dependiente en función de las incógnitas.
6. **Asumir simetría** de la matriz cuando hay fuentes dependientes.