

05_vibraciones_mecanicas

June 19, 2026

1 Tema 3B - Vibraciones Mecanicas de Sistemas de 1 GDL

Asignatura: Teoria de Maquinas y Mecanismos

1.0.1 Objetivos

1. Plantear la **ecuacion de movimiento** de un sistema de 1 GDL
2. Analizar la **vibracion libre** sin y con amortiguamiento
3. Resolver la **vibracion forzada** armonica y la **respuesta en frecuencia**
4. Calcular la **transmisibilidad** y aplicar el **decremento logaritmico**
5. Aplicar las **ecuaciones de Lagrange** a sistemas vibratorios

1.1 1. Formulario del Tema

1.1.1 Frecuencia natural y amortiguamiento

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_c}$$

$$c_c = 2m\omega_n = 2\sqrt{k m}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{frecuencia amortiguada, } \xi < 1)$$

1.1.2 Ecuacion de movimiento (1 GDL)

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t)$$

1.1.3 Vibracion libre sin amortiguamiento ($c = 0$)

$$x(t) = X \sin(\omega_n t + \phi) \quad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

1.1.4 Vibracion libre amortiguada (subamortiguado $\xi < 1$)

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

1.1.5 Decremento logaritmico

$$\delta = \ln \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

1.1.6 Vibracion forzada armonica

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\phi = \arctan \frac{2\xi r}{1 - r^2}$$

1.1.7 Transmisibilidad

$$T_r = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

1.1.8 Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{nc}$$

- T : energia cinetica, V : energia potencial, $D = \frac{1}{2}c\dot{q}^2$: funcion de disipacion de Rayleigh

1.2 2. Ecuacion de Movimiento

Un sistema vibratorio de **1 grado de libertad** se modela con una masa m , un resorte lineal k y un amortiguador viscoso c .

Aplicando la 2a ley de Newton al diagrama de cuerpo libre:

$$\sum F = m \ddot{x} \Rightarrow -kx - c\dot{x} + F(t) = m \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t)$$

Dividiendo entre m :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

1.3 3. Vibracion Libre sin Amortiguamiento

Con $c = 0$ y $F(t) = 0$:

$$m \ddot{x} + k x = 0 \implies \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

Solucion general:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) = X \sin(\omega_n t + \phi)$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$:

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega_n}, \quad X = \sqrt{A^2 + B^2}$$

1.4 4. Vibracion Libre con Amortiguamiento

Con $F(t) = 0$: $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$

La ecuacion caracteristica es $m s^2 + c s + k = 0$ con raices:

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

1.4.1 Tres casos segun ξ

Caso	Condicion	Raices	Comportamiento
Subamortiguado	$\xi < 1$	Complejas conjugadas	Oscilacion decreciente
Criticamente amortiguado	$\xi = 1$	Raiz doble real	Retorno mas rapido sin oscilacion
Sobreamortiguado	$\xi > 1$	Dos reales distintas	Retorno lento sin oscilacion

Subamortiguado ($\xi < 1$):

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

Criticamente amortiguado ($\xi = 1$):

$$x(t) = (A + B t) e^{-\omega_n t}$$

Sobreamortiguado ($\xi > 1$):

$$x(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

1.5 5. Ecuaciones de Lagrange

Para sistemas vibratorios es mas comodo usar **coordenadas generalizadas** y el formalismo de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{nc}$$

- $T = \frac{1}{2}m \dot{x}^2$: energia cinetica
- $V = \frac{1}{2}k x^2$: energia potencial elastica
- $D = \frac{1}{2}c \dot{x}^2$: funcion de disipacion de Rayleigh

Ejemplo rapido: Para masa-resorte-amortiguador con $q = x$:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}) - 0 + kx + c \dot{x} = F(t) \implies m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t) \checkmark$$

Ventaja: no es necesario calcular las reacciones internas.

1.6 6. Decremento Logaritmico

Para un sistema subamortiguado, el **decremento logaritmico** mide la tasa de decaimiento entre picos sucesivos:

$$\delta = \ln \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Si se miden n ciclos entre el pico k y el pico $k + n$:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_k}{x_{k+n}}$$

De δ se obtiene ξ :

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

1.7 7. Vibracion Forzada Armonica

Con excitacion $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, la respuesta estacionaria es:

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi)$$

donde la **amplitud** y el **desfase** son:

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\phi = \arctan \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

El **factor de amplificación dinámica** es:

$$H(r) = \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Resonancia ($r = 1$): $H_{\max} \approx \frac{1}{2\xi}$ (para ξ pequeño)

1.8 8. Transmisibilidad

La **transmisibilidad** mide la fracción de fuerza que se transmite a la base a través del muelle y el amortiguador:

$$T_r = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Observaciones clave: - $r < \sqrt{2}$: el sistema amplifica la fuerza ($T_r > 1$) - $r = \sqrt{2}$: $T_r = 1$ independientemente de ξ - $r > \sqrt{2}$: **aislamiento** de vibraciones ($T_r < 1$) - Mas amortiguamiento mejora cerca de resonancia pero **empeora** el aislamiento a altas frecuencias

1.9 9. Ejercicios Resueltos

1.9.1 Ejercicio 1 - Vibración libre sin amortiguamiento

Una masa de $m = 5$ kg sujeta a un muelle de $k = 2000$ N/m se desplaza $x_0 = 0.02$ m desde el equilibrio y se suelta sin velocidad inicial.

Calcular: frecuencia natural, periodo, y posición a $t = 0.1$ s.

Datos: $m = 5$ kg, $k = 2000$ N/m, $x_0 = 0.02$ m, $v_0 = 0$ m/s

Paso 1: Frecuencia natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{5}} = 20.000 \text{ rad/s}$$

Paso 2: Frecuencia cíclica y periodo

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{20.000}{2\pi} = 3.183 \text{ Hz}$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = 0.3142 \text{ s}$$

Paso 3: Posición a $t = 0.1$ s

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$x(0.1) = 0.02 \cdot \cos(20.000 \cdot 0.1) = -0.008323 \text{ m}$$

Resultado: $x(0.1) = -8.323 \text{ mm}$

1.9.2 Ejercicio 2 - Decremento logaritmico

Un sistema vibratorio oscila libremente. Se miden los siguientes desplazamientos en picos sucesivos: $x_0 = 8.5 \text{ mm}$, $x_5 = 3.2 \text{ mm}$ (5 ciclos despues).

Calcular: decremento logaritmico, factor de amortiguamiento ξ , y amortiguamiento critico c_c si $m = 2 \text{ kg}$ y $k = 5000 \text{ N/m}$.

Datos: $x_0 = 8.5 \text{ mm}$, $x_5 = 3.2 \text{ mm}$, $n = 5$ ciclos, $m = 2 \text{ kg}$, $k = 5000 \text{ N/m}$

Paso 1: Decremento logaritmico

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right) = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{8.5}{3.2} \right) = 0.1954$$

Paso 2: Factor de amortiguamiento

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.1954}{\sqrt{4\pi^2 + 0.1954^2}} = 0.0311$$

Paso 3: Amortiguamiento critico y coeficiente de amortiguamiento

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5000}{2}} = 50.000 \text{ rad/s}$$

$$c_c = 2m\omega_n = 2 \cdot 2 \cdot 50.000 = 200.000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$c = \xi \cdot c_c = 0.0311 \cdot 200.000 = 6.216 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

Resultado: $\xi = 0.0311$, $c = 6.216 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

1.9.3 Ejercicio 3 - Vibracion forzada

Un motor de $m = 100 \text{ kg}$ se monta sobre amortiguadores de rigidez total $k = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$ y amortiguamiento $c = 2000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. El desbalanceo genera una fuerza $F(t) = 500 \sin(\omega t) \text{ N}$ a la velocidad de operacion $\omega = 50 \text{ rad/s}$.

Calcular: amplitud de vibracion estacionaria y fuerza transmitida a la base.

Datos: $m = 100 \text{ kg}$, $k = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$, $c = 2000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $F_0 = 500 \text{ N}$, $\omega = 50 \text{ rad/s}$

Paso 1: Parametros del sistema

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400000}{100}} = 63.25 \text{ rad/s}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{2000}{2 \cdot 100 \cdot 63.25} = 0.1581$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{50}{63.25} = 0.7906$$

Paso 2: Amplitud estacionaria

$$X_{est} = \frac{F_0}{k} = \frac{500}{400000} = 1.250 \text{ mm}$$

$$X = \frac{X_{est}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 2.7735 \text{ mm}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) = 33.69^\circ$$

Paso 3: Transmisibilidad y fuerza transmitida

$$T_r = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 2.2871$$

$$F_T = T_r \cdot F_0 = 2.2871 \cdot 500 = 1143.54 \text{ N}$$

Resultado: $X = 2.7735 \text{ mm}, \quad F_T = 1143.54 \text{ N}$

1.9.4 Ejercicio 4 - Lagrange con pendulo-resorte

Un pendulo de masa m y longitud l tiene un muelle de constante k conectado a distancia a del pivote. Usar Lagrange para obtener la ecuacion de movimiento para pequenas oscilaciones ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$).

Coordenada generalizada: $q = \theta$

Paso 1: Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Paso 2: Energia potencial (gravitatoria + elastica)

$$V = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2}k(a \sin \theta)^2$$

Paso 3: Aproximacion para pequenas oscilaciones ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$)

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -mgl \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{1}{2}ka^2\theta^2 = -mgl + \frac{1}{2}(mgl + ka^2)\theta^2$$

Paso 4: Ecuacion de Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$

$$ml^2 \ddot{\theta} + (mgl + ka^2) \theta = 0$$

Paso 5: Frecuencia natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl + ka^2}{ml^2}}$$

Ejemplo numerico: $m = 2$ kg, $l = 0.5$ m, $k = 800$ N/m, $a = 0.3$ m

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot 0.5 + 800 \cdot 0.3^2}{2 \cdot 0.5^2}} = 12.791 \text{ rad/s}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 2.036 \text{ Hz}$$

Resultado: $\omega_n = 12.791 \text{ rad/s}, \quad f_n = 2.036 \text{ Hz}$

1.10 10. Catalogo de Ejercicios por Tipo

#	Tipo	Descripcion	Datos clave
1	Vibracion libre sin amortiguamiento	Calcular ω_n , T_n , f_n y respuesta temporal	m , k , x_0 , v_0
2	Decremento logaritmico	Determinar ξ a partir de picos medidos	x_k , x_{k+n} , n
3	Vibracion forzada armonica	Amplitud estacionaria, desfase, fuerza transmitida	m , k , c , F_0 , ω
4	Lagrange aplicado a vibraciones	Obtener ecuacion de movimiento via energias	T , V , D , coordenada q
5	Diseño de aislamiento	Elegir k y c para $T_r < T_{r,\max}$ a frecuencia dada	ω , $T_{r,\max}$, m
6	Sistemas equivalentes	Reducir sistema a 1 GDL equivalente (k_{eq} , m_{eq})	Muelles serie/paralelo, masas con inercia

1.10.1 Estrategia general de resolucion

1. **Identificar parametros:** m , k , c (o equivalentes)
2. **Calcular** ω_n , ξ , ω_d
3. **Clasificar** el tipo: libre/forzada, sin/con amortiguamiento
4. **Aplicar condiciones iniciales** para determinar constantes
5. **Evaluar** la respuesta temporal o frecuencial
6. **Verificar unidades** (SI): $[\omega] = \text{rad/s}$, $[c] = \text{N}\cdot\text{s/m}$, $[k] = \text{N/m}$

1.11 11. Tabla Resumen

Concepto	Formula	Significado
Frecuencia natural	$\omega_n = \sqrt{k/m}$	Frecuencia de oscilacion sin amortiguamiento
Factor de amortiguamiento	$\xi = c/c_c$	Relacion con amortiguamiento critico
Frecuencia amortiguada	$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$	Frecuencia real de oscilacion ($\xi < 1$)
Amplitud forzada	$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$	Amplitud estacionaria
Transmisibilidad	$T_r = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$	Fraccion de fuerza transmitida
Decremento log.	$\delta = 2\pi\xi/\sqrt{1 - \xi^2}$	Medida experimental de ξ
Lagrange	$\frac{d}{dt}(\partial T/\partial \dot{q}) - \partial T/\partial q + \partial V/\partial q + \partial D/\partial \dot{q} = Q^{nc}$	Metodo energetico
Aislamiento	$r > \sqrt{2} \implies T_r < 1$	Condicion para reducir transmision

Notas finales: - Siempre verificar que $\xi < 1$ antes de usar formulas de subamortiguado - El decremento logaritmico es la forma experimental mas comun de medir ξ - Para aislamiento efectivo, operar con $r > \sqrt{2}$ (baja rigidez, baja frecuencia natural)