

06_sintesis_mecanismos

June 19, 2026

1 Tema 4 - Sintesis de Mecanismos Planos

Asignatura: Teoria de Maquinas y Mecanismos

1.0.1 Objetivos

1. Comprender la **sintesis estructural** (tipo y numero) de mecanismos
2. Aplicar la formula de Grubler para sintesis topologica
3. Dominar la **ecuacion de Freudenstein** para sintesis dimensional
4. Resolver problemas de **generacion de funcion, trayectoria y movimiento**
5. Utilizar el **espaciado de Chebyshev** para minimizar el error estructural

1.1 1. Formulario del Tema

1.1.1 Sintesis estructural - Ecuacion de Grubler

$$G = 3(N - 1) - 2P_I - P_{II}$$

donde N = eslabones, P_I = pares de clase I (1 GDL), P_{II} = pares de clase II (2 GDL), G = grados de libertad.

1.1.2 Relacion tipo-numero

$$N - (G + 3) = T + 2Q + 3P$$

donde T = ternarios, Q = cuaternarios, P = pentagonales.

Con eslabones binarios (B):

$$B = G + 3 + T + 2Q + 3P$$

1.1.3 Ecuacion de Freudenstein

$$R_1 \cos \phi - R_2 \cos \psi + R_3 = \cos(\phi - \psi)$$

donde:

$$R_1 = \frac{d}{a}, \quad R_2 = \frac{d}{c}, \quad R_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

(a, b, c, d) : manivela, biela, balancin, bancada.

1.1.4 Espaciado de Chebyshev (n puntos de precision)

$$\phi_j = \frac{\phi_s + \phi_f}{2} - \frac{\phi_f - \phi_s}{2} \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

1.1.5 Error estructural

Diferencia entre la funcion deseada $\psi_d(\phi)$ y la generada $\psi_g(\phi)$:

$$e(\phi) = \psi_d(\phi) - \psi_g(\phi)$$

1.2 2. Tipos de Sintesis

1.2.1 2.1 Sintesis Estructural (Tipo y Numero)

Determina **cuantos y que tipo** de eslabones y pares forman el mecanismo.

- **Tipo:** binario, ternario, cuaternario...
- **Numero:** cantidad de cada tipo
- Se parte de $G = 1$ y se buscan combinaciones que satisfagan Grubler

1.2.2 2.2 Sintesis Dimensional

Determina las **dimensiones** (longitudes, angulos) de los eslabones para satisfacer una especificacion cinematica.

Tipo de problema	Especificacion
Generacion de funcion	Relacion $\psi = f(\phi)$ entre entrada y salida
Generacion de trayectoria	Un punto del acoplador sigue una curva dada
Generacion de movimiento	Un cuerpo pasa por posiciones prescritas (posicion + orientacion)

1.3 3. Sintesis Estructural

1.3.1 Ecuacion de Grubler-Kutzbach

Para mecanismos planos con 1 GDL ($G = 1$):

$$3(N-1) - 2P_I - P_{II} = 1$$

Con solo pares de revolucion y prismaticos ($P_{II} = 0$):

$$3N - 2P_I = 4$$

N	P_I	Ejemplo
4	4	Cuadrilatero articulado
6	7	Stephenson, Watt
8	10	Cadenas complejas

1.3.2 Relacion tipo-numero

Para $G = 1$: $N - 4 = T + 2Q + 3P$ y $B = 4 + T + 2Q + 3P$

Ejemplo ($N = 6$): $6 - 4 = 2$, asi $T = 2, Q = 0$ (el resto binarios $B = 4$).

Esto da lugar a las cadenas de **Watt** y **Stephenson**.

1.4 4. Ecuacion de Freudenstein

1.4.1 Derivacion

Para un cuadrilatero articulado (4 barras) con eslabones a (manivela), b (biela), c (balancin), d (bancada):

Cerramiento vectorial:

$$a e^{i\phi} + b e^{i\lambda} = d + c e^{i\psi}$$

Eliminando el angulo de la biela λ :

$$R_1 \cos \phi - R_2 \cos \psi + R_3 = \cos(\phi - \psi)$$

con:

$$R_1 = \frac{d}{a}, \quad R_2 = \frac{d}{c}, \quad R_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

1.4.2 Uso para sintesis de generacion de funcion

Dados **3 puntos de precision** (ϕ_j, ψ_j) para $j = 1, 2, 3$, se obtiene un sistema lineal 3×3 en las incognitas (R_1, R_2, R_3) :

$$\begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\cos \psi_1 & 1 \\ \cos \phi_2 & -\cos \psi_2 & 1 \\ \cos \phi_3 & -\cos \psi_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 - \psi_1) \\ \cos(\phi_2 - \psi_2) \\ \cos(\phi_3 - \psi_3) \end{bmatrix}$$

De R_1, R_2, R_3 se recuperan las longitudes (a, b, c, d) fijando una (normalmente $d = 1$).

1.5 5. Espaciado de Chebyshev

Para minimizar el **error estructural** maximo al generar una funcion, los puntos de precision deben distribuirse segun Chebyshev:

$$\phi_j = \frac{\phi_s + \phi_f}{2} - \frac{\phi_f - \phi_s}{2} \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right), \quad j = 1, \dots, n$$

Donde ϕ_s y ϕ_f son los extremos del rango de la variable de entrada.

Analogas formulas aplican para ψ_j si se conoce la funcion deseada $\psi = f(\phi)$.

1.5.1 Ejemplo: Generar $\psi = f(\phi)$ con 3 puntos Chebyshev

Disenar un cuadrilatero articulado que genere $\psi = 60 + 40 \sin(\phi - 30)$ (grados) para $\phi \in [30, 120]$ grados, usando 3 puntos de precision de Chebyshev.

1.6 6. Curva del Acoplador

La **curva del acoplador** es la trayectoria de un punto P fijo en la biela del cuadrilatero articulado. Estas curvas pueden aproximar trayectorias complejas (rectas, circulos, figuras de 8, etc.).

1.7 7. Generacion de Movimiento

En este problema, un cuerpo rigido (acoplador) debe pasar por **posiciones prescritas** (posicion + orientacion).

- Con **2 posiciones**: solucion infinita (se eligen las articulaciones)
- Con **3 posiciones**: solucion finita (sistema determinado)
- Con **4 posiciones**: sistema sobredeterminado (se usa optimizacion)

1.7.1 Metodo grafico (2 posiciones)

1. Elegir dos puntos A y B en el acoplador
2. Dibujar las posiciones A_1, A_2 y B_1, B_2
3. Las articulaciones fijas se ubican en las **mediatrices** de A_1A_2 y B_1B_2

1.8 8. Ejercicios Resueltos

1.8.1 Ejercicio 1 - Sintesis estructural

Determinar las posibles cadenas cinematicas de 1 GDL con $N = 8$ eslabones y solo pares de revolucion ($P_{II} = 0$).

Datos: $N = 8, G = 1, P_{II} = 0$

Paso 1: Ecuacion de Grubler

$$3(N - 1) - 2P_I = G \implies P_I = \frac{3 \cdot 7 - 1}{2} = 10$$

Paso 2: Relacion tipo-numero

$$N - (G + 3) = T + 2Q + 3P \implies 8 - 4 = 4$$

Paso 3: Combinaciones posibles (T, Q, P) con $B = G + 3 + T + 2Q + 3P$

T	Q	P	B	N total
4	0	0	8	8

T	Q	P	B	N total
2	1	0	7	8
0	2	0	6	8
1	0	1	5	8

Resultado: 4 combinaciones posibles de cadenas cinematicas

1.8.2 Ejercicio 2 - Freudenstein con 3 puntos

Disenar un cuadrilatero articulado que genere la funcion $y = x^{1.5}$ normalizada en el rango $\phi \in [40^\circ, 100^\circ]$, $\psi \in [50^\circ, 130^\circ]$, con 3 puntos de precision de Chebyshev.

Datos: $\phi_s = 40^\circ$, $\phi_f = 100^\circ$, $\psi_s = 50^\circ$, $\psi_f = 130^\circ$, funcion $y = x^{1.5}$

Paso 1: Espaciado de Chebyshev para $n = 3$ puntos

$$\phi_j = \frac{\phi_s + \phi_f}{2} - \frac{\phi_f - \phi_s}{2} \cos\left(\frac{2j-1}{6}\pi\right)$$

j	ϕ_j	x_j	ψ_j
1	44.02°	0.0670	51.39°
2	70.00°	0.5000	78.28°
3	95.98°	0.9330	122.06°

Paso 2: Resolver sistema de Freudenstein con los 3 puntos

$$R_1 \cos \phi_j - R_2 \cos \psi_j + R_3 = \cos(\phi_j - \psi_j), \quad j = 1, 2, 3$$

Paso 3: Obtener dimensiones con $d = 1$

$$a = \frac{d}{R_1}, \quad c = \frac{d}{R_2}, \quad b = \sqrt{a^2 + c^2 + d^2 - 2acR_3}$$

Resultado: Se obtienen los coeficientes R_1, R_2, R_3 y las dimensiones a, b, c, d del cuadrilatero

1.8.3 Ejercicio 3 - Generacion de trayectoria

Un punto del acoplador debe pasar por los puntos $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (3, 2.5)$ y $P_3 = (4, 1.5)$.

Con un cuadrilatero de bancada $d = 3$, pivote fijo en $O_2 = (0, 0)$ y segundo pivote en $O_4 = (3, 0)$.

Datos: $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (3, 2.5)$, $P_3 = (4, 1.5)$, $O_2 = (0, 0)$, $O_4 = (3, 0)$, $d = 3$

Paso 1: Distancias de cada punto a los pivotes fijos

j	P_j	$ O_2 - P_j $	$ O_4 - P_j $
1	(2, 1)	2.236	1.414
2	(3, 2.5)	3.905	2.500
3	(4, 1.5)	4.272	1.803

Paso 2: Planteamiento del sistema

El punto P esta en la biela a distancias fijas de A y B . Se plantea el sistema de cerramiento vectorial para cada posicion.

Con 3 puntos y 5 incognitas $(a, b, c, \delta_P, \gamma_P)$, se fijan 2 parametros y se resuelve el sistema 3×3 .

Resultado: Sistema de 3 ecuaciones no lineales a resolver numericamente

1.8.4 Ejercicio 4 - Mecanismo de retorno rapido

Disenar un mecanismo de manivela-corredera con **relacion de tiempos** $Q = t_{avance}/t_{retorno} = 1.4$. Calcular el angulo de presion α .

Datos: $Q = 1.4$

Paso 1: Relacion entre Q y α

$$Q = \frac{180^\circ + \alpha}{180^\circ - \alpha}$$

Paso 2: Despejando α

$$\alpha = \frac{180^\circ(Q - 1)}{1 + Q} = \frac{180^\circ \times 0.4}{2.4} = 30^\circ$$

Paso 3: Verificacion

- Angulo de avance: $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$
- Angulo de retorno: $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
- $Q = 210^\circ/150^\circ = 1.4$

Resultado: $\alpha = 30^\circ$

1.9 9. Catalogo de Ejercicios por Tipo

#	Tipo	Descripcion	Datos clave
1	Sintesis estructural	Enumerar cadenas cinematicas para N y G dados	N , P_I , Grubler
2	Freudenstein (generacion de funcion)	Dimensionar cuadrilatero para $\psi = f(\phi)$	Puntos de precision, Chebyshev

#	Tipo	Descripcion	Datos clave
3	Generacion de trayectoria	Curva del acoplador pasa por puntos dados	Puntos P_j , cerramiento
4	Retorno rapido	Relacion de tiempos Q y angulo α	$Q = (180 + \alpha)/(180 - \alpha)$
5	Generacion de movimiento	Acoplador en posiciones prescritas	Mediatrices, 2-3 posiciones

1.9.1 Estrategia general de resolucion

1. **Clasificar** el tipo de problema: estructural vs dimensional
2. **Si estructural**: aplicar Grubler y la relacion tipo-numero
3. **Si dimensional**: elegir entre generacion de funcion/trayectoria/movimiento
4. **Definir puntos de precision** (Chebyshev si es posible)
5. **Plantear y resolver** el sistema de ecuaciones (Freudenstein u otro)
6. **Verificar** con analisis cinematico completo
7. **Comprobar Grashof** si se necesita manivela completa

1.10 10. Criterio de Grashof (Recordatorio)

Para que un eslabon pueda dar vueltas completas:

$$s + l \leq p + q$$

donde s = eslabon mas corto, l = mas largo, p y q los otros dos.

- **Cumple Grashof**: al menos un eslabon puede rotar completamente
- **No cumple**: ninguno puede; todos son balancines (doble balancin)

1.11 11. Tabla Resumen

Concepto	Formula / Metodo	Aplicacion
Grubler	$G = 3(N - 1) - 2P_I - P_{II}$	Determinar GDL
Tipo-numero	$N - (G + 3) = T + 2Q + 3P$	Enumerar topologias
Freudenstein	$R_1 \cos \phi - R_2 \cos \psi + R_3 = \cos(\phi - \psi)$	Generacion de funcion
Chebyshev	$\phi_j = \frac{\phi_s + \phi_f}{2} - \frac{\phi_f - \phi_s}{2} \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}$	Minimizar error
Retorno rapido	$Q = (180 + \alpha)/(180 - \alpha)$	Mecanismos de carrera
Grashof	$s + l \leq p + q$	Existencia de manivela
Gen. movimiento	Mediatrices de $A_j A_k$	2-3 posiciones prescritas

Notas finales: - Freudenstein con 3 puntos de precision: sistema determinado - El espaciado de Chebyshev distribuye el error de forma optima (minimax) - Para mas de 3 puntos se usan metodos de optimizacion