

07_corriente_alterna

April 3, 2026

1 Tema 7 - Circuitos de Corriente Alterna

Teoría de Circuitos - ETSI, Universidad de Sevilla

1.1 Objetivos de aprendizaje

- Comprender el régimen permanente sinusoidal y la representación fasorial
- Calcular impedancias y admitancias de R, L y C en el dominio de la frecuencia
- Aplicar la ley de Ohm fasorial y las leyes de Kirchhoff con fasores
- Resolver circuitos de CA mediante análisis nodal y de mallas con números complejos
- Calcular valores eficaces (RMS) de señales sinusoidales y periódicas
- Analizar la respuesta transitoria en circuitos de corriente alterna

Configuración lista.

1.2 1. Régimen permanente sinusoidal

1.2.1 1.1 Concepto fundamental

Cuando aplicamos una fuente sinusoidal a un circuito lineal, la respuesta tiene dos componentes:

1. **Respuesta natural (transitorio):** depende de las condiciones iniciales y decae exponencialmente
2. **Respuesta forzada (permanente):** es sinusoidal, con la **misma frecuencia** que la fuente

Tras un tiempo suficiente, el transitorio se extingue y solo queda la **respuesta permanente sinusoidal**:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

donde: - V = valor eficaz (RMS) de la tensión - $\omega = 2\pi f$ = frecuencia angular (rad/s) - φ = fase inicial (rad) - $\sqrt{2} \cdot V$ = valor de pico (amplitud máxima)

Idea clave: en régimen permanente, todas las tensiones y corrientes del circuito son sinusoidales de la misma frecuencia ω . Solo difieren en **amplitud** y **fase**.

1.3 2. Fasores (*phasors*)

1.3.1 2.1 Definición

Un **fasor** es un número complejo que representa una señal sinusoidal en régimen permanente:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{V} = V \angle \varphi = V \cdot e^{j\varphi}$$

Forma	Expresión	Uso
Polar	$V \angle \varphi$	Multiplicación, división
Exponencial	$V \cdot e^{j\varphi}$	Operaciones generales
Rectangular	$V \cos \varphi + jV \sin \varphi$	Suma, resta

1.3.2 2.2 Conversión tiempo $\rightarrow$ fasor

1. Identificar amplitud de pico $V_p = \sqrt{2} \cdot V$ y fase φ
2. El fasor es $\mathbf{V} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \varphi = V \angle \varphi$

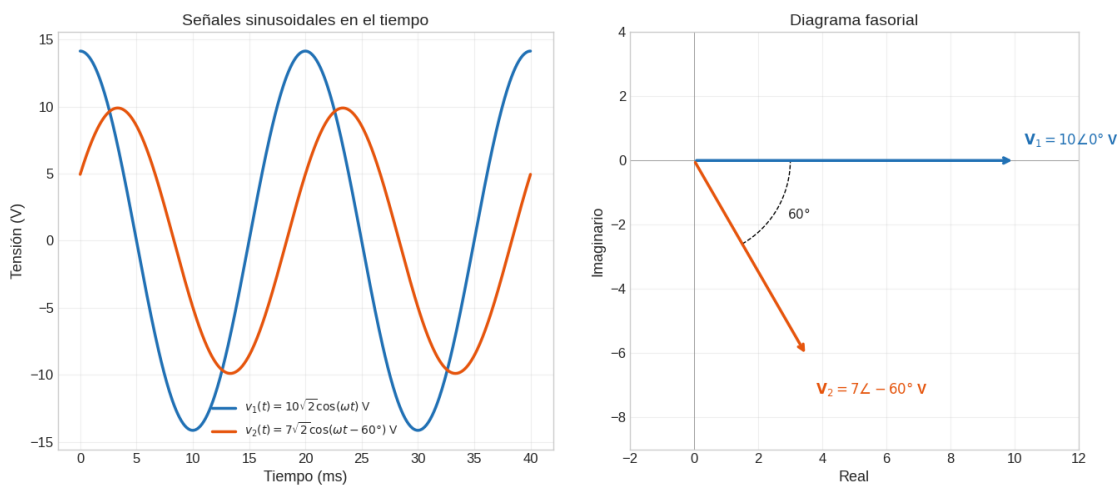
1.3.3 2.3 Conversión fasor $\rightarrow$ tiempo

1. Del fasor $\mathbf{V} = V \angle \varphi$ extraer V y φ
2. La señal es $v(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

1.3.4 2.4 Derivada e integral en dominio fasorial

$$\frac{d}{dt} \longleftrightarrow j\omega \quad \int dt \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$

Derivar una senoide equivale a multiplicar su fasor por $j\omega$. Integrar equivale a dividir por $j\omega$.



1.4 3. Impedancia y admitancia

1.4.1 3.1 Impedancia

La **impedancia** $\mathbf{Z}$ es la relación entre el fasor de tensión y el fasor de corriente:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R + jX \quad [\Omega]$$

donde R = **resistencia** (parte real) y X = **reactancia** (parte imaginaria).

1.4.2 3.2 Admitancia

La **admitancia** $\mathbf{Y}$ es la inversa de la impedancia:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = G + jB \quad [\text{S}]$$

donde G = **conductancia** y B = **susceptancia**.

1.4.3 3.3 Impedancias de los elementos pasivos

Elemento	Impedancia $\mathbf{Z}$	Admitancia $\mathbf{Y}$	Tensión-corriente
Resistor	$Z_R = R$	$Y_R = G = \frac{1}{R}$	V e I en fase
Inductor	$Z_L = j\omega L$	$Y_L = \frac{1}{j\omega L}$	V adelanta 90° a I
Condensador	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$	$Y_C = j\omega C$	I adelanta 90° a V

Regla mnemotécnica (ELI the ICE man): En un inductor (L), la tensión (E) adelanta a la corriente (I). En un condensador (C), la corriente (I) adelanta a la tensión (E).

1.5 4. Ley de Ohm fasorial y leyes de Kirchhoff

1.5.1 4.1 Ley de Ohm en dominio fasorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

Esta ecuación relaciona fasores de tensión y corriente mediante la impedancia. Es formalmente idéntica a la ley de Ohm en CC, pero con **números complejos**.

1.5.2 4.2 Leyes de Kirchhoff con fasores

Las leyes de Kirchhoff se aplican directamente a fasores:

KVL (tensiones): La suma de fasores de tensión en un lazo es cero:

$$\sum_k \mathbf{V}_k = 0$$

KCL (corrientes): La suma de fasores de corriente en un nudo es cero:

$$\sum_k \mathbf{I}_k = 0$$

1.5.3 4.3 Divisor de tensión y corriente

Con impedancias, los divisores funcionan igual que con resistencias:

$$\boxed{\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \cdot \mathbf{V}_T \quad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Y}_1}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} \cdot \mathbf{I}_T}$$

Error frecuente: olvidar que las impedancias son complejas. La división de complejos cambia tanto la amplitud como la fase.

1.6 5. Análisis de circuitos en régimen permanente

1.6.1 5.1 Método general

El procedimiento para resolver un circuito de CA es:

1. **Convertir** todas las fuentes sinusoidales a fasores
2. **Sustituir** R, L, C por sus impedancias Z_R , Z_L , Z_C
3. **Resolver** el circuito con las técnicas habituales (nudos, mallas, Thévenin...)
4. **Convertir** los fasores resultado de vuelta al dominio del tiempo

1.6.2 5.2 Impedancias en serie y paralelo

Serie: $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots$

Paralelo: $\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dots \iff \mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots$

Dos impedancias en paralelo:

$$\boxed{\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}}$$

1.6.3 5.3 Análisis nodal y de mallas

Se aplican las mismas técnicas que en CC, pero con **coeficientes complejos**:

- **Nudos:** $\mathbf{Y}_{nn} \cdot \mathbf{V}_n = \mathbf{I}_n$ (sistema de ecuaciones complejas)
- **Mallas:** $\mathbf{Z}_{mm} \cdot \mathbf{I}_m = \mathbf{V}_m$ (sistema de ecuaciones complejas)

Truco para el examen: en paralelo, es más cómodo trabajar con admitancias. En serie, con impedancias.

1.7 6. Valores eficaces (RMS)

1.7.1 6.1 Definición general

El valor eficaz (RMS = *Root Mean Square*) de una señal periódica $v(t)$ con período T es:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

1.7.2 6.2 Caso sinusoidal puro

Para $v(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi)$:

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot V_p$$

Esta es la razón por la que la tensión de la red en España es 230 V (eficaz), mientras que el valor de pico es $230\sqrt{2} \approx 325$ V.

1.7.3 6.3 Señal con armónicos

Si $v(t) = V_0 + V_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + V_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots$

$$V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{V_2^2}{2} + \dots}$$

Nota: el valor eficaz de la suma NO es la suma de valores eficaces (salvo que las frecuencias sean diferentes).

1.8 7. Respuesta transitoria en circuitos de CA

1.8.1 7.1 Respuesta completa

La respuesta total de un circuito de CA con condiciones iniciales es:

$$x(t) = x_{natural}(t) + x_{forzada}(t)$$

- $x_{natural}(t)$: exponencial decreciente (depende de las condiciones iniciales y de la constante de tiempo τ)
- $x_{forzada}(t)$: sinusoidal (se obtiene del análisis fasorial)

1.8.2 7.2 Ejemplo: circuito RL serie

Para un circuito RL serie con fuente $v_s(t) = V_p \cos(\omega t)$ conectada en $t = 0$:

$$i(t) = \underbrace{A \cdot e^{-t/\tau}}_{\text{natural}} + \underbrace{I_p \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{forzada}}$$

donde $\tau = L/R$, $I_p = V_p/|Z|$, $\varphi = -\arctan(\omega L/R)$.

La constante A se determina con la condición inicial $i(0)$.

1.9 8. Ejemplos resueltos

1.9.1 Metodología de resolución

1. **Identificar** la frecuencia ω y convertir fuentes a fasores
2. **Calcular** impedancias: $Z_R = R$, $Z_L = j\omega L$, $Z_C = 1/(j\omega C)$
3. **Dibujar** el circuito en dominio fasorial (impedancias en lugar de R, L, C)
4. **Resolver** con técnicas de CC: divisor, nudos, mallas, Thévenin...
5. **Verificar** unidades y coherencia (KVL/KCL deben cumplirse con fasores)
6. **Convertir** a dominio temporal si se pide $v(t)$ o $i(t)$

Ejercicio resuelto 1: Circuito RLC serie Datos: $R = 100 \, \Omega$, $L = 0.2 \, \text{H}$, $C = 50 \, \mu\text{F}$, $v_s(t) = 100\sqrt{2} \cos(100t) \, \text{V}$

Paso 1: Identificar parámetros

$\omega = 100 \, \text{rad/s}$, $V_s = 100 \angle 0^\circ \, \text{V}$ (valor eficaz = 100 V)

Paso 2: Calcular impedancias

$$Z_R = 100 \, \Omega \quad Z_L = j\omega L = j \cdot 100 \cdot 0.2 = j20 \, \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 100 \cdot 50 \times 10^{-6}} = \frac{1}{j0.005} = -j200 \, \Omega$$

Paso 3: Impedancia total en serie

$$Z_{total} = Z_R + Z_L + Z_C = 100 + j20 - j200 = 100 - j180 \, \Omega$$

$$|Z_{total}| = \sqrt{100^2 + 180^2} = \sqrt{42400} = 205.91 \, \Omega$$

$$\angle Z_{total} = \arctan\left(\frac{-180}{100}\right) = -60.95^\circ$$

Paso 4: Corriente por el circuito

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{total}} = \frac{100\angle 0^\circ}{205.91\angle -60.95^\circ} = 0.486\angle 60.95^\circ \text{ A}$$

Paso 5: Tensiones en cada elemento

$$\mathbf{V}_R = Z_R \cdot \mathbf{I} = 100 \times 0.486\angle 60.95^\circ = 48.56\angle 60.95^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_L = Z_L \cdot \mathbf{I} = 20\angle 90^\circ \times 0.486\angle 60.95^\circ = 9.71\angle 150.95^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_C = Z_C \cdot \mathbf{I} = 200\angle -90^\circ \times 0.486\angle 60.95^\circ = 97.12\angle -29.05^\circ \text{ V}$$

Verificación (KVL): $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = \mathbf{V}_s = 100\angle 0^\circ \text{ V} \checkmark$

Resultado en el tiempo:

$$i(t) = 0.486\sqrt{2} \cos(100t + 60.95^\circ) = 0.687 \cos(100t + 60.95^\circ) \text{ A}$$

Ejercicio resuelto 2: Circuito RLC paralelo Datos: $R = 200 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 10 \mu\text{F}$, fuente de corriente $i_s(t) = 2\sqrt{2} \cos(200t) \text{ A}$

Paso 1: Identificar parámetros

$$\omega = 200 \text{ rad/s}, \mathbf{I}_s = 2\angle 0^\circ \text{ A}$$

Paso 2: Calcular admitancias (más cómodo en paralelo)

$$Y_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{200} = 5 \times 10^{-3} \text{ S}$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j \cdot 200 \cdot 0.5} = \frac{1}{j100} = -j0.01 \text{ S}$$

$$Y_C = j\omega C = j \cdot 200 \cdot 10 \times 10^{-6} = j0.002 \text{ S}$$

Paso 3: Admitancia total

$$Y_{total} = Y_R + Y_L + Y_C = 0.005 - j0.01 + j0.002 = 0.005 - j0.008 \text{ S}$$

$$|Y_{total}| = \sqrt{0.005^2 + 0.008^2} = 9.434 \times 10^{-3} \text{ S}$$

Paso 4: Tensión en el nudo

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}_s}{Y_{total}} = \frac{2\angle 0^\circ}{9.434 \times 10^{-3} \angle -58.0^\circ} = 212.0 \angle 58.0^\circ \text{ V}$$

Paso 5: Corrientes en cada rama

$$\mathbf{I}_R = Y_R \cdot \mathbf{V} = 0.005 \times 212.0 \angle 58.0^\circ = 1.06 \angle 58.0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_L = Y_L \cdot \mathbf{V} = 0.01 \angle -90^\circ \times 212.0 \angle 58.0^\circ = 2.12 \angle -32.0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = Y_C \cdot \mathbf{V} = 0.002 \angle 90^\circ \times 212.0 \angle 58.0^\circ = 0.424 \angle 148.0^\circ \text{ A}$$

Verificación (KCL): $\mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_s = 2\angle 0^\circ \text{ A} \checkmark$

Ejercicio resuelto 3: Divisor de tensión con impedancias Datos: $R = 50 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $v_s(t) = 20\sqrt{2} \cos(200t + 30^\circ) \text{ V}$. Hallar $v_C(t)$.

Paso 1: Fasores e impedancias

$\mathbf{V}_s = 20 \angle 30^\circ \text{ V}$, $\omega = 200 \text{ rad/s}$

$$Z_R = 50 \Omega \quad Z_C = \frac{1}{j \cdot 200 \cdot 100 \times 10^{-6}} = \frac{1}{j0.02} = -j50 \Omega$$

Paso 2: Divisor de tensión

$$\mathbf{V}_C = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \cdot \mathbf{V}_s = \frac{-j50}{50 - j50} \cdot 20 \angle 30^\circ$$

Calculamos el cociente:

$$\frac{-j50}{50 - j50} = \frac{50 \angle -90^\circ}{50\sqrt{2} \angle -45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle (-90^\circ + 45^\circ) = 0.707 \angle -45^\circ$$

$$\mathbf{V}_C = 0.707 \times 20 \angle (30^\circ - 45^\circ) = 14.14 \angle -15^\circ \text{ V}$$

Resultado en el tiempo:

$$v_C(t) = 14.14\sqrt{2} \cos(200t - 15^\circ) = 20 \cos(200t - 15^\circ) \text{ V}$$

Ejercicio resuelto 4: Impedancia equivalente Datos: Red con $R_1 = 100 \Omega$ en serie con el paralelo de ($L = 0.1 \text{ H}$ y $C = 100 \mu\text{F}$). $\omega = 200 \text{ rad/s}$.

Paso 1: Impedancias individuales

$$Z_{R_1} = 100 \Omega \quad Z_L = j \cdot 200 \cdot 0.1 = j20 \Omega \quad Z_C = \frac{1}{j \cdot 200 \cdot 100 \times 10^{-6}} = -j50 \Omega$$

Paso 2: Paralelo L-C

$$Z_{LC} = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{j20 \cdot (-j50)}{j20 - j50} = \frac{-j^2 \cdot 1000}{-j30} = \frac{1000}{-j30} = \frac{1000}{30} \angle 90^\circ = j33.33 \Omega$$

Paso 3: Impedancia total (serie)

$$Z_{eq} = Z_{R_1} + Z_{LC} = 100 + j33.33 \Omega = 105.4 \angle 18.4^\circ \Omega$$

Ejercicio resuelto 5: Flujo completo tiempo $\rightarrow$ fasor $\rightarrow$ resolución $\rightarrow$ tiempo Datos: Circuito serie con $R = 30 \Omega$ y $L = 40 \text{ mH}$. Fuente: $v_s(t) = 10 \cos(1000t + 45^\circ) \text{ V}$. Hallar $i(t)$ y $v_L(t)$.

Paso 1: Convertir a fasores

$$\mathbf{V}_s = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 7.07 \angle 45^\circ \text{ V}$$

Paso 2: Calcular impedancias

$$Z_R = 30 \Omega \quad Z_L = j \cdot 1000 \cdot 0.04 = j40 \Omega$$

$$Z_{total} = 30 + j40 = 50 \angle 53.13^\circ \Omega$$

Paso 3: Resolver en dominio fasorial

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{total}} = \frac{7.07 \angle 45^\circ}{50 \angle 53.13^\circ} = 0.1414 \angle -8.13^\circ \text{ A}$$

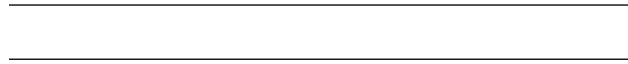
$$\mathbf{V}_L = Z_L \cdot \mathbf{I} = 40 \angle 90^\circ \times 0.1414 \angle -8.13^\circ = 5.66 \angle 81.87^\circ \text{ V}$$

Paso 4: Volver al dominio temporal

$$i(t) = 0.1414 \sqrt{2} \cos(1000t - 8.13^\circ) = 0.2 \cos(1000t - 8.13^\circ) \text{ A}$$

$$v_L(t) = 5.66\sqrt{2}\cos(1000t + 81.87^\circ) = 8.0\cos(1000t + 81.87^\circ) \text{ V}$$

Verificación: $|V_s|^2 = |V_R|^2 + |V_L|^2 \rightarrow 7.07^2 = (30 \times 0.1414)^2 + 5.66^2 = 4.24^2 + 5.66^2 = 18 + 32 = 50$
✓



1.10 9. Catálogo completo de ejercicios: todos los patrones

#	Tipo	Componentes	Ecuación clave	Dificultad
1	Conversión fasor	Señal $\rightarrow$ fasor	$V \angle \varphi$	
2	Cálculo de impedancia	R, L, C	$Z = R + jX$	
3	Impedancias en serie	$Z_1 + Z_2$	$Z_{eq} = \sum Z_k$	
4	Impedancias en paralelo	$Z_1 \parallel Z_2$	$Z_{eq} = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)$	
5	Divisor de tensión	Serie de Z	$V_k = Z_k / Z_T \cdot V_s$	
6	Divisor de corriente	Paralelo de Y	$I_k = Y_k / Y_T \cdot I_s$	
7	RLC serie completo	R, L, C serie	$I = V_s / Z_T$	
8	RLC paralelo completo	R, L, C paralelo	$V = I_s / Y_T$	
9	Análisis nodal fasorial	Varios nudos	$Y_{nn} V_n = I_n$	
10	Análisis de mallas fasorial	Varias mallas	$Z_{mm} I_m = V_m$	
11	Frecuencia de resonancia	L, C	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	
12	Transitorio en CA	RL o RC	$x(t) = x_n + x_f$	

1.10.1 9.1 Tipo 1: Conversión fasor $\leftrightarrow$ tiempo

Convertir señales sinusoidales a fasores y viceversa.

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{V} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \varphi$$

Errores frecuentes: - Confundir valor de pico con valor eficaz - Olvidar convertir grados a radianes (o viceversa) - Si la señal está en sin en vez de cos: restar 90° a la fase

Ejercicio: Conversión tiempo $\rightarrow$ fasor $\rightarrow$ tiempo Datos: $v_1(t) = 50 \cos(314t + 30^\circ)$ V y $v_2(t) = 30 \sin(314t + 60^\circ)$ V. Hallar $v_T(t) = v_1(t) + v_2(t)$.

Paso 1: Convertir a fasores

$$\mathbf{V}_1 = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ = 35.36 \angle 30^\circ \text{ V}$$

Para v_2 : $\sin(\theta) = \cos(\theta - 90^\circ)$, así que $v_2(t) = 30 \cos(314t + 60^\circ - 90^\circ) = 30 \cos(314t - 30^\circ)$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{30}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ = 21.21 \angle -30^\circ \text{ V}$$

Paso 2: Sumar fasores (forma rectangular)

$$\mathbf{V}_1 = 35.36(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 30.62 + j17.68$$

$$\mathbf{V}_2 = 21.21(\cos(-30^\circ) + j \sin(-30^\circ)) = 18.37 - j10.61$$

$$\mathbf{V}_T = 48.99 + j7.07 = 49.50 \angle 8.21^\circ \text{ V}$$

Paso 3: Volver al tiempo

$$v_T(t) = 49.50\sqrt{2} \cos(314t + 8.21^\circ) = 70.0 \cos(314t + 8.21^\circ) \text{ V}$$

1.10.2 9.2 Tipo 2: Cálculo de impedancia de un elemento

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Cómo afecta la frecuencia: - Si ω **aumenta** $\rightarrow Z_L$ aumenta (inductor se opone más) $\rightarrow Z_C$ disminuye (condensador se opone menos) - Si ω **disminuye** $\rightarrow Z_L$ disminuye $\rightarrow Z_C$ aumenta - En $\omega = 0$ (CC): $Z_L = 0$ (cortocircuito), $Z_C = \infty$ (circuito abierto) - En $\omega \rightarrow \infty$: $Z_L \rightarrow \infty$ (circuito abierto), $Z_C \rightarrow 0$ (cortocircuito)

Ejercicio: Impedancia a diferentes frecuencias Datos: $L = 10 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$. Calcular Z_L y Z_C para $f = 50 \text{ Hz}$ y $f = 1 \text{ kHz}$.

Para $f = 50 \text{ Hz}$ ($\omega = 314.16 \text{ rad/s}$):

$$Z_L = j \cdot 314.16 \cdot 0.01 = j31.4 \Omega \quad Z_C = \frac{1}{j \cdot 314.16 \cdot 10^{-4}} = -j31.83 \Omega$$

Para $f = 1 \text{ kHz}$ ($\omega = 6283.2 \text{ rad/s}$):

$$Z_L = j \cdot 6283.2 \cdot 0.01 = j62.83 \Omega \quad Z_C = \frac{1}{j \cdot 6283.2 \cdot 10^{-4}} = -j1.59 \Omega$$

1.10.3 9.3 Tipo 3: Impedancias en serie

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Propiedades: - La misma corriente circula por todos los elementos - La tensión total es la suma fasorial de tensiones parciales - Se suman partes reales e imaginarias por separado

Ejercicio: Serie R-L Datos: $R = 47 \Omega$, $L = 0.15 \text{ H}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$

$$Z_{eq} = R + j\omega L = 47 + j \cdot 100 \cdot 0.15 = 47 + j15 \Omega$$

$$|Z_{eq}| = \sqrt{47^2 + 15^2} = \sqrt{2434} = 49.34 \Omega$$

$$\angle Z_{eq} = \arctan\left(\frac{15}{47}\right) = 17.7^\circ$$

$$Z_{eq} = 49.34 \angle 17.7^\circ \Omega$$

1.10.4 9.4 Tipo 4: Impedancias en paralelo

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{dos impedancias})$$

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (\text{general})$$

Propiedades: - La misma tensión aparece en todos los elementos - La corriente total es la suma fasorial de corrientes parciales - Es más cómodo trabajar con **admitancias** en paralelo

Ejercicio: Paralelo R-C Datos: $R = 100 \, \Omega$, $C = 50 \, \mu\text{F}$, $\omega = 400 \, \text{rad/s}$

$$Y_R = \frac{1}{100} = 0.01 \, \text{S} \quad Y_C = j \cdot 400 \cdot 50 \times 10^{-6} = j0.02 \, \text{S}$$

$$Y_{eq} = 0.01 + j0.02 \, \text{S} \quad |Y_{eq}| = \sqrt{0.01^2 + 0.02^2} = 0.02236 \, \text{S}$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{0.02236 \angle 63.43^\circ} = 44.72 \angle -63.43^\circ \, \Omega$$

$$Z_{eq} = 20 - j40 \, \Omega = 44.72 \angle -63.43^\circ \, \Omega$$

1.10.5 9.5 Tipo 5: Divisor de tensión con impedancias

$$\mathbf{V}_k = \frac{\mathbf{Z}_k}{\mathbf{Z}_{total}} \cdot \mathbf{V}_s$$

Cómo afecta cada impedancia: - Si $|Z_k|$ es grande comparado con $|Z_{total}|$, esa impedancia “se lleva” más tensión - A frecuencias altas: Z_L domina (más tensión en L), Z_C se hace pequeña - A frecuencias bajas: Z_C domina, Z_L se hace pequeña

Ejercicio: Divisor R-L Datos: $R = 100 \, \Omega$, $L = 0.5 \, \text{H}$, $\omega = 100 \, \text{rad/s}$, $\mathbf{V}_s = 50 \angle 0^\circ \, \text{V}$

$$Z_L = j50 \, \Omega \quad Z_T = 100 + j50 = 111.8 \angle 26.57^\circ \, \Omega$$

$$\mathbf{V}_L = \frac{j50}{100 + j50} \cdot 50 \angle 0^\circ = \frac{50 \angle 90^\circ}{111.8 \angle 26.57^\circ} \cdot 50 \angle 0^\circ = 22.36 \angle 63.43^\circ \, \text{V}$$

$$\mathbf{V}_L = 22.36 \angle 63.43^\circ \, \text{V}$$

1.10.6 9.6 Tipo 6: Divisor de corriente con admitancias

$$\mathbf{I}_k = \frac{\mathbf{Y}_k}{\mathbf{Y}_{total}} \cdot \mathbf{I}_s$$

Equivalente con dos impedancias en paralelo:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \cdot \mathbf{I}_s$$

Ejercicio: Divisor de corriente R-L Datos: $R = 50 \Omega$ y $L = 0.1 \text{ H}$ en paralelo, $\omega = 500 \text{ rad/s}$, $\mathbf{I}_s = 4\angle 0^\circ \text{ A}$

$$Z_R = 50 \Omega \quad Z_L = j50 \Omega$$

$$\mathbf{I}_R = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} \cdot \mathbf{I}_s = \frac{j50}{50 + j50} \cdot 4\angle 0^\circ = \frac{50\angle 90^\circ}{70.71\angle 45^\circ} \cdot 4 = 2.83\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L} \cdot \mathbf{I}_s = \frac{50}{50 + j50} \cdot 4\angle 0^\circ = \frac{50\angle 0^\circ}{70.71\angle 45^\circ} \cdot 4 = 2.83\angle -45^\circ \text{ A}$$

Verificación: $\mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L = 2.83\angle 45^\circ + 2.83\angle -45^\circ = 2(2) + j0 = 4\angle 0^\circ \text{ A} \checkmark$

1.10.7 9.7 Tipo 7: Análisis completo RLC serie

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Cómo afectan los componentes: - Si $\omega L > 1/(\omega C) \rightarrow$ circuito **inductivo** (corriente atrasada respecto a tensión) - Si $\omega L < 1/(\omega C) \rightarrow$ circuito **capacitivo** (corriente adelantada) - Si $\omega L = 1/(\omega C) \rightarrow$ **resonancia** ($Z = R$ mínima, corriente máxima)

Ejercicio: RLC serie con resonancia cercana Datos: $R = 10 \Omega$, $L = 50 \text{ mH}$, $C = 200 \mu\text{F}$, $v_s(t) = 100\sqrt{2}\cos(100t) \text{ V}$

$$Z_L = j \cdot 100 \cdot 0.05 = j5 \Omega \quad Z_C = \frac{1}{j \cdot 100 \cdot 200 \times 10^{-6}} = -j50 \Omega$$

$$Z_T = 10 + j5 - j50 = 10 - j45 = 46.10\angle -77.47^\circ \Omega$$

$$\mathbf{I} = \frac{100\angle 0^\circ}{46.10\angle -77.47^\circ} = 2.169\angle 77.47^\circ \text{ A}$$

El circuito es **capacitivo** ($X < 0$), la corriente adelanta a la tensión.

1.10.8 9.8 Tipo 8: Análisis completo RLC paralelo

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}_s}{Y_R + Y_L + Y_C} = \frac{\mathbf{I}_s}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

En resonancia paralela: $Y = G$ (mínima), por lo que $|V|$ es **máxima** y $Z_{eq} = R$.

Ejercicio: RLC paralelo Datos: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 100 \text{ mH}$, $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$, $\mathbf{I}_s = 0.1\angle 0^\circ \text{ A}$, $\omega = 500 \text{ rad/s}$

$$Y_R = 10^{-3} \text{ S} \quad Y_L = \frac{1}{j50} = -j0.02 \text{ S} \quad Y_C = j \cdot 500 \cdot 10^{-5} = j0.005 \text{ S}$$

$$Y_T = 10^{-3} - j0.02 + j0.005 = 10^{-3} - j0.015 = 0.01503\angle -86.19^\circ \text{ S}$$

$$\mathbf{V} = \frac{0.1\angle 0^\circ}{0.01503\angle -86.19^\circ} = 6.65\angle 86.19^\circ \text{ V}$$

1.10.9 9.9 Tipo 9: Análisis nodal con fasores

Se plantea exactamente igual que en CC, pero con **admitancias** en lugar de conductancias:

$$\mathbf{Y}_{11} \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{12} \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_{s1}$$

$$\mathbf{Y}_{21} \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{22} \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_{s2}$$

donde $\mathbf{Y}_{nn}$ = suma de admitancias conectadas al nudo n y $\mathbf{Y}_{nm}$ = -(admitancia entre nudos n y m).

Ejercicio: Dos nudos con fuente de tensión Datos: Nudo 1 conectado a: fuente $\mathbf{I}_s = 2\angle 0^\circ \text{ A}$, $R = 100 \text{ }\Omega$ a tierra, $Z_L = j50 \text{ }\Omega$ al nudo 2. Nudo 2 conectado a: $Z_C = -j100 \text{ }\Omega$ a tierra.

$$Y_{11} = \frac{1}{100} + \frac{1}{j50} = 0.01 - j0.02 \text{ S}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{j50} = j0.02 \text{ S}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{j50} + \frac{1}{-j100} = -j0.02 + j0.01 = -j0.01 \text{ S}$$

Sistema:

$$\begin{pmatrix} 0.01 - j0.02 & j0.02 \\ j0.02 & -j0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo (Cramer o sustitución): $\mathbf{V}_1 = 40 + j120 = 126.5\angle 71.6^\circ \text{ V}$, $\mathbf{V}_2 = -160 + j120 = 200\angle 143.1^\circ \text{ V}$

1.10.10 9.10 Tipo 10: Análisis de mallas con fasores

Se plantea igual que en CC, con **impedancias**:

$$\mathbf{Z}_{11} \cdot \mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{12} \cdot \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_{s1}$$

$$\mathbf{Z}_{21} \cdot \mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22} \cdot \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_{s2}$$

donde $\mathbf{Z}_{mm}$ = suma de impedancias en la malla m y $\mathbf{Z}_{mn}$ = $-(\text{impedancia compartida})$.

Ejercicio: Dos mallas RL Datos: Malla 1: $\mathbf{V}_s = 100\angle 0^\circ \text{ V}$, $R_1 = 50 \Omega$, $Z_L = j30 \Omega$ compartida. Malla 2: $R_2 = 40 \Omega$, misma Z_L .

$$Z_{11} = 50 + j30 \quad Z_{22} = 40 + j30 \quad Z_{12} = Z_{21} = -j30$$

$$\begin{pmatrix} 50 + j30 & -j30 \\ -j30 & 40 + j30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (50 + j30)(40 + j30) - (-j30)^2 = 2000 + j1500 + j1200 - 900 - (-900)$$

$$\Delta = 2000 + j2700 = 3360.1\angle 53.47^\circ$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{100(40 + j30)}{3360.1\angle 53.47^\circ} = \frac{5000\angle 36.87^\circ}{3360.1\angle 53.47^\circ} = 1.488\angle -16.60^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{100 \cdot j30}{3360.1\angle 53.47^\circ} = \frac{3000\angle 90^\circ}{3360.1\angle 53.47^\circ} = 0.893\angle 36.53^\circ \text{ A}$$

1.10.11 9.11 Tipo 11: Frecuencia de resonancia

En resonancia, la parte imaginaria de la impedancia (serie) o admitancia (paralelo) se anula:

Resonancia serie: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

En resonancia serie: - $Z = R$ (mínima) $\rightarrow$ corriente **máxima** - V_L y V_C se cancelan; pueden ser mucho mayores que V_s (factor de calidad Q) - **Factor de calidad:** $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$

En resonancia paralela: - $Y = G$ (mínima) $\rightarrow Z_{eq}$ **máxima** $\rightarrow$ tensión máxima - Las corrientes en L y C se cancelan

Ejercicio: Frecuencia de resonancia y factor Q Datos: $R = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-9}}} = \frac{1}{31.62 \times 10^{-6}} = 31623 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = \frac{31623}{2\pi} = 5033 \text{ Hz}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{31623 \times 10^{-3}}{10} = 3.16$$

En resonancia: $|V_L| = |V_C| = Q \cdot V_s = 3.16 \cdot V_s$

1.10.12 9.12 Tipo 12: Transitorio en circuitos de CA

$$x(t) = x_{\text{natural}}(t) + x_{\text{forzada}}(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + X_p \cos(\omega t + \varphi)$$

Procedimiento: 1. Hallar la **respuesta forzada** mediante fasores: X_p y φ 2. Hallar la **constante de tiempo** τ del circuito (como en CC) 3. Plantear $x(0) = A + X_p \cos(\varphi) = x_0$ (condición inicial) 4. Despejar A

Ejercicio: Transitorio RL serie Datos: $R = 20 \Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $v_s(t) = 100 \cos(100t) \text{ V}$. Se conecta en $t = 0$ con $i(0) = 0$.

Paso 1: Respuesta forzada (fasores)

$$Z = 20 + j10 = 22.36 \angle 26.57^\circ \Omega$$

$$\mathbf{I}_f = \frac{100/\sqrt{2} \angle 0^\circ}{22.36 \angle 26.57^\circ} = 3.162 \angle -26.57^\circ \text{ A}$$

$$i_f(t) = 3.162\sqrt{2} \cos(100t - 26.57^\circ) = 4.47 \cos(100t - 26.57^\circ) \text{ A}$$

Paso 2: Constante de tiempo

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.1}{20} = 5 \text{ ms}$$

Paso 3: Condición inicial

$$i(0) = A + 4.47 \cos(-26.57^\circ) = 0 \implies A = -4.47 \cos(-26.57^\circ) = -4.0$$

Resultado:

$$i(t) = -4.0 \cdot e^{-200t} + 4.47 \cos(100t - 26.57^\circ) \text{ A}$$

1.11 10. Resumen y tabla de fórmulas clave

Fórmula	Uso
$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \varphi)$	Señal sinusoidal en régimen permanente
$\mathbf{V} = V \angle \varphi$	Fasor asociado a $v(t)$
$\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$	Derivada en dominio fasorial
$Z_R = R$	Impedancia del resistor
$Z_L = j\omega L$	Impedancia del inductor
$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$	Impedancia del condensador
$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$	Ley de Ohm fasorial
$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$	Serie
$Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$	Paralelo (2 impedancias)
$\mathbf{V}_k = \frac{Z_k}{Z_T} \mathbf{V}_s$	Divisor de tensión
$\mathbf{I}_k = \frac{Y_k}{Y_T} \mathbf{I}_s$	Divisor de corriente
$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$	Valor eficaz (sinusoidal)
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Frecuencia de resonancia
$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$	Factor de calidad (serie)
$x(t) = Ae^{-t/\tau} + x_f(t)$	Respuesta transitoria + permanente