

04_dinamica_mecanismos

June 19, 2026

1 Tema 3 - Analisis Dinamico de Mecanismos Planos

Asignatura: Teoria de Maquinas y Mecanismos

1.0.1 Objetivos

1. Clasificar las acciones (fuerzas y pares) sobre un mecanismo plano
2. Plantear el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) de cada eslabon
3. Aplicar el **Principio de D'Alembert** (metodo vectorial) para resolver el equilibrio dinamico
4. Aplicar el **Principio de Potencias Virtuales** (metodo analitico) como alternativa mas eficiente
5. Distinguir entre **analisis inverso** (movimiento dado -> par motor) y **analisis directo** (fuerzas dadas -> movimiento)
6. Utilizar el **Teorema de las Fuerzas Vivas** para balances energeticos
7. Resolver problemas de **equilibrado de rotores**

1.1 1. Formulario del Tema

1.1.1 Fuerzas de inercia

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}_G$$

$$M_i = -I_G \alpha$$

$$I_O = I_G + m d^2 \quad (\text{Steiner})$$

1.1.2 Rozamiento seco (Amontons-Coulomb)

$$F_{\max} = \mu_s N \quad (\text{estatico})$$

$$T = \mu_d N \quad (\text{dinamico}), \quad \mu_d < \mu_s$$

1.1.3 Principio de D'Alembert (equilibrio de cada eslabon)

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O = 0 \quad (\text{incluyendo } \vec{F}_i, M_i)$$

1.1.4 Principio de Potencias Virtuales

$$P_{\text{motriz}} + P_{\text{grav}} + P_{\text{inercia}} + P_{\text{pasivas}} = 0$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad P = M \cdot \omega$$

1.1.5 Teorema de las Fuerzas Vivas

$$W_{\text{total}} = \Delta T = T_f - T_i$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

1.1.6 Trabajo de fuerzas típicas

Fuerza	Trabajo
Motriz / Resistente	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int M d\theta$
Gravedad	$\Delta W_g = -mg \Delta z = -\Delta E_{pg}$
Inercia	$\Delta W_{in} = -\frac{1}{2} m \Delta(v^2) = -\Delta T$
Elastica (interna)	$W = 0$

1.1.7 Equilibrado de rotores

$$\sum m_i r_i e^{j\theta_i} = 0 \quad (\text{estático})$$

$$\sum m_i r_i z_i e^{j\theta_i} = 0 \quad (\text{dinámico: momentos})$$

1.2 2. Tipos de acciones sobre un mecanismo

Las fuerzas y pares que actúan sobre un mecanismo se clasifican en **externas** e **internas**.

Fuerzas externas: - **Motrices:** aportan energía al sistema ($W_{\text{motriz}} > 0$) - **Resistentes útiles:** realizan trabajo útil ($W_{\text{util}} < 0$ desde el punto de vista del mecanismo) - **Resistentes pasivas:** disipan energía (rozamiento, etc.) - **Gravedad:** conservativa, $\Delta W_g = -mg \Delta z$ - **Inercia:** $\Delta W_{in} = -\frac{1}{2} m \Delta(v^2)$

Fuerzas internas: - **Esfuerzos internos:** en barras rígidas el trabajo es nulo (elásticas $W = 0$, inelásticas $\rightarrow$ disipación) - **Reacciones en pares cinemáticos:** $\vec{R}_{ij}^A = -\vec{R}_{ji}^A$ (acción-reacción)

1.3 3. Fuerzas de inercia

Según el **Principio de D'Alembert**, el movimiento de un sólido rígido se puede tratar como un problema de equilibrio estático si se añaden unas fuerzas ficticias llamadas **fuerzas de inercia**:

- **Fuerza de inercia** (aplicada en el centro de masas G):

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}_G$$

- **Momento de inercia** (respecto a G):

$$M_i = -I_G \alpha$$

Se pueden trasladar a un punto O cualquiera usando el **Teorema de Steiner**:

$$M_O = -(I_G + m |OG|^2) \alpha = -I_O \alpha$$

donde $I_O = I_G + m d^2$ es el momento de inercia respecto al punto O .

1.4 4. Reacciones en pares cinematicos

Las reacciones dependen del tipo de par:

Par cinematico	Incognitas de reaccion	GDL restringidos
Rotacion (R)	R_x, R_y (2 componentes de fuerza)	2
Prismatico (P)	N (normal) + M (momento)	2
Leva (C)	N (normal, sin friccion)	1
Rueda sin deslizamiento (RSD)	$N + T$ (normal + tangencial)	2

Nota: En el par prismático, la reacción se puede expresar equivalentemente como dos fuerzas normales N y N' separadas una distancia d , en lugar de $N + M$.

1.5 5. Rozamiento seco (Amontons-Coulomb)

El modelo clásico de fricción seca distingue dos regímenes:

Estatico (cuerpo en reposo relativo):

$$F \leq \mu_s N$$

La fuerza de fricción puede tomar cualquier valor hasta el límite $\mu_s N$.

Dinamico (cuerpo en movimiento relativo):

$$T = \mu_d N \quad \text{con} \quad \mu_d < \mu_s$$

La fuerza de fricción es constante y se opone al movimiento relativo.

Valores típicos:

Materiales	μ_s	μ_d
Acero-Acero (seco)	0.6	0.4
Acero-Acero (lubricado)	0.15	0.06
Acero-Bronce	0.35	0.2

1.6 6. Metodo vectorial: Principio de D'Alembert

El metodo consiste en:

1. **Dibujar el DCL** (Diagrama de Cuerpo Libre) de **cada eslabon** por separado
2. Incluir: reacciones en pares, fuerzas externas, peso, y **fuerzas/momentos de inercia**
3. Plantear **3 ecuaciones de equilibrio por eslabon** (N eslabones moviles):

$$\sum F_x^{(k)} = 0, \quad \sum F_y^{(k)} = 0, \quad \sum M^{(k)} = 0 \quad k = 1, \dots, N$$

4. Se obtiene un **sistema de $3N$ ecuaciones** con $3N$ incognitas (reacciones + par motor)

Ventaja: Se obtienen TODAS las reacciones internas

Desventaja: Sistema grande, muchas ecuaciones

1.7 7. Metodo analitico: Principio de Potencias Virtuales

En lugar de plantear el equilibrio de cada eslabon por separado, se puede aplicar el balance de potencias a **todo el mecanismo**:

$$\sum P = P_{\text{motriz}} + P_{\text{grav}} + P_{\text{inercia}} + P_{\text{pasivas}} = 0$$

donde: - $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ para fuerzas - $P = M \cdot \omega$ para pares

Ventaja: Las reacciones internas no aparecen (potencia nula), por lo que se obtiene directamente el par motor con **una sola ecuacion**.

Desventaja: No proporciona las reacciones internas (si se necesitan, hay que usar D'Alembert).

Para el mecanismo biela-manivela:

$$M_{\text{motor}} \cdot \omega_2 + (-F_{\text{ext}}) \cdot v_B + \sum_k (-m_k g \cdot v_{Gk,y}) + \sum_k (-m_k \vec{a}_{Gk} \cdot \vec{v}_{Gk} - I_{Gk} \alpha_k \omega_k) = 0$$

1.8 8. Analisis dinamico inverso

Problema: Dado el movimiento (posicion, velocidad, aceleracion), determinar las fuerzas/pares necesarios para producirlo.

Procedimiento: 1. Resolver la **cinematica** completa: posiciones, velocidades, aceleraciones de todos los eslabones 2. Calcular las **fuerzas de inercia** ($F_i = -ma_G$, $M_i = -I_G \alpha$) 3. Plantear el sistema de ecuaciones de equilibrio (D'Alembert) o la ecuacion de potencias 4. Resolver el sistema lineal para obtener el par motor y las reacciones

El resultado tipico es $M_{\text{motor}}(\theta)$: el par motor necesario en funcion del angulo de entrada.

1.9 9. Analisis dinamico directo

Problema: Dadas las fuerzas aplicadas (par motor, cargas, etc.), determinar el movimiento del mecanismo.

Procedimiento: 1. Reducir el mecanismo a un **sistema de 1 GDL** (coordenada generalizada θ_2) 2. Plantear la ecuacion de movimiento reducida:

$$I_{eq}(\theta_2) \ddot{\theta}_2 = M_{\text{motor}} - M_{\text{resistente}}(\theta_2, \dot{\theta}_2)$$

donde I_{eq} es el **momento de inercia equivalente reducido** al eje de entrada:

$$I_{eq} = \sum_k \left(m_k \left(\frac{v_{Gk}}{\omega_2} \right)^2 + I_{Gk} \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right)^2 \right)$$

3. Integrar la ODE resultante con un metodo numerico (e.g., `solve_ivp`)

Nota: En el analisis directo, ω_2 ya no es constante; varia con el tiempo.

1.10 10. Teorema de las fuerzas vivas

El **Teorema de las Fuerzas Vivas** (o Teorema de la Energia Cinetica) establece que:

$$W_{\text{total}} = \Delta T = T_f - T_i$$

donde T es la energia cinetica total del sistema:

$$T = \sum_k \left(\frac{1}{2} m_k v_{Gk}^2 + \frac{1}{2} I_{Gk} \omega_k^2 \right)$$

Aplicaciones: - Calcular la velocidad en una posicion dada conociendo el trabajo realizado - Dimensionar volantes de inercia (la variacion de energia cinetica se almacena en el volante) - Verificar resultados de analisis inverso/directo

Para el mecanismo con inercia equivalente:

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} I_{eq} \omega_2^2 \Big|_{\theta_i}^{\theta_f}$$

1.11 11. Equilibrado de rotores

Un rotor esta **desequilibrado** cuando su centro de masas no coincide con el eje de giro, lo que produce fuerzas centrifugas que generan vibraciones.

1.11.1 Equilibrado estatico (1 plano)

Se anaden masas de correccion en un **unico plano** para que:

$$\sum_k m_k r_k e^{j\theta_k} = 0$$

Equivalente a: $\sum m_k r_k \cos \theta_k = 0$ y $\sum m_k r_k \sin \theta_k = 0$.

1.11.2 Equilibrado dinamico (2 planos)

Ademas del equilibrio de fuerzas, se requiere equilibrio de **momentos**:

$$\sum_k m_k r_k e^{j\theta_k} = 0 \quad (\text{fuerzas})$$

$$\sum_k m_k r_k z_k e^{j\theta_k} = 0 \quad (\text{momentos})$$

donde z_k es la posicion axial de cada masa. Se necesitan **2 masas de correccion** en 2 planos.

1.12 12. Ejercicios resueltos

1.12.1 Ejercicio 1: Ecuaciones de D'Alembert para una barra en rotacion

Una barra homogenea de masa $m = 2$ kg y longitud $L = 0.5$ m gira alrededor de un extremo O fijo. En un instante dado, $\theta = 60^\circ$, $\omega = 10$ rad/s, $\alpha = 5$ rad/s².

Calcular las reacciones en O y el par motor necesario.

Desarrollo:

Momento de inercia respecto a O (Steiner):

$$I_O = I_G + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$$

$$I_O = \frac{2 \times 0.5^2}{3} = 0.1667 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Aceleracion del centro de masas (G en el punto medio):

$$a_{Gx} = -\frac{L}{2} (\omega^2 \cos \theta + \alpha \sin \theta) = -14.17 \text{ m/s}^2$$

$$a_{Gy} = -\frac{L}{2} (\omega^2 \sin \theta - \alpha \cos \theta) = -21.00 \text{ m/s}^2$$

Ecuaciones de D'Alembert (equilibrio en O):

$$\sum F_x : \quad R_{Ox} = m a_{Gx} = -28.35 \text{ N}$$

$$\sum F_y : \quad R_{Oy} = m a_{Gy} + m g = -22.38 \text{ N}$$

$$|R_O| = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = 36.12 \text{ N}$$

$$\sum M_O : \quad M_{motor} = I_O \alpha + m g \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\boxed{M_{motor} = 5.74 \text{ Nm}}$$

1.12.2 Ejercicio 2: Par motor por Potencias Virtuales

Para el mismo mecanismo biela-manivela del analisis anterior, calcular el par motor en la posicion $\theta_2 = 90^\circ$ usando exclusivamente el metodo de potencias virtuales.

Verificar con el resultado del analisis inverso completo.

Desarrollo:

Cinematica en $\theta_2 = 90^\circ$: se resuelven las ecuaciones de cierre del lazo vectorial.

Potencias virtuales: el par motor se obtiene del balance de potencias:

$$M_{motor} \omega_2 + P_{ext} + P_{grav} + P_{inercia} = 0$$

$$M_{motor} = - \frac{P_{ext} + P_{grav} + P_{inercia}}{\omega_2}$$

Verificacion: el resultado coincide con el obtenido por D'Alembert (diferencia del orden de 10^{-14} Nm).

1.12.3 Ejercicio 3: Equilibrado estatico de un rotor

Un disco tiene tres masas desequilibradas en el mismo plano: - $m_1 = 100 \text{ g}$ a $r_1 = 50 \text{ mm}$, $\theta_1 = 0^\circ$
- $m_2 = 80 \text{ g}$ a $r_2 = 60 \text{ mm}$, $\theta_2 = 120^\circ$ - $m_3 = 60 \text{ g}$ a $r_3 = 40 \text{ mm}$, $\theta_3 = 240^\circ$

Determinar la masa de correccion m_c a un radio $r_c = 50 \text{ mm}$.

Desarrollo:

Desequilibrio total (suma vectorial en el plano complejo):

$$\sum m_i r_i e^{j\theta_i} = m_1 r_1 + m_2 r_2 e^{j120^\circ} + m_3 r_3 e^{j240^\circ}$$

Masa de correccion: se coloca a $r_c = 50 \text{ mm}$ en el angulo opuesto al desequilibrio:

$$m_c r_c e^{j\theta_c} = - \sum m_i r_i e^{j\theta_i}$$

Verificacion: el residuo $|\sum m_i r_i e^{j\theta_i} + m_c r_c e^{j\theta_c}| \approx 0$.

1.12.4 Ejercicio 4: Aplicacion del Teorema de Fuerzas Vivas

Una barra homogenea ($m = 3$ kg, $L = 0.8$ m) cae desde el reposo en posicion horizontal pivotando en un extremo. Calcular ω cuando pasa por la vertical.

Desarrollo:

Momento de inercia respecto al pivote:

$$I_O = \frac{mL^2}{3} = \frac{3 \times 0.8^2}{3} = 0.6400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Teorema de fuerzas vivas (de horizontal a vertical):

El centro de masas desciende $\Delta z = L/2 = 0.40$ m.

$$W_{grav} = m g \Delta z = 3 \times 9.81 \times 0.40 = 11.77 \text{ J}$$

$$W_{grav} = \Delta T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m g (L/2)}{I_O}} = \sqrt{\frac{2 \times 3 \times 9.81 \times 0.4}{0.64}}$$

$$\boxed{\omega = 6.264 \text{ rad/s}}$$

$$v_{punta} = \omega L = 5.011 \text{ m/s}$$

1.13 13. Catalogo de ejercicios

#	Tipo	Dificultad	Metodo	Descripcion
1	DCL + D'Alembert	Media	Vectorial	Dibujar DCL, plantear equilibrio de cada eslabon, resolver sistema lineal
2	Reacciones en pares	Media	Vectorial	Calcular fuerzas en articulaciones a partir del DCL
3	Potencias virtuales	Media	Analitico	Hallar par motor sin necesidad de calcular reacciones
4	Con rozamiento	Alta	Vectorial	Incluir fuerzas de friccion (Amontons-Coulomb) en las ecuaciones
5	Equilibrado de rotores	Media	Complejo	Equilibrado estatico (1 plano) o dinamico (2 planos)

#	Tipo	Dificultad	Metodo	Descripcion
6	Analisis dinámico completo	Alta	Combinado	Cinematica + dinamica inversa + graficas de par motor y reacciones

1.14 14. Resumen y formulas clave

1.14.1 Fuerzas de inercia (D'Alembert)

Concepto	Formula
Fuerza de inercia	$\vec{F}_i = -m \vec{a}_G$
Momento de inercia	$M_i = -I_G \alpha$
Steiner	$I_O = I_G + m d^2$

1.14.2 Reacciones en pares

Par	Incognitas	GDL restringidos
Rotacion	R_x, R_y	2
Prismatico	N, M (o N, N')	2
Leva	N	1
RSD	N, T	2

1.14.3 Rozamiento (Amontons-Coulomb)

$$F \leq \mu_s N \quad (\text{estático}), \quad T = \mu_d N \quad (\text{dinámico})$$

1.14.4 Metodos de resolucion

Metodo	Ventaja	Desventaja	Ecuaciones
D'Alembert (vectorial)	Todas las reacciones	Sistema grande ($3N$ eq.)	$\sum F = 0, \sum M = 0$ por eslabon
Pot. Virtuales (analitico)	1 sola ecuacion	Sin reacciones	$\sum P = 0$

1.14.5 Tipos de problema

Tipo	Dato	Incognita
Inverso	Movimiento (θ, ω, α)	Fuerzas / par motor
Directo	Fuerzas / par motor	Movimiento (integrar ODE)

1.14.6 Teorema Fuerzas Vivas

$$W_{\text{total}} = \Delta T = T_f - T_i$$

1.14.7 Equilibrado de rotores

Tipo	Condicion
Estatico (1 plano)	$\sum m_k r_k e^{j\theta_k} = 0$
Dinamico (2 planos)	$+ \sum m_k r_k z_k e^{j\theta_k} = 0$