

07_engranajes_trenes

June 19, 2026

1 Tema 5 - Engranajes y Trenes de Engranaje

Asignatura: Teoria de Maquinas y Mecanismos

1.0.1 Objetivos

1. Conocer la **clasificacion** y geometria de los engranajes
2. Comprender la **condicion de conjugacion** y el perfil de **evolvente**
3. Dominar las formulas de la **geometria del diente** (modulo, paso, addendum, dedendum)
4. Calcular relaciones de transmision en **trenes simples, compuestos y epicicloidales**
5. Aplicar la **ecuacion de Willis** a trenes planetarios

1.1 1. Formulario del Tema

1.1.1 Geometria del diente (sistema metrico)

Parametro	Formula	Descripcion
Modulo	$m = d/Z$	Parametro fundamental
Paso circular	$p = \pi m$	Distancia entre dientes consecutivos
Diametro primitivo	$d = m Z$	Circunferencia de rodadura
Addendum (cabeza)	$h_a = m$	Altura sobre primitiva
Dedendum (pie)	$h_f = 1.25 m$	Profundidad bajo primitiva
Altura total	$h = h_a + h_f = 2.25 m$	Altura completa del diente
Diametro de cabeza	$d_a = m (Z + 2)$	Circunferencia exterior
Diametro de pie	$d_f = m (Z - 2.5)$	Circunferencia interior
Distancia entre centros	$a_c = m (Z_1 + Z_2)/2$	Para engranajes externos

1.1.2 Relacion de transmision

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{d_2}{d_1}$$

1.1.3 Condicion de conjugacion

$$\eta = -\frac{d\psi_2}{d\psi_3} = \text{constante}$$

El perfil que cumple esta condicion es la **evolvente** (involuta) de circulo.

1.1.4 Perfil de evolvente

$$x(\theta) = r_b(\cos \theta + \theta \sin \theta)$$

$$y(\theta) = r_b(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

donde $r_b = r \cos \alpha$ (radio de base), α = angulo de presion (tipicamente 20°).

1.1.5 Ecuacion de Willis (trenes epicicloides)

$$i^{\text{brazo}} = \frac{\omega_L - \omega_B}{\omega_F - \omega_B} = (-1)^n \prod \frac{Z_{\text{motoras}}}{Z_{\text{conducidas}}}$$

donde B = brazo, L = ultimo, F = primero, n = numero de contactos externos.

1.1.6 Engranajes helicoidales

$$m_n = m_t \cos \beta$$

$$p_n = p_t \cos \beta$$

$$Z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \text{ (para evitar interferencia, dientes rectos)}$$

1.2 2. Clasificacion de Engranajes

Tipo	Ejes	Caracteristicas
Cilindricos rectos	Paralelos	Dientes rectos, el mas simple
Cilindricos helicoidales	Paralelos	Dientes inclinados β , mas suaves
Conicos	Concurrentes	Ejes que se cortan, tipicamente 90 grados
Tornillo sin fin	Cruzados (90 grados)	Gran reduccion, irreversible
Cremallera	-	Engranaje con $Z \rightarrow \infty$ (plano)

1.2.1 Ventajas del perfil de evolvente

- Relacion de transmision constante (condicion de conjugacion)
- Insensible a pequenos errores en la distancia entre centros
- Fabricacion sencilla (herramienta tipo cremallera generatriz)
- La linea de accion es recta

1.3 3. Geometria del Diente

1.3.1 Diente normalizado (sistema metrico ISO)

El **modulo** m es el parametro que define completamente la geometria del diente:

- $h_a = 1.0 m$ (adendum)
- $h_f = 1.25 m$ (dedendum, incluye juego radial $0.25 m$)
- $h = 2.25 m$ (altura total)
- Espesor del diente $= \pi m/2$ (en la primitiva)

Modulos normalizados: 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10...

1.3.2 Angulo de presion α

- Valor estandar: $\alpha = 20^\circ$ (antiguo: 14.5°)
- Define la inclinacion de la linea de accion
- $r_b = r \cos \alpha$: radio de base

1.3.3 Interferencia

Se produce cuando el diente del pinon penetra por debajo de la base del engranaje.

Numero minimo de dientes para evitar interferencia (con cremallera):

$$Z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2(20^\circ)} \approx 17$$

1.4 4. Trenes de Engranajes

1.4.1 4.1 Tren simple

Engranajes en serie, cada eje tiene un solo engranaje:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^{n-1} \frac{Z_n}{Z_1}$$

Los engranajes intermedios (**locos**) no afectan la relacion, solo el signo.

1.4.2 4.2 Tren compuesto

Algunos ejes tienen 2 engranajes solidarios:

$$i = \frac{\omega_{\text{entrada}}}{\omega_{\text{salida}}} = \frac{\text{producto } Z_{\text{conducidas}}}{\text{producto } Z_{\text{motoras}}}$$

1.4.3 4.3 Tren epicicloidal (planetario)

Contiene un **brazo** giratorio que porta engranajes **planetarios** (satelites) que orbitan alrededor de un engranaje **solar** (central).

Componentes: - **Solar** (S): engranaje central fijo o movil - **Planetario** (P): engranaje(s) montado(s) en el brazo - **Corona** (C): engranaje anular exterior - **Brazo** (B): porta-planetarios

1.4.4 Ecuacion de Willis

$$i_{FL}^B = \frac{\omega_L - \omega_B}{\omega_F - \omega_B}$$

donde F = primer engranaje, L = ultimo engranaje, B = brazo.

El valor de i_{FL}^B se calcula como si el brazo estuviera fijo (tren ordinario):

$$i_{FL}^B = (-1)^{n_{ext}} \prod \frac{Z_{motoras}}{Z_{conducidas}}$$

n_{ext} = numero de contactos externos.

1.5 5. Tipos Especiales de Engranajes

1.5.1 5.1 Engranajes helicoidales

Dientes inclinados un angulo β respecto al eje: - Modulo normal: $m_n = m_t \cos \beta$ - Paso normal: $p_n = p_t \cos \beta$ - Z virtual: $Z_v = Z / \cos^3 \beta$ (para calculo de interferencia) - Fuerza axial: $F_a = F_t \tan \beta$

1.5.2 5.2 Engranajes conicos

- Ejes concurrentes (tipicamente $\Sigma = 90^\circ$)
- $i = Z_2/Z_1 = \tan \delta_2 / \tan \delta_1$ con $\delta_1 + \delta_2 = \Sigma$
- Modulo y paso varian a lo largo del ancho

1.5.3 5.3 Tornillo sin fin

- Gran reduccion en una etapa: $i = Z_{rueda} / Z_{tornillo}$
- $Z_{tornillo} = 1, 2, 3$ o 4 (numero de entradas)
- Generalmente **irreversible** (autoretension) si angulo de avance $<$ angulo de friccion

1.6 6. Ejercicios Resueltos

1.6.1 Ejercicio 1 - Parametros del engranaje

Un par de engranajes rectos tiene modulo $m = 3$ mm. El pinon tiene $Z_1 = 18$ dientes y la rueda $Z_2 = 54$ dientes. Angulo de presion $\alpha = 20^\circ$.

Calcular: todos los parametros geometricos y la relacion de transmision.

Datos: $m = 3$ mm, $Z_1 = 18$, $Z_2 = 54$, $\alpha = 20^\circ$

Paso 1: Parametros del pinon ($Z_1 = 18$)

Parametro	Formula	Valor
Diametro primitivo	$d_1 = m \cdot Z_1 = 3 \times 18$	54 mm
Diametro de cabeza	$d_{a1} = m(Z_1 + 2) = 3 \times 20$	60 mm
Diametro de pie	$d_{f1} = m(Z_1 - 2.5) = 3 \times 15.5$	46.5 mm

Parametro	Formula	Valor
Diametro de base	$d_{b1} = d_1 \cos \alpha = 54 \cos 20^\circ$	50.743 mm
Adendum	$h_a = m$	3 mm
Dedendum	$h_f = 1.25 m$	3.75 mm
Paso circular	$p = \pi m = 3\pi$	9.425 mm

Paso 2: Parametros de la rueda ($Z_2 = 54$)

Parametro	Formula	Valor
Diametro primitivo	$d_2 = m \cdot Z_2 = 3 \times 54$	162 mm
Diametro de cabeza	$d_{a2} = m(Z_2 + 2) = 3 \times 56$	168 mm
Diametro de pie	$d_{f2} = m(Z_2 - 2.5) = 3 \times 51.5$	154.5 mm
Diametro de base	$d_{b2} = d_2 \cos \alpha = 162 \cos 20^\circ$	152.230 mm

Paso 3: Relacion de transmision y distancia entre centros

$$i = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{54}{18} = \boxed{3.0}$$

$$a_c = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2} = \frac{3 \times 72}{2} = \boxed{108.0 \text{ mm}}$$

Paso 4: Verificacion de interferencia

$$Z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 20^\circ} \approx 17.1$$

$Z_1 = 18 \geq 17.1 \Rightarrow$ **No hay interferencia**

1.6.2 Ejercicio 2 - Tren simple

Un tren de engranajes simple tiene 4 engranajes: $Z_1 = 20$, $Z_2 = 40$, $Z_3 = 30$, $Z_4 = 60$. El eje de entrada gira a $\omega_1 = 1500$ rpm.

Calcular: velocidad de salida ω_4 y sentido de giro.

Datos: $Z_1 = 20$, $Z_2 = 40$, $Z_3 = 30$, $Z_4 = 60$, $\omega_1 = 1500$ rpm

Paso 1: Identificar tipo de tren

Engranajes en serie (cada eje tiene un solo engranaje) $\Rightarrow$ **tren simple**.

Z_2 y Z_3 son engranajes **locos** (intermedios): no afectan a $|i|$, solo al signo.

Paso 2: Relacion de transmision

$$i = (-1)^{n-1} \frac{Z_n}{Z_1}$$

Con $n = 4$ engranajes:

$$i = (-1)^3 \cdot \frac{Z_4}{Z_1} = (-1) \cdot \frac{60}{20} = -3.0$$

Paso 3: Velocidad de salida

$$\omega_4 = \frac{\omega_1}{|i|} = \frac{1500}{3} = \boxed{500 \text{ rpm}}$$

Resultado: $i = -3$ (signo negativo $\Rightarrow$ sentido **opuesto** a ω_1 , numero impar de contactos externos)

1.6.3 Ejercicio 3 - Tren compuesto

Un reductor de dos etapas: $Z_1 = 15$ engrana con $Z_2 = 45$ (primera etapa); en el mismo eje de Z_2 va solidario $Z_3 = 18$ que engrana con $Z_4 = 72$ (segunda etapa). Entrada a $\omega_1 = 3000$ rpm.

Calcular: relacion total y velocidad de salida.

Datos: $Z_1 = 15$, $Z_2 = 45$, $Z_3 = 18$, $Z_4 = 72$, $\omega_1 = 3000$ rpm

(Z_2 y Z_3 son solidarios en el mismo eje)

Paso 1: Primera etapa ($Z_1 \rightarrow Z_2$)

$$i_1 = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{45}{15} = 3.00$$

Paso 2: Segunda etapa ($Z_3 \rightarrow Z_4$)

$$i_2 = \frac{Z_4}{Z_3} = \frac{72}{18} = 4.00$$

Paso 3: Relacion total

$$i_{\text{total}} = i_1 \cdot i_2 = 3 \times 4 = \boxed{12}$$

(Reduccion 12 : 1)

Paso 4: Velocidad de salida

$$\omega_4 = \frac{\omega_1}{i_{\text{total}}} = \frac{3000}{12} = \boxed{250 \text{ rpm}}$$

Sentido: **mismo** que ω_1 (dos contactos externos, ambos invierten el sentido)

1.6.4 Ejercicio 4 - Tren planetario (Willis)

Un tren epicicloidal tiene: solar $Z_S = 30$, planetario $Z_P = 20$, corona $Z_C = 70$. El solar gira a $\omega_S = 1000$ rpm y la corona esta fija ($\omega_C = 0$).

Calcular: velocidad del brazo ω_B .

Datos: $Z_S = 30$, $Z_P = 20$, $Z_C = 70$, $\omega_S = 1000$ rpm, $\omega_C = 0$ rpm

Paso 1: Verificacion geometrica

$$Z_C = Z_S + 2 Z_P \Rightarrow 70 = 30 + 2 \times 20 = 70 \quad \checkmark$$

Paso 2: Calculo de i_{SC}^B (con brazo fijo)

Cadena $S \rightarrow P$ (contacto externo) $\rightarrow C$ (contacto interno):

$$i_{SC}^B = \frac{-Z_S}{Z_P} \cdot \frac{Z_P}{Z_C} = -\frac{Z_S}{Z_C} = -\frac{30}{70} = -0.4286$$

Paso 3: Aplicar ecuacion de Willis

$$\frac{\omega_C - \omega_B}{\omega_S - \omega_B} = i_{SC}^B$$

$$\frac{0 - \omega_B}{1000 - \omega_B} = -0.4286$$

Paso 4: Despejar ω_B

$$\omega_B = \frac{\omega_C - i_{SC}^B \cdot \omega_S}{1 - i_{SC}^B} = \frac{0 - (-0.4286)(1000)}{1 - (-0.4286)} = \frac{428.6}{1.4286}$$

$\omega_B = 300 \text{ rpm}$

Verificacion:

$$\frac{\omega_C - \omega_B}{\omega_S - \omega_B} = \frac{0 - 300}{1000 - 300} = \frac{-300}{700} = -0.4286 = i_{SC}^B \quad \checkmark$$

1.7 7. Catalogo de Ejercicios por Tipo

#	Tipo	Descripcion	Datos clave
1	Geometria del diente	Calcular d , d_a , d_f , d_b , h , p	m , Z , α

#	Tipo	Descripcion	Datos clave
2	Tren simple	Relacion de transmision, sentido de giro	Z_i , locos, signo
3	Tren compuesto	Reduccion en multiples etapas	Ejes solidarios, $\prod Z$
4	Tren planetario (Willis)	Velocidad de solar/corona/brazo	Z_S, Z_P, Z_C , Willis
5	Interferencia	Verificar $Z_{\min}$, perfil corregido	$Z_{\min} = 2/\sin^2 \alpha$
6	Engranajes helicoidales	Modulo normal/transversal, fuerzas	β, m_n, m_t, F_a

1.7.1 Estrategia general de resolucion

1. **Identificar tipo de engranaje** y sistema (metrico/imperial)
2. **Geometria:** a partir de m y Z calcular todos los diametros
3. **Trenes simples/compuestos:** multiplicar relaciones por etapa, cuidar signos
4. **Planetarios:**
 - Identificar F (primer engranaje), L (ultimo), B (brazo)
 - Calcular i_{FL}^B como tren ordinario (brazo fijo)
 - Aplicar Willis: $(\omega_L - \omega_B)/(\omega_F - \omega_B) = i_{FL}^B$
 - Imponer la condicion de contorno (elemento fijo o velocidad conocida)
5. **Verificar interferencia** si Z es pequeno

1.7.2 Tornillo sin fin - Formulas clave

Parametro	Formula
Relacion de transmision	$i = Z_{\text{rueda}}/Z_{\text{tornillo}}$
Angulo de avance	$\gamma = \arctan(Z_t \cdot m/d_w)$
Eficiencia	$\eta = \frac{\tan \gamma}{\tan(\gamma + \rho)}$
Autoretension	$\gamma < \rho$ (angulo de friccion)

Para $Z_t = 1$ entrada: $i = Z_r/1 = Z_r$ (reducciones de 20:1 a 100:1 comunes).

1.7.3 Configuraciones tipicas de trenes planetarios

Configuracion	Fijo	Entrada	Salida	i (tipico)
Solar fija	Solar	Corona	Brazo	$1 + Z_S/Z_C < 1$
Corona fija	Corona	Solar	Brazo	$1 + Z_C/Z_S > 1$
Brazo fijo	Brazo	Solar	Corona	$-Z_S/Z_C$ (tren ordinario)

Ejemplo numerico: $Z_S = 30, Z_P = 20, Z_C = 70$

- Corona fija, $S \rightarrow B$: $i = 1 + Z_C/Z_S = 1 + 70/30 = 3.333$
- Solar fija, $C \rightarrow B$: $i = 1 + Z_S/Z_C = 1 + 30/70 = 1.429$
- Brazo fijo, $S \rightarrow C$: $i = -Z_S/Z_C = -30/70 = -0.4286$

1.8 8. Tabla Resumen

Concepto	Formula	Aplicacion
Modulo	$m = d/Z$	Parametro base del diente
Paso circular	$p = \pi m$	Distancia entre dientes
Diametro primitivo	$d = m Z$	Circunferencia de rodadura
Adendum / Dedendum	$h_a = m, h_f = 1.25 m$	Alturas del diente
Cabeza / Pie	$d_a = m(Z + 2),$ $d_f = m(Z - 2.5)$	Diametros extremos
Relacion de transmision	$i = Z_2/Z_1 = d_2/d_1$	Velocidades angulares
Tren simple	$i = (-1)^{n-1} Z_n/Z_1$	Locos no afectan $ i $
Tren compuesto	$i = \prod Z_{cond}/Z_{mot}$	Ejes solidarios
Willis	$(\omega_L - \omega_B)/(\omega_F - \omega_B) = i_{FL}^B$	Trenes planetarios
Evolvente	$x = r_b(\cos \theta + \theta \sin \theta)$	Perfil conjugado
Interferencia	$Z_{min} = 2/\sin^2 \alpha$	Minimo sin correccion
Helicoidal	$m_n = m_t \cos \beta$	Modulo normal

Notas finales: - El modulo debe ser **igual** en ambos engranajes para que engranen - Willis siempre se aplica entre el **primer** y **ultimo** engranaje del tren (no el brazo) - La condicion geometrica $Z_C = Z_S + 2Z_P$ es necesaria para el montaje - Para gran reduccion en poco espacio: trenes planetarios o tornillo sin fin