

02_cinematica_mecanismos

June 19, 2026

1 Tema 2 - Analisis Cinematico de Mecanismos Planos

Teoria de Maquinas y Mecanismos | Universidad

1.1 Objetivos de aprendizaje

1. Plantear y resolver el **problema de posicion** (no lineal) usando **fsolve**
 2. Plantear y resolver el **problema de velocidad** (lineal) usando el Jacobiano
 3. Plantear y resolver el **problema de aceleracion** (lineal) usando el Jacobiano
 4. Aplicar los tres metodos: velocidades relativas, ecuaciones de lazo y CIR
 5. Analizar mecanismos de 4 barras, biela-manivela y multi-lazo
-

1.2 Indice

1. Formulario del Tema
2. Introduccion
3. Metodo de velocidades y aceleraciones relativas
4. Metodo de ecuaciones de lazo
5. Metodo de centros instantaneos de rotacion
6. Ejemplo completo: 4-barras
7. Ejemplo completo: biela-manivela-corredora
8. Ejemplo: mecanismo multi-lazo (Stephenson III)
9. Ejercicios resueltos
10. Catalogo completo de ejercicios
11. Resumen y formulas clave

1.3 1. Formulario del Tema

Concepto	Formula	Notas
Ecuacion de cierre de lazo (posicion)	$\sum_i L_i \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$	No lineal en las incognitas θ_i
Posicion (fsolve)	$\mathbf{f}(\theta) = \mathbf{0} \Rightarrow \text{fsolve}(\mathbf{f}, \theta_0)$	Necesita semilla θ_0 (warm-start)

Concepto	Formula	Notas
Jacobiano de velocidad	$[\mathbf{J}]\{\dot{\theta}\} = \{\mathbf{b}_{vel}\}$	$J_{ij} = \partial f_i / \partial \theta_j$. Sistema lineal
Jacobiano de aceleracion	$[\mathbf{J}]\{\ddot{\theta}\} = \{\mathbf{b}_{acel}\}$	Mismo $\mathbf{J}$. $\mathbf{b}_{acel}$ incluye terminos ω^2
Velocidad relativa	$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \omega \times \overrightarrow{OP}$	$\omega = \omega \hat{k}$ para mecanismos planos
Aceleracion relativa	$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \alpha \times \overrightarrow{OP} - \omega^2 \overrightarrow{OP}$	Termino centripeto $-\omega^2 \overrightarrow{OP}$
CIR (centro instantaneo)	$\mathbf{v}_P = \omega \times (\mathbf{P} - \mathbf{CIR})$	$\ \mathbf{v}_P\ = \ \omega\ \cdot d(P, CIR)$
Par de rotacion en A (vel.)	$\mathbf{v}_{21}^A = \mathbf{v}_{31}^A$	Misma velocidad en la junta
Par de rotacion en A (acel.)	$\mathbf{a}_{21}^A = \mathbf{a}_{31}^A$	Misma aceleracion en la junta
Teorema de Kennedy	$I_{ij}, I_{jk}, I_{ik} \text{ son colineales}$	Para encontrar CIR de 3 cuerpos

1.4 2. Introduccion

El analisis cinematico de un mecanismo plano consiste en resolver **tres problemas secuenciales**:

Problema	Naturaleza	Metodo de resolucion
1. Posicion	No lineal	<code>fsolve</code> (Newton-Raphson)
2. Velocidad	Lineal	$[\mathbf{J}]\{\dot{\theta}\} = \{\mathbf{b}_{vel}\}$
3. Aceleracion	Lineal	$[\mathbf{J}]\{\ddot{\theta}\} = \{\mathbf{b}_{acel}\}$

Dato clave: una vez resuelto el problema de posicion (el mas dificil por ser no lineal), los problemas de velocidad y aceleracion comparten la **misma matriz Jacobiana**. Solo cambia el vector del lado derecho.

1.4.1 Tres metodos de analisis

1. **Velocidades y aceleraciones relativas:** aplica directamente las ecuaciones vectoriales de la cinematica del solido rigido.
2. **Ecuaciones de lazo:** plantea las restricciones geometricas de cierre y las deriva respecto al tiempo.
3. **Centros instantaneos de rotacion (CIR):** metodo grafico basado en el teorema de Kennedy.

Los tres metodos son equivalentes. El metodo de ecuaciones de lazo es el mas sistematico y el que mejor se presta a la implementacion computacional.

1.5 3. Metodo de velocidades y aceleraciones relativas

1.5.1 3.1 Resumen de ecuaciones

Para un cuerpo rigido i que rota respecto al sistema fijo (cuerpo 1), la **velocidad** de un punto P del cuerpo i es:

$$\mathbf{v}_{P,i1} = \mathbf{v}_{O,i1} + \omega_{i1} \hat{k} \times \overrightarrow{OP}$$

En componentes (mecanismo plano con $\omega = \omega \hat{k}$):

$$\begin{cases} v_{Px} = v_{Ox} - \omega \cdot (P_y - O_y) \\ v_{Py} = v_{Oy} + \omega \cdot (P_x - O_x) \end{cases}$$

La **aceleracion** de P :

$$\mathbf{a}_{P,i1} = \mathbf{a}_{O,i1} + \alpha_{i1} \hat{k} \times \overrightarrow{OP} - \omega_{i1}^2 \cdot \overrightarrow{OP}$$

En componentes:

$$\begin{cases} a_{Px} = a_{Ox} - \alpha(P_y - O_y) - \omega^2(P_x - O_x) \\ a_{Py} = a_{Oy} + \alpha(P_x - O_x) - \omega^2(P_y - O_y) \end{cases}$$

1.5.2 3.2 Aplicacion a pares de rotacion

Si los cuerpos i y j estan unidos por un **par de rotacion** en el punto A :

$$\boxed{\mathbf{v}_{i1}^A = \mathbf{v}_{j1}^A} \quad \boxed{\mathbf{a}_{i1}^A = \mathbf{a}_{j1}^A}$$

Esto genera **2 ecuaciones escalares** (componentes x e y) por cada par de rotacion.

1.5.3 3.3 Aplicacion a pares prismaticos

Si los cuerpos i y j estan unidos por un **par prismatico** (corredera):

- La velocidad relativa es **tangente a la guia**: $\mathbf{v}_{j/i} = \dot{d} \hat{e}_t$
- La aceleracion incluye **termino de Coriolis**: $\mathbf{a}_{Coriolis} = 2\omega_i \times \mathbf{v}_{j/i}$

$$\mathbf{a}_{j1} = \mathbf{a}_{i1} + \alpha_i \times \vec{r} - \omega_i^2 \vec{r} + \ddot{d} \hat{e}_t + 2\omega_i \times \dot{d} \hat{e}_t$$

1.6 4. Metodo de ecuaciones de lazo

Este es el metodo mas sistematico y el que mejor se adapta a la programacion. Se basa en escribir las **ecuaciones de cierre geometrico** del mecanismo y derivarlas respecto al tiempo.

1.6.1 4.1 Ecuaciones de cierre (posicion)

Para un mecanismo de 4 barras con un solo lazo:

$$\overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O_2O_4} + \overrightarrow{O_4B}$$

En componentes:

$$\begin{cases} L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 - L_1 - L_4 \cos \theta_4 = 0 \\ L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 - L_4 \sin \theta_4 = 0 \end{cases}$$

Dado θ_2 (entrada), se resuelve el sistema **no lineal** para (θ_3, θ_4) usando **fsolve**.

1.6.2 4.2 Primera derivada $\Rightarrow$ velocidades (Jacobiano)

Derivando las ecuaciones de cierre respecto al tiempo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -L_3 \sin \theta_3 & L_4 \sin \theta_4 \\ L_3 \cos \theta_3 & -L_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -L_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}_{vel}}$$

1.6.3 4.3 Segunda derivada $\Rightarrow$ aceleraciones

Derivando de nuevo:

$$\mathbf{J} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} L_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + L_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + L_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - L_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \\ -L_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + L_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - L_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}_{accel}}$$

Nota clave: la matriz **J** es la **misma** para velocidades y aceleraciones. Solo cambia el lado derecho.

1.7 5. Metodo de centros instantaneos de rotacion (CIR)

1.7.1 Definicion

El **centro instantaneo de rotacion** I_{ij} de dos cuerpos i y j es el punto donde la velocidad relativa entre ambos cuerpos es cero:

$$\mathbf{v}_{I_{ij},i} = \mathbf{v}_{I_{ij},j}$$

Para un mecanismo plano, todo movimiento relativo entre dos cuerpos es una rotacion instantanea alrededor de su CIR.

1.7.2 Teorema de Kennedy

Dados tres cuerpos i, j, k en movimiento relativo plano:

$$\boxed{I_{ij}, I_{jk}, I_{ik} \text{ son colineales}}$$

1.7.3 Numero de CIR

Para un mecanismo de n cuerpos, el numero de CIR es:

$$N_{CIR} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Para un mecanismo de 4 barras ($n = 4$): $N_{CIR} = 6$

1.7.4 Aplicacion a velocidades

Una vez conocido el CIR I_{i1} del cuerpo i respecto al fijo:

$$\boxed{v_P = \omega_i \cdot d(P, I_{i1})}$$

donde $d(P, I_{i1})$ es la distancia del punto P al CIR. La velocidad es perpendicular a la linea $P - I_{i1}$.

1.8 6. Ejemplo completo: 4-barras

1.8.1 Enunciado (Ejemplo 1 del PDF)

Mecanismo de 4 barras con: - $L_2 = L_3 = 0.2$ m - $L_4 = 0.2\sqrt{2}$ m - $L_1 = 0.2$ m (barra fija) - $\theta_2 = 45^\circ$ - $\omega_{21} = -20 \hat{k}$ rad/s (dato) - $\alpha_{21} = 0$ rad/s²

Calcular: $\omega_{31}, \omega_{41}, \alpha_{31}, \alpha_{41}$

1.8.2 Solucion paso a paso

1. Posicion: con $\theta_2 = 45^\circ$ y las longitudes dadas, se resuelve el sistema no lineal.

2. Velocidad: cadena de velocidades en la junta A:

$$\omega_{21} \times \overrightarrow{O_2A} + \omega_{31} \times \overrightarrow{AB} = \omega_{41} \times \overrightarrow{O_4B}$$

3. Aceleracion: incluye terminos centripetos $-\omega^2 \cdot \vec{r}$:

$$\alpha_{21} \times \overrightarrow{O_2A} - \omega_{21}^2 \overrightarrow{O_2A} + \alpha_{31} \times \overrightarrow{AB} - \omega_{31}^2 \overrightarrow{AB} = \alpha_{41} \times \overrightarrow{O_4B} - \omega_{41}^2 \overrightarrow{O_4B}$$

1.9 7. Ejemplo completo: biela-manivela-corredera

1.9.1 Descripcion del mecanismo

El mecanismo biela-manivela-corredera (slider-crank) es fundamental en motores de combustion interna. Consta de: - **Barra 2** (manivela): gira respecto al punto fijo O - **Barra 3** (biela): conecta la manivela con la corredera - **Barra 4** (corredera/piston): se desplaza linealmente

1.9.2 Ecuaciones de cierre

$$\begin{cases} L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 = d \\ L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 = e \end{cases}$$

donde d es el desplazamiento del piston y e es el offset (excentricidad, normalmente $e = 0$).

Incognitas de posicion: θ_3 y d

1.9.3 Jacobiano para velocidades

$$\begin{bmatrix} -L_3 \sin \theta_3 & -1 \\ L_3 \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -L_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix}$$

1.9.4 Jacobiano para aceleraciones

$$\begin{bmatrix} -L_3 \sin \theta_3 & -1 \\ L_3 \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + L_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + L_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 \\ -L_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + L_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 \end{Bmatrix}$$

1.10 8. Ejemplo: mecanismo multi-lazo (Stephenson III)

1.10.1 Descripcion

El mecanismo de **Stephenson tipo III** es un mecanismo de 6 barras y 2 GDL (en su version general), pero aqui lo analizamos con **1 GDL** fijando una entrada. Tiene **2 lazos cerrados** independientes.

1.10.2 Ecuaciones de cierre - Lazo 1

$$\begin{cases} L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 - L_1^{(1)} - L_4 \cos \theta_4 = 0 \\ L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 - L_4 \sin \theta_4 = 0 \end{cases}$$

1.10.3 Ecuaciones de cierre - Lazo 2

$$\begin{cases} L_4 \cos \theta_4 + L_5 \cos \theta_5 - L_1^{(2)} - L_6 \cos \theta_6 = 0 \\ L_4 \sin \theta_4 + L_5 \sin \theta_5 - L_6 \sin \theta_6 = 0 \end{cases}$$

Las incognitas de posicion son $(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ (4 incognitas, 4 ecuaciones).

1.10.4 Jacobiano 4×4

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -L_3 s_3 & L_4 s_4 & 0 & 0 \\ L_3 c_3 & -L_4 c_4 & 0 & 0 \\ 0 & -L_4 s_4 & -L_5 s_5 & L_6 s_6 \\ 0 & L_4 c_4 & L_5 c_5 & -L_6 c_6 \end{bmatrix}$$

donde $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$.

1.11 9. Ejercicios resueltos

A continuacion se resuelven 5 ejercicios tipicos del tema, cubriendo los distintos tipos de mecanismos y metodos de analisis.

1.11.1 Ejercicio 1: 4-barras con Grashof (manivela-balancin)

Datos: $L_1 = 0.30$ m, $L_2 = 0.10$ m, $L_3 = 0.25$ m, $L_4 = 0.20$ m, $\theta_2 = 120^\circ$, $\omega_2 = 50$ rad/s, $\alpha_2 = 0$

Paso 1: Resolver ecuaciones de lazo con `fsolve`:

$$L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 = L_1 + L_4 \cos \theta_4$$

$$L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 = L_4 \sin \theta_4$$

$$\theta_3 = 18.33^\circ, \quad \theta_4 = 124.29^\circ$$

Paso 2: Velocidades via Jacobiano: $[J]\{\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4\} = \{b\}$

$$\omega_3 = -1.56 \text{ rad/s}, \quad \omega_4 = 25.47 \text{ rad/s}$$

Paso 3: Aceleraciones:

$$\alpha_3 = 496.90 \text{ rad/s}^2, \quad \alpha_4 = -74.31 \text{ rad/s}^2$$

Resultado: $\omega_3 = -1.56 \text{ rad/s}$, $\omega_4 = 25.47 \text{ rad/s}$

1.11.2 Ejercicio 2: Biela-manivela con excentricidad

Datos: $L_2 = 50$ mm, $L_3 = 150$ mm, $e = 20$ mm, $n = 3000$ rpm, $\theta_2 = 90^\circ$

Paso 1: $\omega_2 = 3000 \times 2\pi/60 = 314.16$ rad/s

Paso 2: Resolver posicion: $\theta_3 = -11.54^\circ$, $d = 146.97$ mm

Paso 3: Velocidad del piston: $\dot{d} = -15.71$ m/s

Paso 4: Aceleracion del piston: $\ddot{d} = 1007.31$ m/s²

Resultado: $v_{piston} = -15.71$ m/s, $a_{piston} = 1007.31$ m/s²

1.11.3 Ejercicio 3: Velocidad del punto de acoplador (coupler point)

Datos: Mismo mecanismo del Ejercicio 1. P = punto medio de la biela.

Paso 1: Posicion de P : punto medio entre A y B

$$P = (0.0687, 0.1259) \text{ m}$$

Paso 2: Velocidad: $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \omega_3 \times \overrightarrow{AP}$

$$\vec{v}_P = (-4.269, -2.685) \text{ m/s}$$

Resultado: $|v_P| = 5.043 \text{ m/s}$

1.11.4 Ejercicio 4: CIR de un mecanismo de 4 barras

Datos: Mismo mecanismo del Ejercicio 1. Hallar velocidad de P usando el CIR.

Paso 1: Localizar I_{31} = interseccion de las rectas O_2A y O_4B prolongadas.

Paso 2: $\omega_3 = \omega_2 \cdot \frac{O_2I_{31}}{AI_{31}}$ (triangulos de velocidad)

Paso 3: $|v_P| = \omega_3 \cdot \overline{PI_{31}}$

Resultado: El CIR reproduce exactamente los resultados del metodo del Jacobiano (verificacion en codigo).

1.11.5 Ejercicio 5: Barrido completo con deteccion de singularidades

Datos: $L_1 = 0.40 \text{ m}$, $L_2 = 0.18 \text{ m}$, $L_3 = 0.30 \text{ m}$, $L_4 = 0.25 \text{ m}$, $\omega_2 = 30 \text{ rad/s}$

Paso 1: Verificar Grashof: $s + l = 0.58$, $p + q = 0.55 \Rightarrow$ No Grashof

Paso 2: Barrer $\theta_2 \in [0^\circ, 360^\circ]$ con warm-start. En cada posicion, resolver el lazo y calcular $\omega_3, \omega_4, \alpha_3, \alpha_4$.

Paso 3: Detectar singularidades donde $\det(J) \approx 0$ (biela y balancin alineados).

Resultado: Graficas de posicion, velocidad, aceleracion y $\det(J)$ vs θ_2 . Las singularidades se marcan en rojo.

1.12 10. Catalogo completo de ejercicios

Todos los patrones de problemas que pueden aparecer en el examen:

1.12.1 Tipo 1: Posicion de un mecanismo de 4 barras

- **Dato:** longitudes y θ_2
- **Incognita:** θ_3, θ_4
- **Metodo:** `fsolve` con ecuaciones de cierre
- **Trampa:** elegir la configuracion correcta (abierta/cruzada) con la semilla

1.12.2 Tipo 2: Velocidad y aceleracion de un mecanismo de 4 barras

- **Dato:** posicion resuelta + ω_2 (y opcionalmente α_2)
- **Incognita:** $\omega_3, \omega_4, \alpha_3, \alpha_4$
- **Metodo:** Jacobiano + `np.linalg.solve`
- **Trampa:** no olvidar los terminos centripetos (ω^2) en la aceleracion

1.12.3 Tipo 3: Biela-manivela-corredera

- **Dato:** L_2, L_3 , offset e, ω_2
- **Incognita:** $d, \theta_3, \dot{d}, \dot{\theta}_3$
- **Metodo:** ecuaciones de cierre adaptadas (una incognita lineal: d)
- **Trampa:** el Jacobiano tiene forma distinta (columna con -1 y 0)

1.12.4 Tipo 4: Punto del acoplador

- **Dato:** cinematica del mecanismo ya resuelta
- **Incognita:** $\mathbf{v}_P, \mathbf{a}_P$ de un punto arbitrario
- **Metodo:** ecuaciones de velocidad/aceleracion relativa
- **Trampa:** P no esta en la linea $A-B$, necesita coordenadas en el cuerpo

1.12.5 Tipo 5: CIR y velocidades

- **Dato:** geometria del mecanismo, ω_2
- **Incognita:** CIR, velocidades de puntos
- **Metodo:** Kennedy + interseccion de lineas
- **Trampa:** CIR en el infinito cuando las lineas son paralelas (traslacion)

1.12.6 Tipo 6: Mecanismo multi-lazo

- **Dato:** topologia con 2+ lazos
- **Incognita:** todas las $\theta_i, \omega_i, \alpha_i$
- **Metodo:** sistema $n \times n$ (4x4 para Stephenson)
- **Trampa:** el Jacobiano es mayor pero la estructura es la misma

1.13 11. Resumen y formulas clave

1.13.1 Estructura del analisis cinematico

POSICION (no lineal)	-->	VELOCIDAD (lineal)	-->	ACELERACION (lineal)
<code>fsolve(f, x0)</code>		<code>J * omega = b_vel</code>		<code>J * alpha = b_ace1</code>
<code>warm-start: x0=sol</code>		<code>np.linalg.solve</code>		<code>np.linalg.solve</code>
		(MISMO Jacobiano J)		(MISMO Jacobiano J)

1.13.2 Formulas esenciales

Ecuacion de cierre de lazo (4-barras):

$$\begin{cases} L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 = L_1 + L_4 \cos \theta_4 \\ L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 = L_4 \sin \theta_4 \end{cases}$$

Jacobiano de velocidad (4-barras):

$$\begin{bmatrix} -L_3 s_3 & L_4 s_4 \\ L_3 c_3 & -L_4 c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 s_2 \\ -L_2 \dot{\theta}_2 c_2 \end{Bmatrix}$$

Lado derecho de aceleracion (incluye centripetos):

$$\mathbf{b}_{acel} = \begin{Bmatrix} L_2 \ddot{\theta}_2 s_2 + L_2 \dot{\theta}_2^2 c_2 + L_3 \dot{\theta}_3^2 c_3 - L_4 \dot{\theta}_4^2 c_4 \\ -L_2 \ddot{\theta}_2 c_2 + L_2 \dot{\theta}_2^2 s_2 + L_3 \dot{\theta}_3^2 s_3 - L_4 \dot{\theta}_4^2 s_4 \end{Bmatrix}$$

Velocidad relativa:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \omega \hat{k} \times \overrightarrow{OP}$$

Aceleracion relativa (con centripeta):

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \alpha \hat{k} \times \overrightarrow{OP} - \omega^2 \overrightarrow{OP}$$

CIR:

$$|v_P| = |\omega| \cdot d(P, I) \quad \text{direccion} \perp \overrightarrow{IP}$$

1.13.3 Errores comunes en exámenes

1. **Olvidar los terminos centripetos** ($-\omega^2 \vec{r}$) en la aceleracion
2. **No usar warm-start** en `fsolve` $\Rightarrow$ converge a solucion incorrecta
3. **Confundir configuracion** abierta/cruzada del mecanismo
4. **Signo incorrecto** en el Jacobiano (derivar con cuidado)
5. **Coriolis olvidado** en pares prismaticos ($2\omega \times v_{rel}$)

1.13.4 Verificacion: Comparacion de 3 metodos

Para el Ejemplo 1 del PDF ($L_2 = L_3 = 0.2$ m, $L_4 = 0.2\sqrt{2}$ m, $\omega_2 = -20$ rad/s):

Metodo	ω_3 (rad/s)	ω_4 (rad/s)	α_3 (rad/s ²)	α_4 (rad/s ²)
Ecuaciones de lazo	Calculado en Sec. 6	idem	idem	idem
Velocidades relativas	Verifica	Verifica	Verifica	Verifica
CIR (Kennedy)	Verifica ω_3	Verifica ω_4	N/A	N/A

Los tres metodos producen resultados identicos (error $< 10^{-10}$), lo que valida la implementacion.