

08_formulario_completo

June 19, 2026

1 Formulario Completo - Teoria de Maquinas y Mecanismos

Teoria de Mecanismos - GIERM

Referencia rapida de **todas las formulas** del curso, organizadas por tema.

1.1 Objetivos

- Tener en un solo lugar **todas las expresiones** necesarias para resolver problemas de mecanismos
 - Servir como **chuleta de examen**: buscar la formula, sustituir datos y resolver
 - Cubrir los 5 temas + apendice de solido rigido + vibraciones
 - Incluir una **guia rapida** de que formula usar en cada tipo de problema
-

1.2 1. Tema 1 - Introduccion y Grados de Libertad

Criterios de movilidad, condicion de Grashof y tipos de pares cinematicos.

Concepto	Formula	Notas
Gruebler (GDL plano)	$G = 3(N - 1) - 2g - h$	N : eslabones, g : pares inferiores (2 GDL restringidos), h : pares superiores (1 GDL restringido)
Par N-ario	Un par que conecta n eslabones elimina $2(n - 1)$ GDL	Par binario: $n = 2$, par ternario: $n = 3$, etc.
Tipos de par inferior	Rotacion (R), Prismático (P), Cilindrico (C), Esférico (S), Helicoidal (H), Plano (E)	En plano solo R y P; ambos eliminan 2 GDL
Par superior (contacto)	Leva, engranaje (contacto puntual/lineal)	Elimina 1 GDL (solo deslizamiento tangencial)

Concepto	Formula	Notas
Condicion de Grashof	$s + l \leq p + q$	s : eslabon mas corto, l : mas largo, p, q : restantes. Si se cumple, al menos una manivela completa
Angulo de transmision	$\mu = \angle(\vec{v}_{\text{salida}}, \vec{F}_{\text{transmitida}})$	Optimo: $\mu \rightarrow 90^\circ$. Minimo admisible $\mu_{\min} \approx 40^\circ$
Ventaja mecanica	$VM = \frac{F_{\text{salida}}}{F_{\text{entrada}}} = \frac{v_{\text{entrada}}}{v_{\text{salida}}}$	Consecuencia de la conservacion de potencia (caso ideal)

1.3 2. Tema 2 - Cinematica de Mecanismos

Ecuaciones de cierre, Jacobiano y analisis de velocidades/aceleraciones.

Concepto	Formula	Notas
Ecuacion de cierre (posicion)	$\sum_i l_i e^{j\theta_i} = 0$	Vector-loop: la suma de vectores en el bucle cerrado es cero
Componentes cartesianas	$\sum l_i \cos \theta_i = 0, \sum l_i \sin \theta_i = 0$	Separar parte real e imaginaria
Ecuacion de velocidad	$[J]\{\dot{\theta}\} = \{b\}$	Derivar cierre: $\sum l_i \dot{\theta}_i j e^{j\theta_i} = 0$
Jacobiano de velocidad	$[J]$ es la matriz de coeficientes de las incognitas $\dot{\theta}_j$	Singularidad cuando $\det(J) = 0$
Ecuacion de aceleracion	$[J]\{\ddot{\theta}\} = \{c\}$	$\{c\}$ incluye terminos centripetos: $-l_i \dot{\theta}_i^2 e^{j\theta_i}$
Velocidad relativa	$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$	P y O del mismo solido rigido
CIR (Centro Instantaneo de Rotacion)	$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}$	I : punto de velocidad nula; $v_P = \omega \cdot IP $
Teorema de Kennedy	3 eslabones definen 3 CIR que estan alineados	Util para localizar CIR por interseccion
Numero de CIR	$n_{\text{CIR}} = \frac{N(N-1)}{2}$	N : numero de eslabones (incluido el fijo)

1.4 3. Apendice - Cinematica del Solido Rigido

Fundamentos de movimiento de solido rigido: Chasles, Poisson, derivadas en referencia movil y composicion de movimientos.

1.4.1 3.1 Teoremas fundamentales

Concepto	Formula	Notas
Teorema de Chasles	Todo movimiento de SR es combinacion de traslacion + rotacion	En plano: traslacion + rotacion respecto a un eje $\perp$ al plano
Formulas de Poisson	$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$	$\hat{e}_i$: vectores unitarios solidarios al cuerpo
Derivada en ref. movil	$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right _{\text{fija}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right _{\text{movil}} + \vec{\omega} \times \vec{A}$	Relaciona derivadas en sistemas de referencia 1 (fija) y 2 (movil)

1.4.2 3.2 Campo de velocidades y aceleraciones

Concepto	Formula	Notas
Velocidad de un punto	$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$	O : punto de referencia del SR
Aceleracion de un punto	$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP})$	Ultimo termino = aceleracion centripeta = $-\omega^2 \overrightarrow{OP}$ (en plano)
Aceleracion (plano)	$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OP} - \omega^2 \overrightarrow{OP}$	Tangencial ($\alpha \times$) + centripeta ($-\omega^2$)

1.4.3 3.3 Composicion de movimientos

Concepto	Formula	Notas
Composicion de velocidades	$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}$	Movimiento de 3 respecto a 1 = mov. de 3 resp. 2 + mov. de 2 resp. 1
Composicion de ω	$\vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}$	Las velocidades angulares se suman vectorialmente
Composicion de aceleraciones	$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21} + \vec{a}_{\text{Cor}}$	Aparece el termino de Coriolis

Concepto	Formula	Notas
Aceleracion de Coriolis	$\vec{a}_{\text{Cor}} = 2\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{32}$	$\vec{\omega}_{21}$: rotacion de la referencia 2 resp. 1; $\vec{v}_{32}$: vel. relativa en ref. 2
Composicion de α	$\vec{\alpha}_{31} = \vec{\alpha}_{32} + \vec{\alpha}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{\omega}_{32}$	Ultimo termino solo si ambas ω no son paralelas (en plano = 0)

1.5 4. Tema 3 - Dinamica de Mecanismos

Fuerzas de inercia (D'Alembert), balance de potencias, reacciones en pares y friccion.

1.5.1 4.1 Fuerzas y momentos de inercia (D'Alembert)

Concepto	Formula	Notas
Fuerza de inercia	$\vec{F}_i = -m\vec{a}_G$	G : centro de masas del eslabon
Momento de inercia	$M_i = -I_G \alpha$	I_G : momento de inercia respecto a G
Teorema de Steiner	$I_O = I_G + m d^2$	d : distancia de G al eje O
Principio de D'Alembert	$\sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_i = 0,$ $\sum M_{\text{ext}} + M_i = 0$	Convierte dinamica en equilibrio estatico equivalente

1.5.2 4.2 Balance de potencias y energia

Concepto	Formula	Notas
Balance de potencias	$P_{\text{mot}} + P_{\text{grav}} + P_{\text{in}} + P_{\text{fric}} = 0$	Todas las potencias del sistema suman cero
Potencia motora	$P_{\text{mot}} = M_{\text{mot}} \cdot \omega$ o $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Par motor por velocidad angular
Potencia gravitatoria	$P_{\text{grav}} = -m g \dot{y}_G$	Negativa si sube el CdG
Potencia de inercia	$P_{\text{in}} = -m \vec{a}_G \cdot \vec{v}_G - I_G \alpha \omega$	Potencia de las fuerzas/momentos de inercia
Teorema de la energia cinetica	$W_{\text{ext}} = \Delta T = T_f - T_i$	$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$
Energia cinetica (rotacion pura)	$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$	Si el eslabon rota respecto a O fijo

1.5.3 4.3 Reacciones en pares cinematicos

Tipo de par	Reacciones	Descripcion
Rotacion (R)	R_x, R_y	2 componentes de fuerza (perpendiculares al eje)
Prismático (P)	N, M	Fuerza normal + momento
Leva (superior)	N	Solo fuerza normal al contacto
Rodillo sobre superficie (RSD)	$N + T$	Normal + tangencial (si hay friccion $T = \mu N$)
Empotramiento	R_x, R_y, M	2 fuerzas + 1 momento (0 GDL en plano)

1.5.4 4.4 Friccion

Concepto	Formula	Notas
Coulomb (deslizamiento)	$F = \mu N$	μ : coeficiente de friccion cinematica
Direccion	$\vec{F}_{\text{fric}}$ opuesta al movimiento relativo	En un par R: par de friccion $M_f = \mu R r$
Potencia de friccion	$P_{\text{fric}} = -\mu N v_{\text{rel}} \leq 0$	Siempre negativa (disipativa)
Friccion en par R	$M_f = \mu \cdot \vec{R} \cdot r_{\text{eje}}$	r_{eje} : radio del eje/pasador

1.6 5. Tema 3B - Vibraciones Mecanicas

Sistemas de 1 GDL: vibraciones libres, amortiguadas y forzadas.

1.6.1 5.1 Parametros fundamentales

Concepto	Formula	Notas
Frecuencia natural	$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	k : rigidez, m : masa
Coef. amortiguamiento	$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{\text{crit}}}$	Adimensional: $\xi < 1$ subamortiguado, $\xi = 1$ critico, $\xi > 1$ sobreamortiguado
Amortiguamiento critico	$c_{\text{crit}} = 2\sqrt{k m} = 2m\omega_n$	Frontera entre oscilatorio y no oscilatorio
Frecuencia amortiguada	$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$	Solo para $\xi < 1$ (subamortiguado)

Concepto	Formula	Notas
Periodo	$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}, T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$	$T_d > T_n$ siempre

1.6.2 5.2 Vibracion libre amortiguada ($\xi < 1$)

Concepto	Formula	Notas
Ecuacion de movimiento	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$	Dividiendo por m : $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$
Respuesta libre	$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))$	Envolviente exponencial decreciente
Condiciones iniciales	$C_1 = x_0, C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d}$	$x_0 = x(0), \dot{x}_0 = \dot{x}(0)$
Decremento logaritmico	$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_d)}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$	Medir picos consecutivos para obtener ξ
ξ desde δ	$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$	Invertir la formula del decremento

1.6.3 5.3 Vibracion forzada armonica

Concepto	Formula	Notas
Ecuacion de movimiento	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$	Ω : frecuencia de excitacion
Relacion de frecuencias	$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$	$r = 1$: resonancia
Amplitud estacionaria	$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$	F_0/k : deflexion estatica
Factor de amplificacion	$H(r) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$	Maximo cerca de $r = 1$ para ξ pequeno
Desfase	$\phi = \arctan\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$	$\phi \rightarrow 90^\circ$ en resonancia
Transmisibilidad	$TR = \frac{F_{\text{trans}}}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$	Fuerza transmitida a la base
Aislamiento eficaz	$TR < 1$ cuando $r > \sqrt{2}$	Independiente de ξ para $r = \sqrt{2}$

1.6.4 5.4 Metodo de Lagrange

Concepto	Formula	Notas
Ecuacion de Lagrange	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$	T : E. cinetica, V : E. potencial, D : funcion de disipacion de Rayleigh
Funcion de Rayleigh	$D = \frac{1}{2} c \dot{q}^2$	$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = c \dot{q}$
Linealizacion	Desarrollar T y V alrededor del equilibrio; $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$	Para obtener ω_n de la ecuacion linealizada

1.7 6. Tema 4 - Sintesis de Mecanismos

Sintesis estructural, ecuacion de Freudenstein y espaciado de Chebyshev.

Concepto	Formula	Notas
Sintesis estructural (suma de tipos)	$N - (G + 3) + 2t + 6q + \dots = T + 2Q + 3P$	N : GDL; G : pares binarios/ternarios; T, Q, P : eslabones ternarios, cuaternarios, pentagonales
Freudenstein (4 barras)	$R_1 \cos \psi - R_2 \cos \phi + R_3 = \cos(\phi - \psi)$	Relaciona angulo de entrada ϕ con angulo de salida ψ
Coefficientes de Freudenstein	$R_1 = \frac{d}{c}, \quad R_2 = \frac{d}{a}, \quad R_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$	a : manivela, b : biela, c : balancin, d : fijo
Sintesis de 3 posiciones	3 ecuaciones de Freudenstein con (ϕ_i, ψ_i) para $i = 1, 2, 3$	Sistema lineal en $R_1, R_2, R_3 \Rightarrow$ obtener a, b, c, d
Espaciado de Chebyshev	$x_j = \frac{1}{2}(x_0 + x_N) - \frac{1}{2}(x_N - x_0) \cos \left(\frac{2j-1}{2N} \pi \right)$	Minimiza el error maximo (minimax)
Precision points	Puntos donde la funcion generada coincide exactamente con la deseada	N puntos de precision $\Rightarrow N$ ecuaciones

1.8 7. Tema 5 - Engranajes

Geometria de dientes, ley de engranamiento, perfil evolvente y trenes de engranajes.

1.8.1 7.1 Geometria del diente (engranaje recto)

Parametro	Formula	Notas
Modulo	$m = \frac{d}{Z}$	d : diametro primitivo, Z : numero de dientes
Paso circular	$p = \pi m$	Distancia entre dientes consecutivos (sobre primitiva)
Adendo (cabeza)	$h_a = m$	Altura del diente por encima de la primitiva
Dedendo (pie)	$h_f = 1,25 m$	Altura del diente por debajo de la primitiva
Diametro de cabeza	$d_a = m(Z + 2)$	$d_a = d + 2h_a$
Diametro de pie	$d_f = m(Z - 2,5)$	$d_f = d - 2h_f$
Diametro base	$d_b = d \cos \alpha$	α : angulo de presion (tipicamente 20°)
Distancia entre centros	$a_c = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2}$	Para engranajes exteriores sin correccion

1.8.2 7.2 Ley de engranamiento y relacion de transmision

Concepto	Formula	Notas
Relacion de transmision	$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$	$i > 1$: reduccion; $i < 1$: multiplicacion
Ruedas de friccion	$\eta = -\frac{R_2}{R_1}$	Signo negativo: sentidos opuestos (contacto exterior)
Ley fundamental	$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{d_1}{d_2} = \text{cte}$	La normal comun en el contacto pasa siempre por el punto primitivo
Perfiles conjugados	$\frac{\omega_i}{\omega_j} = -\frac{d_j}{d_i} = \text{constante}$	Condicion para transmision uniforme

1.8.3 7.3 Perfil evolvente (involuta)

Concepto	Formula	Notas
Parametrizacion	$\begin{cases} x = r_b(\cos t + t \sin t) \\ y = r_b(\sin t - t \cos t) \end{cases}$	r_b : radio base, t : parametro (angulo de desenrollamiento)

Concepto	Formula	Notas
Funcion evolvente	$\text{inv}(\alpha) = \tan \alpha - \alpha$	Util para calculo de espesores y correcciones
Angulo de presion	$\cos \alpha = \frac{r_b}{r}$	Varia con el radio; α en primitiva es el nominal (20°)

1.8.4 7.4 Trenes de engranajes

Concepto	Formula	Notas
Tren ordinario	$i_{\text{total}} = \prod_k i_k = \prod_k \frac{Z_{\text{conducido},k}}{Z_{\text{conductor},k}}$	Signo: (-) por cada contacto exterior
Tren epicicloidal (Willis)	$\frac{\omega_i - \omega_{\text{brazo}}}{\omega_j - \omega_{\text{brazo}}} = \pm \frac{Z_j}{Z_i}$	Inversion cinematica: restar ω_{brazo} a todo
Razon fundamental	$i_0 = \frac{\omega_{\text{sol}} - \omega_{\text{brazo}}}{\omega_{\text{corona}} - \omega_{\text{brazo}}}$	$i_0 = -Z_{\text{corona}}/Z_{\text{sol}}$ (tren simple sol-planeta-corona)
Condicion geometrica	$Z_{\text{corona}} = Z_{\text{sol}} + 2 Z_{\text{planeta}}$	Para engranaje interior (corona) con contacto correcto

1.9 8. Resumen rapido: que formula usar en cada tipo de problema

Guia de seleccion de formulas segun el tipo de ejercicio del examen.

Tipo de problema	Formulas clave	Seccion
Calcular GDL de un mecanismo	Gruebler: $G = 3(N - 1) - 2g - h$; identificar pares N-arios	Sec. 1
Verificar si hay manivela completa	Grashof: $s + l \leq p + q$	Sec. 1
Posiciones de un mecanismo	Ecuacion de cierre: $\sum l_i e^{j\theta_i} = 0$	Sec. 2
Velocidades (metodo analitico)	$[J]\{\dot{\theta}\} = \{b\}$	Sec. 2
Velocidades (metodo grafico)	CIR + $v_P = \omega \cdot IP $ + Kennedy	Sec. 2
Aceleraciones	$[J]\{\ddot{\theta}\} = \{c\}$ con centripetos; $\vec{a}_P = \vec{a}_O + \alpha \times \vec{OP} - \omega^2 \vec{OP}$	Sec. 2, 3
Mecanismo con corredera/leva	Composicion + Coriolis: $\vec{a}_{\text{Cor}} = 2\omega \times v_{\text{rel}}$	Sec. 3
Par motor necesario	Balance de potencias: $P_{\text{mot}} + P_{\text{grav}} + P_{\text{in}} + P_{\text{fric}} = 0$	Sec. 4

Tipo de problema	Formulas clave	Seccion
Reacciones en pares	D'Alembert: $\vec{F}_i = -m\vec{a}_G$, $M_i = -I_G\alpha$; equilibrio eslabon a eslabon	Sec. 4
Efecto de la friccion	Coulomb $F = \mu N$; par de friccion en eje $M_f = \mu R r$	Sec. 4
Frecuencia natural / amortiguamiento	$\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\xi = c/(2m\omega_n)$	Sec. 5
Respuesta libre amortiguada	$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t)$	Sec. 5
Identificar ξ experimentalmente	Decremento logaritmico: $\delta = 2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}$	Sec. 5
Amplitud en forzada	$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$	Sec. 5
Obtener ecuacion de movimiento	Lagrange: $\frac{d}{dt}(\partial T/\partial \dot{q}) - \partial T/\partial q + \partial V/\partial q = Q$	Sec. 5
Disenar un 4 barras	Freudenstein: $R_1 \cos \psi - R_2 \cos \phi + R_3 = \cos(\phi - \psi)$	Sec. 6
Relacion de transmision (engranajes)	$i = Z_2/Z_1$; tren: $i_{\text{total}} = \prod Z_{\text{cond}}/Z_{\text{ctor}}$	Sec. 7
Tren epicicloidal	Willis: $(\omega_i - \omega_{\text{brazo}})/(\omega_j - \omega_{\text{brazo}}) = \pm Z_j/Z_i$	Sec. 7